

Controlo da locomoção de um robô de seis pernas¹

*Departamento de Engenharia Electrotécnica
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra*

João Pedro de Almeida Barreto
António Rui Trigo Ribeiro

29 de Setembro de 1997

¹Este trabalho foi realizado no laboratório de robótica móvel, no Instituto de Sistemas e Robótica.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Ao longo dos últimos anos os robôs com pernas têm ganho uma importância crescente dentro da robótica móvel. Assim, o Instituto de Sistemas e Robótica de Coimbra decidiu alargar a sua área de trabalho a este campo, planeando para breve a aquisição de um protótipo.

O presente documento pretende ser um estudo introdutório à robótica com pernas. Nele, entre outras coisas, são analisadas as vantagens e desvantagens destas máquinas face aos robôs tradicionais, e é feito o ponto da situação da investigação na área. Para além disso é desenvolvido um modelo cinemático e dinâmico dum hexapodal que permitiu a elaboração de um simulador com o qual fizemos testes para a validação dos resultados obtidos ao longo do projecto.

1.1 Roda versus Perna

A maior invenção do homem, a roda, tornou-se numa das suas maiores dependências. No dia a dia, ao nos deslocarmos, utilizamos veículos baseados neste invento. Desde a bicicleta ao comboio, quase todos os meios de transporte têm por base a roda. Apesar do conforto que os veículos com rodas nos trouxeram, são prejudiciais ao meio ambiente. Este último foi e é alterado constantemente, dado que há necessidade de construir caminhos próprios, como sejam as estradas ou carris, por onde se possam deslocar. Quando não existe esta necessidade, como no caso dos tanques, existe o factor destruição, pois os veículos que usam lagartas geralmente deixam marcas pelos locais por onde passam.

A roda nas suas mais variadas formas só nos permite chegar, segundo o exército norte americano, a 50% dos locais terrestres, enquanto que os animais que não usam a roda como o seu meio de locomoção conseguem

alcançar quase toda a superfície terrestre.

Existirá alguma alternativa viável a esta nossa dependência?

Uma das alternativas é a utilização de veículos que utilizem a locomoção com pernas. Esta alternativa não é nova, mas só há pouco tempo é que se apresentou como uma alternativa viável. Isto porque um veículo deste tipo exige uma grande coordenação ao contrário dos que possuem rodas. Este problema da coordenação só começou a ser resolvido duma forma eficiente a partir anos oitenta quando surgiram os primeiros micro processadores.

A partir de então foi possível pensar em veículos com pernas, o que nos leva a pensar que, mais tarde ou mais cedo, iremos ter um meio de transporte similar a nós mesmos.

1.1.1 Na robótica

O estudo da mobilidade na robótica tem sido alvo de uma investigação muito intensa nestes últimos anos. Tão intensa que levou à separação da robótica em dois ramos, o da robótica fixa e o da robótica móvel. Primeiro utilizaram-se robôs com rodas, que já eram familiares dada a quantidade existente de veículos deste tipo. A mobilidade destes é bastante reduzida, pois estes só se conseguem deslocar sobre planos e em duas direcções. Em oposição a estes surgem os robôs com pernas mais adaptados a terrenos irregulares, o que é o caso mais comum. Além disso podem-se mover em qualquer direcção, tal como os animais.

Um robô com rodas tem de estar constantemente em contacto com o plano que está a percorrer. O mesmo não se passa com os robôs com pernas pois estes podem seleccionar o local onde irão colocar o pé. Um bom exemplo disto é o avanço ao longo de um escadote. Enquanto que o robô com pernas vai colocando os pés nos degraus o robô com rodas fica entalado nos espaços entre os degraus. Por este exemplo se vê a maior facilidade (ou a incapacidade do robô com rodas), que o robô com pernas tem de andar em terrenos irregulares e/ou com obstáculos.

A suspensão convencional de que os robôs com rodas estão dotados, não lhes permite isolar o corpo das irregularidades do terreno. Em contra partida os robôs com pernas conseguem diferenciar o caminho percorrido pelas pernas do percorrido pelo corpo, isolando este bastante bem. Esta estabilidade faz deste tipo de robôs óptimos laboratórios móveis em oposição aos robôs com rodas, que, por melhores mecanismos de suspensão que possuam, podem sempre abanar ao apanhar uma irregularidade mais forte do terreno.

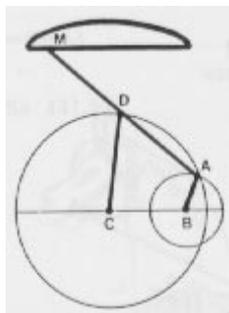


Figura 1.1: Articulação de Chebyshev

1.2 Os primeiros passos da locomoção com pernas

Em 1870 surgiu o primeiro modelo de uma estrutura com pernas. Este usava um sistema articulado, desenvolvido uns anos antes por Chebyshev, para fazer andar o corpo ao longo de uma linha recta.

Movia os pés para cima e para baixo, trocando entre eles o ponto de contacto com o chão. Até ao início dos anos 60 a investigação levada a cabo em torno deste assunto resumiu-se ao desenvolvimento de diferentes articulações, que permitissem este tipo de movimento.

No fim dos anos 50 chegou-se à conclusão que os veículos com pernas baseados em articulações não se apresentavam, por si só, como uma alternativa aos veículos com rodas. A sua adaptabilidade a terrenos irregulares era nula, pelo que não trazia nada de novo em relação aos veículos com rodas. Para ultrapassar este problema surgiu a ideia de que os veículos com pernas teriam de ser controlados. Ao serem controlados iriam ganhar mobilidade e adaptabilidade, pois não teriam necessidade de se seguirem pelos padrões de movimento criados por essas articulações. Numa primeira abordagem utilizou-se o ser humano para controlar este tipo de veículos com pernas. Ralph Moser, da General Electric, baseou-se nesta abordagem para a construção de um camião com quatro pernas. Este veículo media 3,4m de altura, pesava 1360kg e estava equipado com um motor hidráulico.

Aos braços e às pernas do condutor estavam associadas alavancas e pedais que lhe permitiam controlar as quatro pernas do veículo. Cada vez que este encontrava um obstáculo o condutor sentia uma força nas alavancas ou pedais que lhe permitia sentir o obstáculo, tal como do seu braço ou perna se tratasse. Ao fim de algum tempo Mosher conseguia dominar o veículo com uma certa destreza. No fim dos anos sessenta chegavam os computadores

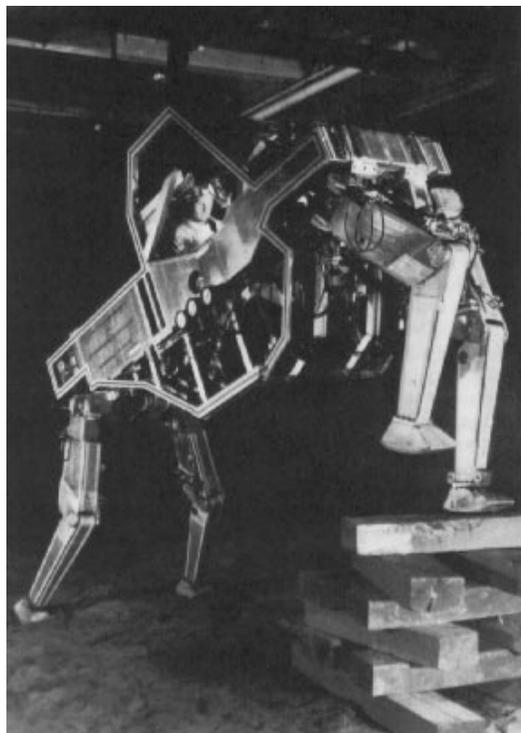


Figura 1.2: Camião da General Electric

digitais e trouxeram consigo o poder de cálculo necessário ao controle de veículos deste tipo. Seria o fim do ser humano enquanto agente controlador "in loco". A incapacidade humana é notória pelo facto de só termos quatro membros. Como conseguirá o ser humano controlar seis pernas ao mesmo tempo por exemplo?

1.2.1 E apareciam os primeiros robôs

Surge então o primeiro veículo com pernas completamente controlado por computador, um quadrúpede chamado "Phoney Pony". Este veículo inspirado no camião da General Electric e foi construído por McGhee e Frank na Universidade do Sul da Califórnia. Cada perna tinha dois graus de liberdade e era constituída por dois segmentos e por duas juntas. As juntas eram actuadas por motores eléctricos e a sua coordenação era feita por computador.

Uns anos mais tarde na Rússia aparecia o primeiro robô de seis pernas, construído por Okhotsimski. Seis pernas foi considerado como sendo o número de pernas que apresentava o melhor compromisso entre estabilidade

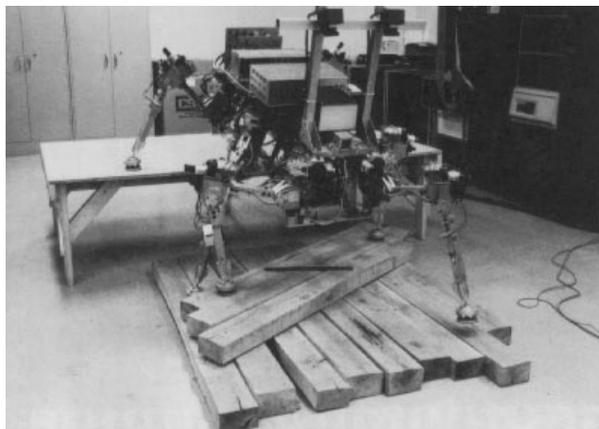


Figura 1.3: OSU Hexapod

e complexidade. Foi o primeiro robô a aplicar conceitos de inteligência artificial na locomoção com pernas. Similar a um insecto, possuía 18 graus de liberdade e a decisão de andar era baseada num dicionário de acções.

Nesse mesmo ano McGhee construía o “OSU Hexapod” similar ao russo; tal como o russo, era alimentado externamente e era controlado por um computador, neste caso o PDP-11/70. O papel do computador era o tratamento das equações de cinemática, que permitiam controlar os dezoito motores eléctricos que faziam andar o robô.

Uma outra abordagem foi a realizada por Hirose, que aliou o desenho de articulações com o poder de cálculo do computador. Utilizou a sua experiência adquirida no desenho de articulações, no desenho de uma perna especial, que simplificava o controlo da locomoção, tendo melhorado muito a sua eficiência. Cada um dos actuadores da perna era directamente traduzido em valores de coordenadas (x,y,z) . Esta característica facilitou bastante o controlo do robô, pois ao se mexer num actuador, sabia-se automaticamente o resultado desta acção em termos das coordenadas (x,y,z) . Esta técnica foi usada para projectar um robô com quatro pernas, cujo movimento era controlado por algoritmos simples, que usavam os sensores para controlar a acção exercida no pé. Por exemplo, se o sensor de força sentisse um obstáculo quando o pé estava a ser deslocado para a frente, este recuava, subia um pouco e voltava a deslocar-se para a frente. Isto sucessivamente até superar o obstáculo.

Em 1983 Raibert e Sutherland construíram o primeiro hexapodal com um microcomputador a bordo e com um motor a gasolina. Foi o primeiro veículo completamente independente, podendo levar a bordo um humano.

Um outro tipo de robôs que não irão ser alvo do nosso estudo mas que convém referir são os monopodais, bipodais e tetrapodais baseados em “gaits” de dinâmicos. Estes de robôs estão sempre aos pulos por forma a se equilibrarem e progredirem no terreno.

1.2.2 Alguns exemplos actuais



Figura 1.4: Fotografia do robô Plustech.

Plustech

As florestas são um ambiente frágil, motivo pelo qual devem ser tratadas com cuidado. Quando utilizamos tractores, ou outro tipo de máquinas baseadas na roda, destruímos a floresta à medida que nos vamos movendo. No caso dos veículos com pernas, como é o caso do Plustech, o mesmo não acontece pois estes veículos só precisam de pisar a floresta para colocar os pés. Como é fácil de ver a área que estes pisam é muito menor que a dos veículos com rodas.

O Plustech possui seis pernas, foi produzido pela empresa do mesmo nome e encontra-se, tal como se pode ver na figura acima, operacional. Trata-se de um veículo com 3.5m de comprimento, 2.0m de largura e 2.0 de altura. Tem 18 graus de liberdade, pesando cerca de 3500 kilogramas e com uma velocidade máxima de 1m/s.

Para obter mais informações, contactar a Plustech no seguinte endereço:

<http://www.plustech.fi>

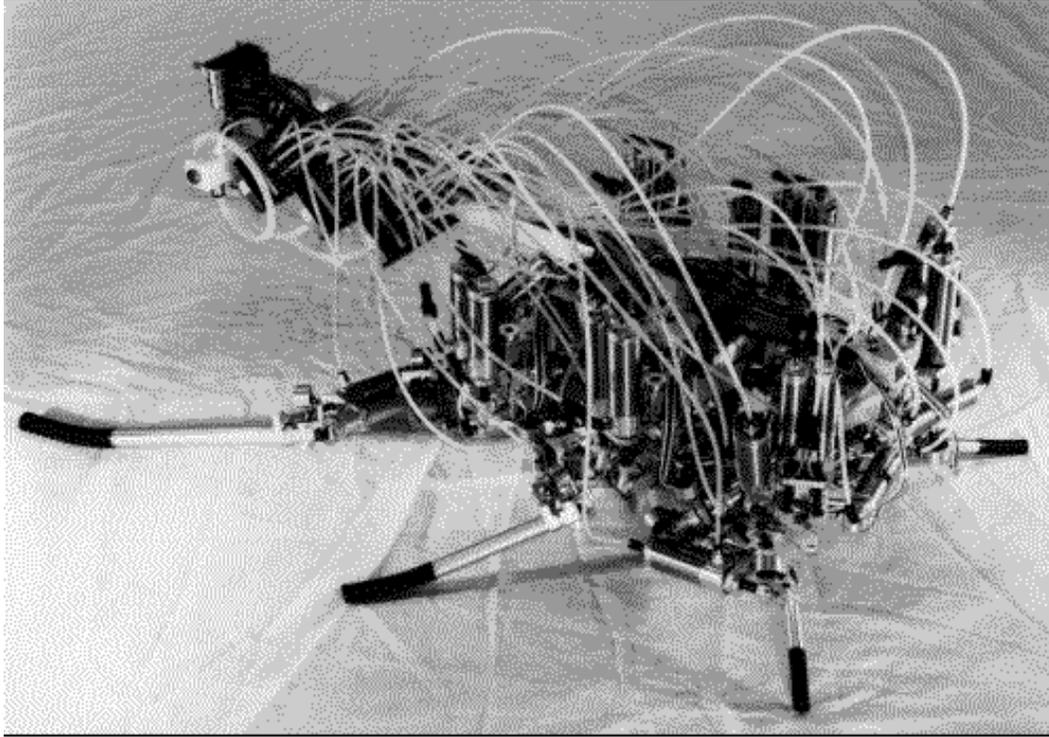


Figura 1.5: Fotografia do ROBOT III.

ROBOT III

A seguir ao ROBOT I e II surge o ROBOT III, um dos novos brinquedos da “Case Western Reserve University”. Como já foi referido anteriormente, a robótica com pernas mexe com várias áreas da ciência, estando muito interligada com a biologia. Este robô é um desses casos tendo sido construído em parceria com o departamento de biologia da mesma Universidade. A ideia subjacente foi a de criar um robô que conseguisse imitar o movimento de uma barata. Este ROBOT III é um hexapodal cujos estudos cinemáticos foram baseados na barata *Blaberus discoidalis*.

Tem um total de 24 graus de liberdade distribuídos da seguinte forma: as pernas dianteiras possuem cinco graus de liberdade, as do meio possuem quatro graus de liberdade e as de trás três graus de liberdade. É actuado pneumaticamente utilizando cilindros e válvulas pneumáticas.

Para obter mais informações, contactar a CWRU no seguinte endereço:

<http://biorobots.cwru.edu>

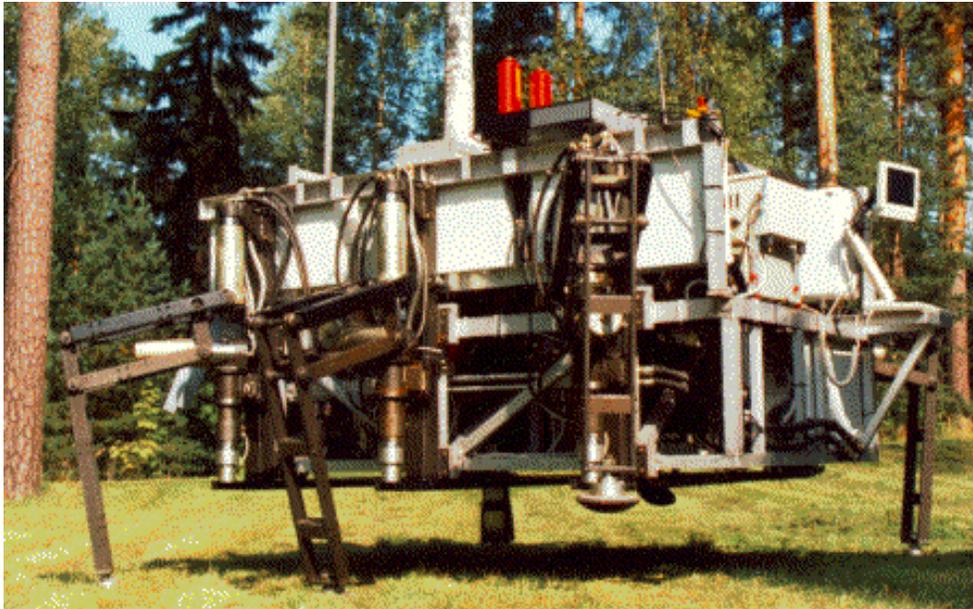


Figura 1.6: Fotografia do MECANT.

MECANT

O MECANT (“MECanical ANT” - aranha mecânica) foi desenvolvido na Universidade de Helsínkia, Finlândia. O objectivo deste projecto foi o de estudar as tecnologias e metodologias necessárias para a construção de um robô com seis pernas. Esta máquina deveria ser capaz de se deslocar e de transportar consigo manipuladores para operar na floresta.

Construiu-se então o MECANT para estudar a adaptação ao terreno, o equilíbrio do andar, os sensores necessários e sua pilotagem. Os objectivos deste estudo passaram pela resolução de problemas relacionados com o desenho deste, com o estudo de “gaits” e controlo do movimento, com o estudo do controlo dos actuadores e do interface homem-máquina.

Este veículo pesa cerca de 1100 kilogramas sendo propulsionado por um motor de um ultra-ligeiro de dois cilindros de 38 kW arrefecido a ar. O mecanismo das pernas é um pantógrafo com um eixo de rotação vertical tendo cada uma 3 graus de liberdade. O operador controla o veículo remotamente, via rádio, através de joysticks.

<http://www.automation.hut.fi/research/robotics/walking/>

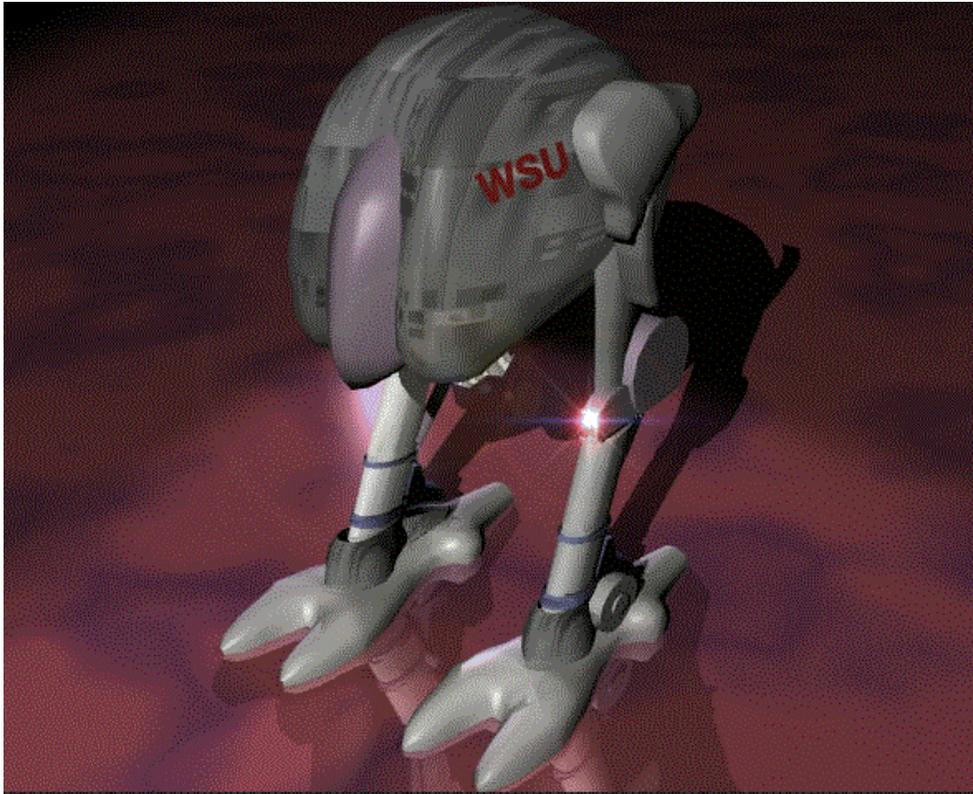


Figura 1.7: Fotografia do biped da WSU ROBOTICS.

Biped

Este projecto encontra-se ainda na sua fase inicial, motivo pelo qual a fotografia não é a do actual robô, mas sim do futuro robô a ser construído.

Para ultrapassar os problemas de estabilidade inerentes a robôs com duas pernas, a “WSU Robotics” decidiu construir um robô com uns pés grandes que permitam ao robô ficar em pé apoiado num só pé.

Um outro problema que se põe é o da distribuição do peso pelas pernas quando este se desloca. Pois ao contrário dos robôs com mais pernas, onde o peso é suportado pelas pernas que não se estão a mover, no caso do robô com duas pernas o peso do robô vai sendo transferido de uma perna para outra. Por forma a ultrapassar este problema, o peso de todos os componentes está a ser reduzido ao mínimo, para que a transferência do peso de perna para perna cause a mínima interferência possível.

Para obter mais informações, contactar a WSU no seguinte endereço:

<http://www.eecs.wsu.edu/wsurobot/projects/>



Figura 1.8: Fotografia de um insecto rastejante.

1.3 O estudo da locomoção com pernas

Para pôr um robô com pernas a andar é preciso primeiro definir o modo como ele deve andar. Vários estudos sobre a forma como os animais se deslocam têm sido feitos com o objectivo de entender como é que estes coordenam e controlam o movimento das suas pernas. Estes estudos levaram ao desenvolvimento de modelos matemáticos, aplicáveis na robótica.

1.3.1 O que é que imitamos

A natureza fornece-nos diversos exemplos de locomoção com pernas que se podem dividir em duas categorias.

A primeira é a exibida pelos insectos cujas pernas têm sempre de suportar o corpo durante o movimento, para além de lhe dar impulso. O centro de massa do corpo situa-se dentro do polígono de suporte, formado pelos pontos de contacto das pernas com o chão. Tem de haver pelo menos três pernas em constante contacto com o chão para garantir a estabilidade estática que caracteriza este tipo de locomoção, denominada de “crawling” (rastejante).

A outra pode ser observada nos humanos, cavalos e cangurus que têm uma estrutura muito mais flexível. Ao contrário dos anteriores não requerem equilíbrio estático utilizando o conceito de balanço dinâmico. Pode haver períodos em que nenhum dos pés está em contacto com o chão, tal como no caso de cavalos a trote, de humanos a correr e, claro, de cangurus a saltar.



Figura 1.9: Movimento balanceado de um cavalo a galope.

1.3.2 Da descrição do movimento à criação de modelos matemáticos

Tudo começou em 1899 quando Leland Stanford, governador da Califórnia, encarregou Eadweard Muybridge de verificar se um cavalo a trote levantava ou não as quatro pernas ao mesmo tempo. Depois de mostrar, através de fotografias, que o cavalo realmente levantava as pernas ao mesmo tempo ele documentou o movimento de aproximadamente quarenta mamíferos, incluindo o ser humano.

Em 1961 Tomovic e Karplus da Jugoslávia foram os primeiros a quantificar matematicamente a locomoção com pernas. Definiram-na como possuindo dois estados. Um quando a perna estava no chão e outro quando a perna estava no ar.

Ao descrever os “gaits”¹ simétricos usados pelos cavalos Hildebrand, em

¹Movimento cooperativo das pernas.

1965, desenvolve o conceito de “gait formula”² e o de “gait diagrama”³. Definiu ainda o conceito de passo como sendo a distância percorrida num ciclo de locomoção. Definiu ainda duas razões, uma do tempo que o pé fica no chão sobre o tempo do passo, a que deu o nome de “duty factor”, e outra do tempo que o pé dianteiro fica atrás do pé traseiro sobre o período do passo.

McGhee, em 1968, estende o trabalho de Hildebrand dotando-o de uma forte base matemática. Pegou no conceito de Tomovic e definiu a perna como sendo uma máquina sequencial de dois estados. O estado 1 que representa a fase de suporte, ou seja quando a perna está em contacto com o chão, e o estado 0 que traduz a fase de transferência, quando a perna está no ar.

Uma das preocupações era a relação entre os padrões de movimento e a estabilidade estática produzida pelo “gait”. McGhee e Frank criaram o conceito de *margem de estabilidade estática*, que permitia medir a estabilidade estática de um “gait”. Propuseram ainda um outro conceito para o mesmo efeito, o da *estabilidade estática longitudinal* mais adaptado para a implementação computacional. Usaram este para estudar “gaits” de estabilidade estática para um quadrúpede, tendo provado que existe um único “gait” óptimo que maximiza a estabilidade estática longitudinal do quadrúpede. A margem de estabilidade estática do “gait” é $\beta \Leftrightarrow \frac{3}{4}$ onde β é o “duty factor”.

Bessonov e Umnov em 1973 demonstraram que um “gait” regular e simétrico para um hexapodal, com a relação abaixo escrita, maximizava a estabilidade estática longitudinal de todos “gaits” periódicos. A relação é:

$$\phi_3 = \beta, \phi_5 = 2\beta \Leftrightarrow 1, \beta \geq 0.5$$

onde ϕ_i ⁴ é a fase da perna n e β o “duty factor”. A fase é medida com o tempo que a perna n fica atrás da perna 1 sobre o período do passo.

Sun baseado nos trabalhos de McGhee e Jain chegou também ao mesmo resultado um ano mais tarde.

O “free gait” foi um dos primeiros “gaits” não periódicos, proposto por Kugushev e Jaroshevskij em 1975, para resolver o problema da escolha automática do local onde colocar o pé, numa situação real. Foi modificado em 1979 por McGhee e Iswandhi para aplicação no “OSU Hexapod”. Este algoritmo foi também implementado no “ASV - Adaptive Suspension Vehicle”. Maximizava a estabilidade estática bem como a existência de mais pernas livres para a locomoção, através da especificação quer no espaço quer

²Uma fórmula que descreva um “gait”.

³Utilização de diagramas para descrever “gaits”.

⁴Fracção de tempo que o contacto da perna _{i} com o chão fica atrás do contacto da perna 1 com o chão.

no tempo, do local onde o pé deveria ser colocado. A utilização deste “gait” requeria que o terreno estivesse discretizado em células. Só se podia colocar o pé em células assinaladas como válidas. Tinha a desvantagem de ser pesado computacionalmente e de não resolver o problema da locomoção em terrenos irregulares.

Outro “gait” implementado foi o “follow-the-leader”, no “OSU Hexapod”. Aqui as pernas da frente eram colocadas em locais pré-definidos, que eram marcados com um feixe de raios laser pelo operador humano. As pernas do meio colocavam-se no local das da frente e as traseiras no local das do meio e assim sucessivamente. Desta forma o robô conseguia progredir bastante bem apesar da existência do operador humano que lhe removía a independência.

Após estes trabalhos, onde a investigação esteve centrada na optimização de “gaits” para terrenos lisos, entrou-se numa nova fase. A criação de “gaits” que permitissem a locomoção em terrenos irregulares começou a ser a grande preocupação. Um dos métodos era possuir uma descrição detalhada do terreno a atravessar, permitindo assim a criação de uma sequência pré-definida de passos. Um exemplo deste modelo criado por Qui e Song em 1988, foi criado por Song e Waldron em 1988 denominado “large obstacle gait”. Isto funciona bem para uma situação óptima mas não para o caso real. Neste é necessário um sistema de inteligência que permita definir constantemente o terreno que temos há frente para atravessar.

1.4 Os objectivos

No início do projecto, o nosso objectivo era o estudo da locomoção de um robô hexapodal, o HEG. Dada a não existência deste robô, tivemos que prosseguir com o nosso trabalho. Assim sendo avançamos com a criação de um simulador, semelhante ao HEG, que nos permitisse desenvolver o trabalho a que nos tínhamos proposto. O nosso simulador foi dividido em duas partes distintas. Uma para simular os diferentes problemas de cinemática e outra para simular problemas dinâmicos.

1.4.1 Cinemática

Aqui iremos desenvolver o nosso estudo sobre “gaits”. Para desenvolver este tipo de estudo iremos implementar, dois algoritmos diferentes, para resolver os problemas de cinemática directa e inversa.

Cinemática directa

Este irá permitir controlar a posição das diferentes partes do robô, como sejam, a posição do seu centro de massa, os ângulos de rotação do centro de massa e os ângulos de rotação das seis pernas do robô, que permitem posicionar o pé do robô.

Cinemática inversa

O objectivo deste é o de descobrir os diferentes ângulos de rotação, em função da posição pé do robô. Este algoritmo é de grande importância pois se quisermos que o robô se desloque para uma determinada posição, não lhe damos os ângulos de rotação, mas sim a posição, em função das coordenadas (x,y,z) , para onde queremos que ele vá.

Desenvolvimento de “Gaits”

Nós iremos trabalhar com um robô de seis pernas, o “HEG”. Como já foi demonstrado há uns anos atrás é o número ideal de pernas para o desenvolvimento de “gaits” de estabilidade estática. Isto porque um quadrúpede por exemplo só pode deslocar uma perna de cada vez para garantir a estabilidade estática enquanto que o com seis pernas pode mover três, o que o torna bastante mais rápido que o anterior. Por outro lado um de oito pernas que consegue ser com certeza mais rápido que o de seis, tem um grau de complexidade muito mais elevado que compromete não só a velocidade deste como a aplicabilidade de conceitos já desenvolvidos para casos mais simples.

O trabalho a ser desenvolvido nesta área será o de estudar aquilo que já está feito e avançar com a implementação de “gaits” no simulador. São objectivos do nosso trabalho por o robô a andar em todas as direcções.

1.4.2 Dinâmica

Aqui iremos começar por desenvolver um modelo 2D. No modelo 2D iremos simular diversas situações que serão explicadas futuramente, nas secções dedicadas ao estudo da dinâmica do HEG. Os resultados obtidos com o modelo 2D poderão, futuramente, ser expandidos para o modelo real 3D.

Capítulo 2

Cinemática do robô

2.1 Introdução

A cinemática é o ramo da mecânica que faz o estudo analítico da geometria do movimento em relação a um dado referencial, usualmente um sistema de eixos cartesianos ortonormados. Esta análise é feita em função do tempo, sem levar em atenção as forças e momentos que causam a variação da posição.

No nosso caso pretendemos obter um modelo matemático do robô que nos permita descrever o seu movimento. Não só nos interessa a análise do todo (trajectória do centro de massa em relação a um referencial absoluto), mas também das suas partes constituintes (segmentos das pernas, corpo central, etc), nomeadamente os deslocamentos e rotações relativas.

Numa primeira aproximação vamos considerar o corpo central do robô fixo e concentrarmo-nos sobre a questão do movimento das pernas. Como já anteriormente referimos, cada perna do HEG tem três graus de liberdade. Será portanto natural considerarmos como variáveis independentes os ângulos associados a cada um desses graus, bem como ângulos de rotação e a posição do centro de massa do corpo. Numa fase posterior poderemos definir estas variáveis como função do tempo ou de qualquer outro parâmetro, sem que a validade deste estudo se perca.

O problema da cinemática pode dividir-se em dois subproblemas. Por um lado, dados os ângulos das juntas e a descrição geométrica dos segmentos de ligação, qual a posição do ponto de apoio da perna em relação a um referencial base? Esta é a questão que se põe à chamada cinemática directa. Por outro lado, dado um ponto onde queiramos colocar a ponta da perna, quais as rotações que devemos fazer? Este é o problema analisado na cinemática inversa, que se prolonga no estudo das trajectórias a ser visto em capítulos subsequentes.

Logo à partida vimo-nos confrontados com a escassez de literatura sobre robótica com pernas. Em contrapartida, a informação acerca de manipuladores, com muitos mais anos de existência e estudo, era abundante e variada. Considerando que uma perna com três graus de liberdade poderá ser analisada como um braço simplificado, decidimos adaptar muitos dos conceitos e formalismos dos manipuladores clássicos ao nosso trabalho. Servimo-nos, entre outras coisas, da aproximação de Denavit-Hartenberg (D-H), que utiliza algébra de matrizes para descrever as relações espaciais dos segmentos dum manipulador, e que se mostrou muito útil na resolução da cinemática directa.

2.2 Cinemática directa

2.2.1 Introdução

De forma a resolver o problema da cinemática directa, começámos por modelizar a perna à semelhança dum manipulador com três graus de liberdade. Para isso utilizámos o método de D-H explanado na subsecção seguinte.

Feito o modelo de uma perna passámos á integração dos seis membros com o corpo de forma a termos uma análise completa da cinemática directa do robô. A subsecção ?? descreve esta fase.

2.2.2 Modelização duma perna

Generalidades sobre matrizes de transformação

Ao longo deste projecto vamos ser forçados a trabalhar com vários referenciais ortonormados em simultâneo. Neste contexto é extremamente importante dispor de mecanismos que possibilitem a determinação das coordenadas dum dado ponto em relação aos diferentes sistemas.

Por isso vamos utilizar coordenadas homogéneas de forma a podermos relacionar dois quaisquer referencias - *sistema_i*, *sistema_j* - através duma matriz de transformação iA_j . Deste modo, sendo x_j um ponto expresso em relação ao *sistema_j*, a sua representação x_i no *sistema_i* será ...

$$x_i = {}^iA_j * x_j$$

No caso de querermos obter as coordenadas de x_j no *sistema_k*, e conhecermos kA_i e iA_j verifica-se que ...

$$x_k = {}^kA_i * {}^iA_j * x_j$$

O que é o mesmo que dizer que ...

$${}^k A_j = {}^k A_i * {}^i A_j$$

A matriz ${}^i A_j$ é uma matriz 4x4 podendo subdividir-se em quatro submatrizes ...

$${}^i A_j = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R é a componente de rotação da transformação, sendo uma matriz 3x3 em que cada coluna corresponde às coordenadas dos versores do *sistema_j* definidas em relação ao *sistema_i*. T é um vector 3x1 e define a componente de translação indicando a posição da origem do *sistema_j* em função do *sistema_i*. ${}^i A_j(4, 4)$ permite manipular o factor de escala da transformação. Ao longo deste trabalho consideraremos esse factor sempre unitário.

Antes de terminar estas breves considerações note-se que a inversão destas matrizes de transformação é tão útil como simples. Assim, se pretendermos a matriz ${}^j A_i$, que transforma as coordenadas do *sistema_i* nas do *sistema_j*, basta modificar ${}^i A_j$ da seguinte forma:

$${}^j A_i = \begin{bmatrix} R^t & \Leftrightarrow T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método de Denavit-Hartenberg

Um manipulador consiste numa sequência de segmentos ligados através de juntas. Para efeitos do nosso problema vamos só considerar juntas de revolução, embora também sejam comuns as juntas prismáticas. Cada par junta-segmento constitui um grau de liberdade, logo um manipulador de ordem n têm n pares junta-segmento. Tem ainda um *segmento₀*, que não faz parte do robô, servindo de suporte, e onde geralmente se estabelece o referencial inercial para o manipulador. As juntas e os segmentos são numerados, em ordem crescente, a partir do referencial inercial até ao extremo do manipulador.

Uma *junta_i* liga o *segmento_{i-1}* ao *segmento_i* e, dado ser de revolução, terá um dado eixo de rotação. Relativamente a este eixo podemos considerar duas normais associadas a cada um dos segmentos unidos pela junta. A posição relativa dos segmentos em cada instante pode ser definida por dois parâmetros da junta: d_i , que é a distância, medida ao longo do eixo de rotação, dos pontos de intersecção deste com as normais; e o ângulo θ_i entre as normais, medido num plano perpendicular ao eixo da junta. Podemos então designar d_i e θ_i como sendo, respectivamente, a distância e o ângulo

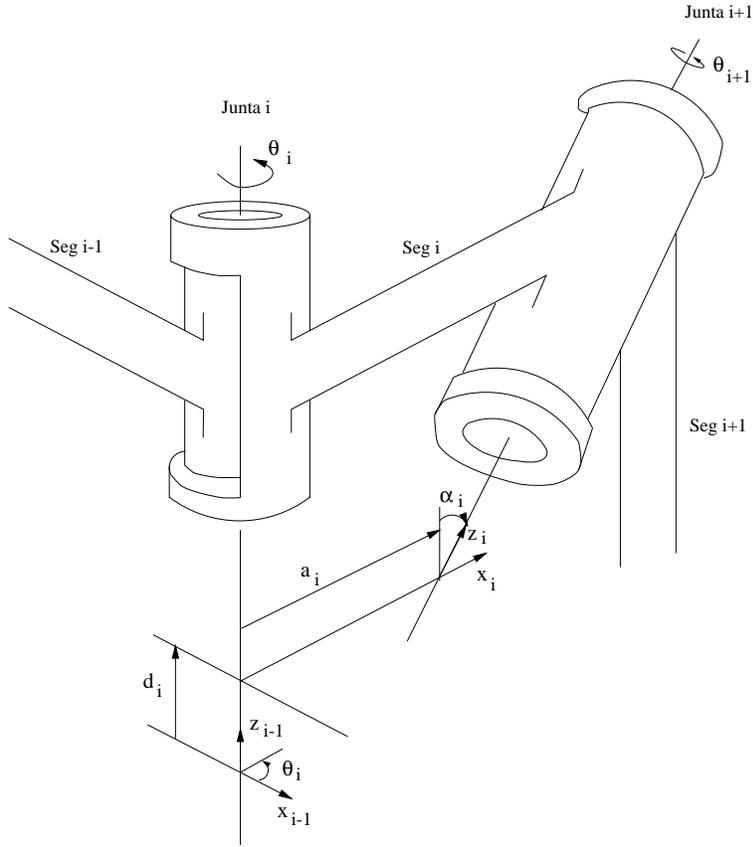


Figura 2.1: Sistema de coordenadas e seus parâmetros

entre dois segmentos adjacentes. No nosso caso, e dado as juntas serem de revolução, o θ_i varia enquanto d_i se mantém constante.

A $junta_i$ é ainda caracterizada por outros dois valores importantes: a_i , que é a distância mais curta entre os eixos de rotação da $junta_i$ e da $junta_{i+1}$, medida ao longo da normal comum; α_i , que é o ângulo entre os eixos das duas juntas consecutivas, medido num plano perpendicular a a_i . Logo a_i e α_i podem ser designados como o comprimento e o ângulo de viragem do $segmento_i$. Temos então os parâmetros relativos aos segmentos (a_i, α_i) , que definem a sua estrutura, e os referentes às juntas (d_i, θ_i) , que determinam a posição relativa de segmentos adjacentes.

A aproximação de D-H, para descrever a rotação dum determinado $segmento_i$ em torno da $junta_i$ respectiva, define um referencial cartesiano ortonormado - $sistema_i$ - na extremidade do braço. O referencial encontra-se unido ao segmento, rodando com ele (só teríamos de considerar translação no caso de

termos juntas prismáticas). Desta forma, para cada *junta_i* temos a sucessão junta-segmento-sistema, em que o *sistema_i* é espacialmente coincidente com a *junta_{i+1}* (no caso de esta existir). Desta forma o referencial base de um manipulador será o *sistema₀* situado sobre a *junta₁*. A fase seguinte do método consiste na determinação das matrizes de transformação homogénea (4x4), que mapeiam as coordenadas do *sistema_i* no *sistema_{i-1}*. Esta matriz será função do ângulo de rotação θ_i em torno da *junta_i*.

Cada sistema de coordenadas é estabelecido segundo as seguintes regras:

1. O eixo z_{i-1} situa-se ao longo do eixo de movimento da *junta_i*.
2. O eixo x_i é normal ao eixo z_{i-1} e aponta para fora deste.
3. O eixo y_i completa o sistema de coordenadas (utilizando a regra da mão direita).

Como foi referido podemos, com a representação D-H, desenvolver uma matriz de transformação que relaciona o *sistema_i* com o *sistema_{i-1}*. Um ponto expresso no *sistema_i* pode ser referenciado no *sistema_{i-1}* utilizando as seguintes transformações:

1. Rodamos em torno de z_{i-1} o eixo x_{i-1} de um ângulo θ_i para o alinharmos com o eixo x_i .
2. Translacionamos ao longo do eixo z_{i-1} a distância d_i para tornarmos os eixos x_{i-1} e x_i coincidentes.
3. Translacionamos ao longo do eixo x_i uma distância a_i para fazer coincidir as duas origens bem como o eixo x_i .
4. Rodamos um ângulo α_i em torno do eixo x_i para fazermos coincidir os dois sistemas de coordenadas.

Isto em operações com matrizes traduz-se em:

$${}^{i-1}A_i = T_{z,d}T_{z,t}T_{x,a}T_{x,\alpha} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \Leftrightarrow \sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \Leftrightarrow \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} *$$

$$\begin{aligned}
& * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & \Leftrightarrow \sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \Leftrightarrow \cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & \Leftrightarrow \sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

onde α_i , a_i , d_i são constantes, enquanto que θ_i é o ângulo de rotação da junta.

Aplicação do método de Denavit-Hartenberg na modelização dum membro do robô

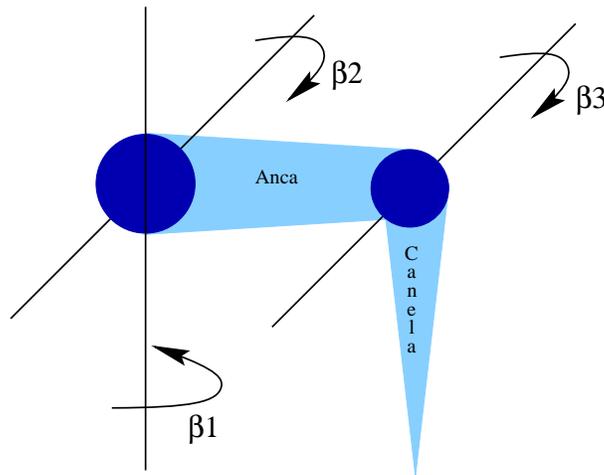


Figura 2.2: Perna do Robô

Como se pode ver na figura um membro do robô compõe-se de dois segmentos que designaremos por anca e canela em analogia com a perna humana.

As juntas são de revolução sendo os graus de liberdade três. A anca pode rodar no seu encaixe em duas direcções: na horizontal descrevendo o ângulo β_1 e na vertical segundo o ângulo β_2 . A canela pode girar na vertical de forma a descrever o ângulo β_3 em torno da junta de união com a anca. Os sentidos indicados pelas setas são os convencionados positivos.

Note-se que, para se poder aplicar os formalismos de D-H, cada segmento só poderá rodar em torno de um único eixo portanto numa única direcção.

No entanto a anca movimenta-se quer na vertical quer na horizontal. Será que podemos utilizar o método?

A resposta à questão do parágrafo anterior é afirmativa. Para isso teremos de considerar ao nível do encaixe da anca duas juntas. A *junta*₁ com um eixo de rotação vertical em torno do qual a anca descreve β_1 , e a *junta*₂, perpendicular à anterior, a que está associado o ângulo β_2 . A particularidade nestas duas juntas é que o comprimento do *segmento*₁ que as une é nulo.

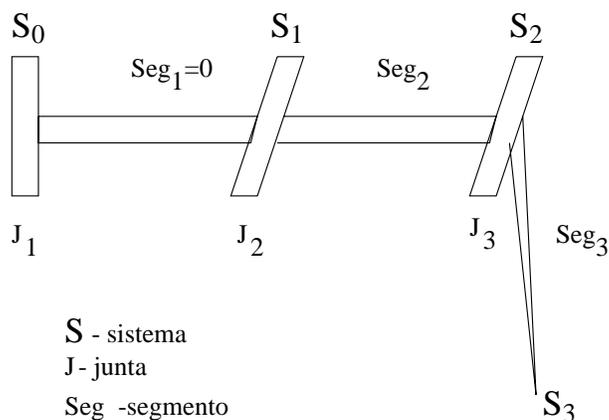


Figura 2.3: Sistemas de eixos coordenados gráfico-1

Conforme se pode observar na figura a *junta*₁ coincide espacialmente com o *sistema*₀ que, para já, vamos considerar fixo. O *sistema*₃ localiza-se no ponto de apoio do membro.

Estamos agora em condições de avançar com a aproximação de D-H. De acordo com as suas regras definimos os referenciais ortonormados.

Assim temos quatro sistemas de coordenadas. O referencial base pode ser colocado em qualquer lugar, desde que o eixo z_0 se situe ao longo do eixo de movimento da *junta*₁. Em relação ao segundo sistema de coordenadas o eixo x_1 tem de ser normal ao eixo z_0 . z_1 é posicionado de forma a ficar no enfiamento do eixo de rotação da *junta*₁. Fazendo, sucessivamente, estes raciocínios chegamos ao quarto sistema de coordenadas cujo versor x_3 tem de ser normal à coordenada z_2 .

Os parâmetros das juntas são a seguir tabelados.

Parâmetros da perna:				
<i>junta</i> _{<i>i</i>}	θ_i	α_i	a_i	d_i
1	0	90	0	0
2	0	0	anca	0
3	270	0	canela	0

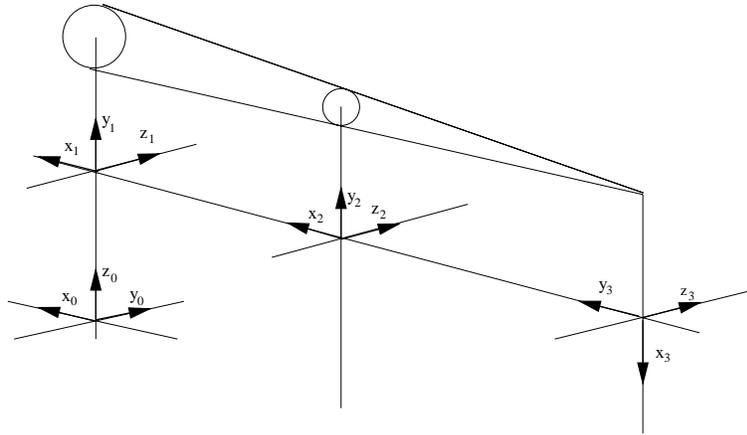


Figura 2.4: Sistemas de eixos coordenados gráfico-2

Definidos os sistemas de eixos e determinados os parâmetros das juntas facilmente, com o visto na subsecção anterior, chegamos às matrizes de transformação, função dos ângulos de rotação θ_i .

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & 0 & \Leftrightarrow \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & \Leftrightarrow \sin(\theta_2) & 0 & \Leftrightarrow \text{anca} * \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & \Leftrightarrow \text{anca} * \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & \Leftrightarrow \sin(\theta_3) & 0 & \text{canela} * \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & \text{canela} * \sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para terminar note-se que, uma coisa são os ângulos θ_i formados pelo *segmento_i* e *segmento_{i-1}* e em função dos quais se definem as matrizes de transformação entre sistemas de eixos. Outra coisa são os ângulos β_i da figura ?? que permitem raciocinar numa forma mais fácil e intuitiva sem nos termos de preocupar com os referenciais das juntas. Naturalmente que para cada valor de β_i existe um θ_i correspondente. Os esquemas seguintes (??) ilustram essa relação.

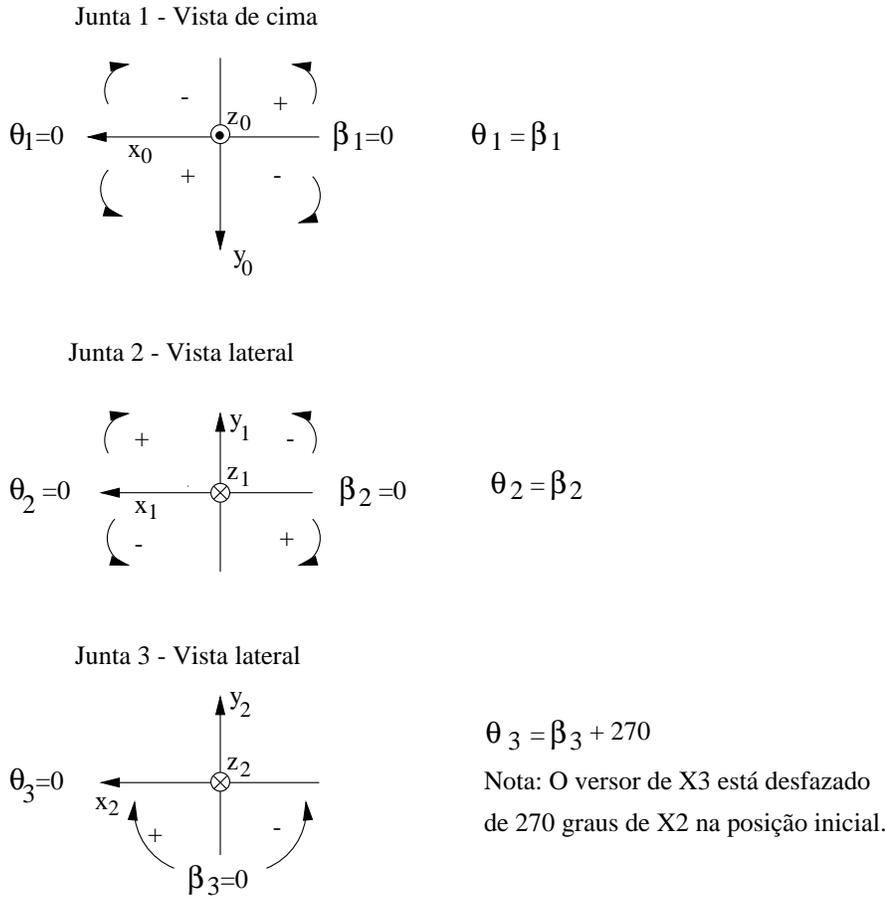


Figura 2.5: Ângulos β e θ de cada junta

2.2.3 Integração do conjunto. Modelo cinemático do robô.

Na subsecção anterior utilizámos a aproximação de Denavit-Hartenberg de forma a obter um modelo matemático da perna que permitisse resolver o problema da cinemática directa. Para isso definimos quatro sistemas de eixos aos quais correspondem três matrizes de transformação, função de cada um dos graus de liberdade possíveis. Considerámos o *sistema*₀ fixo e que a matriz ${}^{i-1}A_i$ (com $i=1,2,3$) mapeava as coordenadas cartesianas, definidas no *sistema* _{i} , nos valores correspondentes do *sistema* _{$i-1$} . Desta forma, para cada trio de ângulos de rotação podemos conhecer a posição de qualquer ponto da perna em relação ao *sistema*₀, em particular a extremidade de apoio.

No entanto o problema não fica por aqui. O HEG é constituído não por

uma mas por seis pernas mais um corpo central. O corpo central pode-se descrever como um prisma hexagonal com duas pirâmides, também hexagonais, assentes sobre os topos do prisma. Para fins de análise vamos considerar uma geometria perfeitamente simétrica. Servindo-nos dos estudos já feitos vamos tentar integrar todos estes elementos.

O primeiro problema consiste em, estudadas que estão as pernas, como definir a sua posição relativa. Por outras palavras, onde colocar a origem do $sistema_0$ de cada membro. Para isso é de toda a conveniência começar por definir um referencial central do robô posicionado no centro do corpo. O facto de considerarmos um sistema de eixos central não só facilita a colocação relativa dos membros, como também simplifica a descrição do movimento do robô, como um todo, em relação a um referencial inercial (trajectórias, etc). Assim, convencionámos o sistema de eixos da figura. A disposição dos eixos não segue nenhuma regra particular, utilizámos aquela que nos pareceu facilitar mais as coisas.

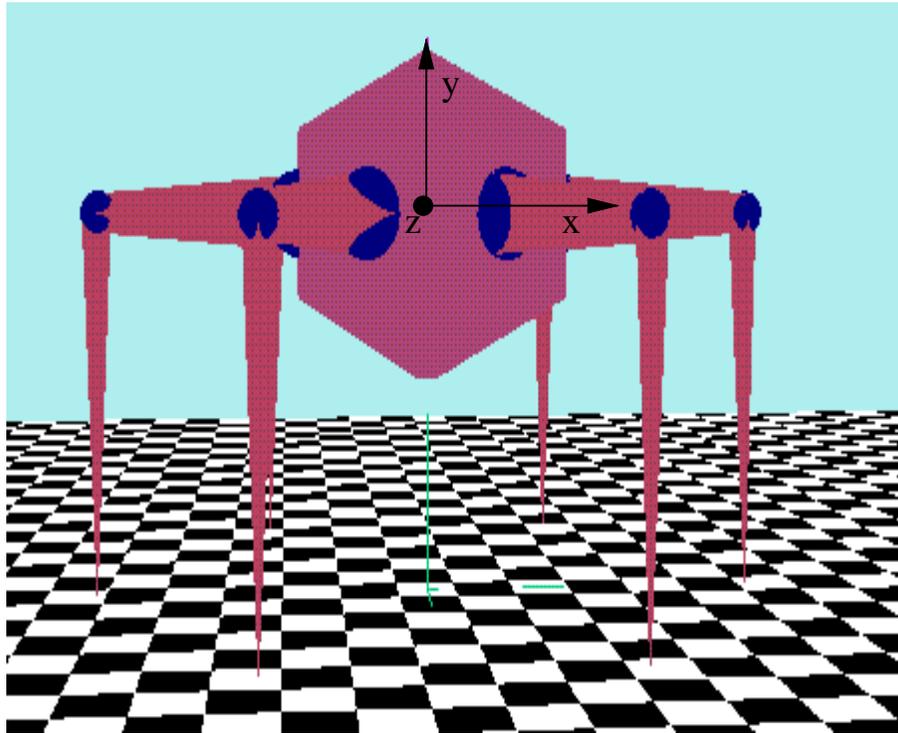


Figura 2.6: Eixo central do HEG

Para cada perna temos que ter uma matriz que transforme as coordenadas do seu $sistema_0$ nos valores equivalentes do $sistema_{central}$. Por outras

palavras, que especifique a posição dos versores do $sistema_0$ segundo as coordenadas do $sistema_{central}$. Fazamos um corte transversal no corpo do robô. Obtemos um hexágono que pode ser contido numa circunferência de raio R .

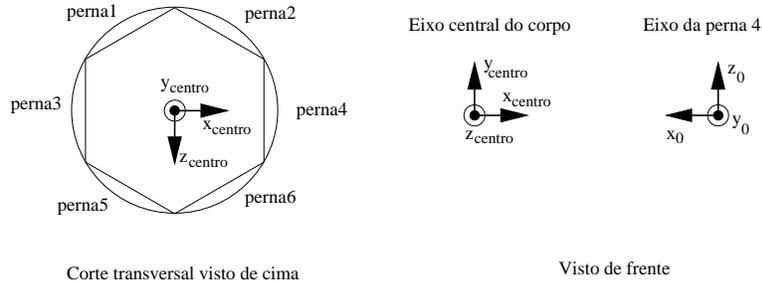


Figura 2.7: Montagem corpo-perna4

Repare-se no sistema de eixos da base da perna 4. Ele encontra-se rodado, em relação ao sistema central, de 90 graus segundo X e 180 graus segundo Y_0 . Já o sistema base da perna 2 sofre uma rotação adicional de γ_4 em torno de Z_0 . Em resumo, dado uma $perna_i$, o seu referencial base sofre

1. Uma rotação de 90 graus em torno do eixo X
2. Uma rotação de 180 graus à volta do eixo Y_0 .
3. Uma rotação adicional de γ_i em torno de Z_0 .

A seguir temos um diagrama com os valores de γ_i para cada perna.

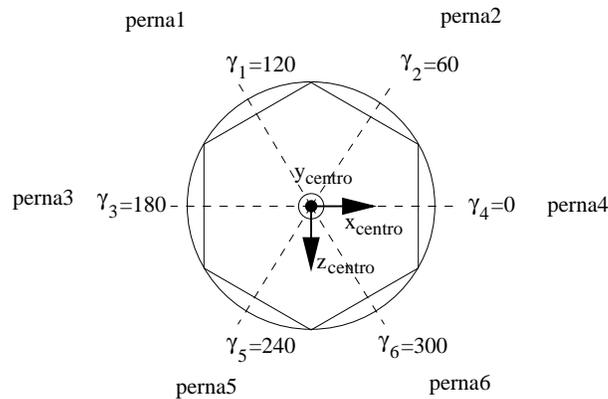


Figura 2.8: Local e valor do ângulo em que cada perna é inserida.

A matriz de transformação (sem componente translacional) das coordenadas no *sistema*₀ da *perna*_i é dado por:

$$\begin{aligned}
 {}_{central}A_{0i} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Leftrightarrow 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Leftrightarrow 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Leftrightarrow 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\gamma_i) & \Leftrightarrow \sin(\gamma_i) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma_i) & \cos(\gamma_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \Leftrightarrow \cos(\gamma_i) & \sin(\gamma_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin(\gamma_i) & \cos(\gamma_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Note-se que ainda falta considerar a componente translacional. Qualquer que seja a perna que estejamos a considerar, as coordenadas do vector de translação definidas no sistema central hão-de ter y=0. Precisamos então de calcular x e z. Seja (x_i, y_i, z_i) o vector de posição do referencial base da *perna*_i. Então temos:

$$\begin{aligned}
 x_i &= dist * \cos(\gamma_i) \\
 y_i &= 0 \\
 z_i &= \Leftrightarrow dist * \sin(\gamma_i)
 \end{aligned}$$

Atenção que *dist* é diferente de *R*. Se repararmos ...

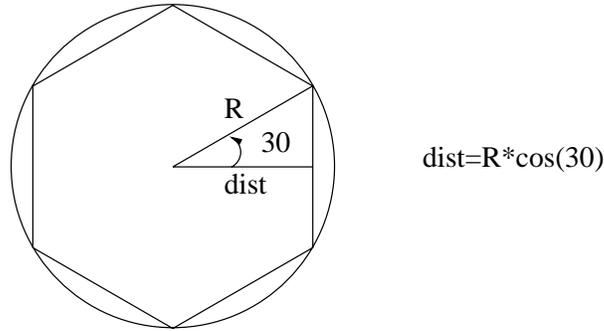


Figura 2.9: Raio real (dist) de encaixe da perna no corpo.

A matriz final de transformação, com o apurado anteriormente, há-de ser:

$${}_{central}A_{0i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dist * \cos(\gamma_i) \\ 0 & 0 & \Leftrightarrow 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Leftrightarrow dist * \sin(\gamma_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Leftrightarrow \cos(\gamma_i) & \sin(\gamma_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin(\gamma_i) & \cos(\gamma_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \Leftrightarrow \cos(\gamma_i) & \sin(\gamma_i) & 0 & dist * \cos(\gamma_i) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin(\gamma_i) & \cos(\gamma_i) & 0 & \Leftrightarrow dist * \sin(\gamma_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para o estudo da cinemática directa ficar concluído resta determinar a relação entre o *sistema*_{inercial} e o *sistema*_{central}. Note-se que corpo do robô tem todos os graus de liberdade podendo ter movimento de translação e rotação ao longo e em torno, respectivamente, dos três eixos inerciais. Assim, se (R_x, R_y, R_z) for a posição do centro de massa do corpo em cada instante e (ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z) os ângulos de rotação à volta de cada um dos eixos, a matriz de transformação *inercia* $A_{central}$ terá de ser função daqueles parâmetros. Considerando a ordem de rotação X, Z, Y vem a seguinte matriz onde C e S significam cos e sin respectivamente.

$$\begin{aligned} & \textit{inercial} A_{central} = \\ & = \begin{bmatrix} C(\phi_y)C(\phi_z) & S(\phi_y)S(\phi_x) \Leftrightarrow C(\phi_y)S(\phi_z)C(\phi_x) & & \\ S(\phi_z) & & C(\phi_z)C(\phi_x) & \\ \Leftrightarrow C(\phi_y)S(\phi_z) & S(\phi_y)S(\phi_z)C(\phi_x) + C(\phi_y)S(\phi_x) & & \\ 0 & & 0 & \\ & C(\phi_y)S(\phi_z)S(\phi_x) + S(\phi_y)C(\phi_x) & R_x & \\ & \Leftrightarrow C(\phi_z)S(\phi_x) & R_y & \\ & C(\phi_y)C(\phi_x) \Leftrightarrow S(\phi_y)S(\phi_z)S(\phi_x) & R_z & \\ & 0 & & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.3 Cinemática inversa

2.3.1 Introdução

Como já foi descrito, o problema da cinemática inversa é o de achar os ângulos de rotação de forma a que, dado um ponto genérico $p(p_x, p_y, p_z)$ definido no *sistema*₀, a perna, caso seja possível, aí posicione o sua extremidade de apoio.

Este problema é de grande importância para a locomoção do robô, permitindo delinear técnicas baseadas, não no fornecimento de trios sucessivos de ângulos, mas na definição de pontos de apoio para cada membro. Desta forma a aplicação da cinemática inversa, associada a um estudo de trajectória de rotação do membro, cria a sequência de trios de ângulos automaticamente.

Para a resolução deste problema existem diversos métodos complexos, como sejam o da transformada inversa [2], screw algebra[3], dual matrices[4],

dual quaternion [5], iterativo [6] e aproximação geométrica [7]. Estas técnicas são normalmente aplicadas a manipuladores como o PUMA com seis ou mais graus de liberdade. Verifica-se que nestas situações o problema é indeterminado, existindo mais que uma combinação de ângulos que posiciona correctamente a extremidade do braço. Assim, os métodos normalmente descritos na literatura sobre manipuladores, fornecem mais que uma solução, sendo muitas vezes complicado escolher a mais adequada.

Ao contrário do que fizemos para o caso da cinemática directa, decidimos não nos basear nas técnicas utilizadas nos manipuladores. Isto porque, dado a perna só ter três graus de liberdade, o problema torna-se bastante mais simples e a solução deixa de ser indeterminada para passar a ser única.

Em seguida explicamos o algoritmo que concebemos para a resolução do problema.

2.3.2 Algoritmo utilizado

Consideremos um ponto $p(p_x, p_y, p_z)$ cujas coordenadas estão especificadas em função do referencial base da perna $sistema_0$

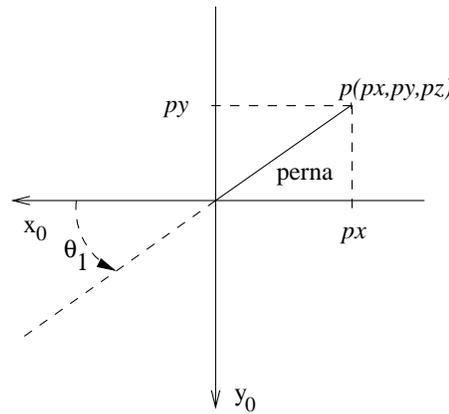


Figura 2.10: Vista de cima da perna.

Dado os membros só terem um grau de liberdade na horizontal, a perna, vista de cima, pode-se analisar como um segmento de recta que roda em torno da origem ($junta_1$). Dada esta particularidade do problema, que o simplifica bastante, verifica-se que, de forma a podermos posicionar o ponto de apoio em $p(p_x, p_y, p_z)$, o ângulo de rotação na horizontal (θ_1) é único e igual a $arctg(\frac{p_y}{p_x}) = arctg(p_y, p_x)$. Naturalmente que se θ_1 estiver fora dos limites de rotação fisicamente possíveis o problema não tem solução.

$$\begin{cases} \theta_1 = \arctan \frac{p_y}{p_x} \\ \sin(\theta_1) = \Leftrightarrow \frac{p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \\ \cos(\theta_1) = \Leftrightarrow \frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \end{cases}$$

De seguida calculemos as coordenadas do ponto objectivo em relação ao *sistema*₁. Para obter $p(p_{x1}, p_{y1}, p_{z1})$ basta multiplicar $p(p_x, p_y, p_z)$ pela inversa da matriz 0A_1 , função de θ_1 . Naturalmente que p_{z1} há-de ser nulo.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ p_{z1} \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \Leftrightarrow \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ p_{z1} \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} & \frac{-p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} & \frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ p_{z1} \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Leftrightarrow \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \\ p_z \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

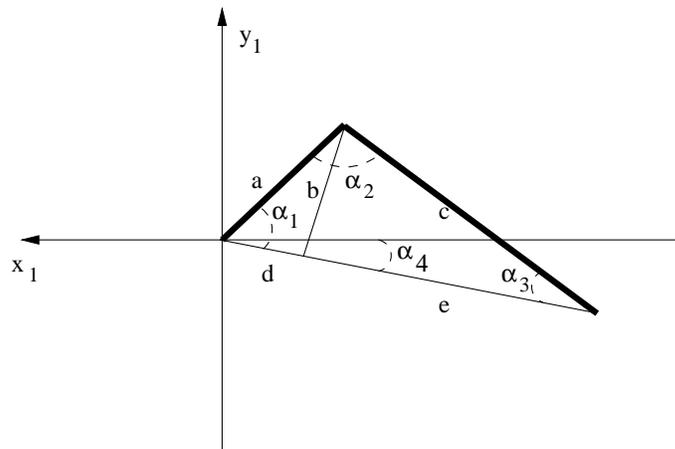


Figura 2.11: A perna em relação ao referencial₁

Observando a figura anterior constatamos que os dois segmentos da perna (anca e canela), juntamente com o vector de posição do ponto, formam um triângulo. Vamos utilizar alguns conceitos elementares de geometria e trigonometria para determinar os ângulos internos desse triângulo. Um dos recursos é o conhecido teorema de Pitágoras.

$$\begin{cases} a^2 = d^2 + b^2 \\ c^2 = e^2 + b^2 \\ p = d + e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = a^2 - d^2 \\ c^2 = e^2 + a^2 - d^2 \\ p = d + e \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} c^2 = e^2 + a^2 - d^2 \\ p = d + e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 = e^2 + a^2 - d^2 \\ e = p - d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 = (p - d)^2 + a^2 - d^2 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 = p^2 - 2pd + a^2 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2pd = p^2 + a^2 - c^2 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{p^2 + a^2 - c^2}{2p} \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{p^2 + a^2 - c^2}{2p} \\ e = \frac{p^2 - a^2 + c^2}{2p} \end{cases} \end{aligned}$$

Determinados 'd' e 'e' vamos calcular os ângulos internos do triângulo tendo em atenção que os seu valores variam entre 0 e π .

Assim, sendo 'a' e 'c' os comprimentos da anca e da canela e $p = d + e = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$, vem que

$$\begin{cases} \alpha_1 = \arccos\left(\frac{d}{a}\right) = \arccos\left(\frac{a^2 - c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2a\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}\right) \\ \alpha_2 = \pi \Leftrightarrow \alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_3 \\ \alpha_3 = \arccos\left(\frac{e}{c}\right) = \arccos\left(\frac{-a^2 + c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}\right) \end{cases}$$

Se considerarmos um ângulo α_4 a variar entre $\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ tal que

$$\begin{cases} \alpha_4 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) = \arctan\left(\Leftrightarrow \frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) \end{cases}$$

Concluimos que

$$\begin{cases} \theta_2 = \Leftrightarrow(\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_4) = \Leftrightarrow(\arccos\left(\frac{a^2 - c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2a\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}\right) \Leftrightarrow \arctan\left(\Leftrightarrow \frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)) \\ \theta_3 = 2\pi \Leftrightarrow \alpha_2 = \pi + \arccos\left(\frac{a^2 - c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2a\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}\right) + \arccos\left(\frac{-a^2 + c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}\right) \end{cases}$$

Em resumo, da mesma forma que a cada trio de ângulos $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ corresponde um e um só ponto de posicionamento da extremidade, também a cada ponto (p_x, p_y, p_z) corresponde um e um só trio de ângulos (considerando a concavidade da perna sempre virada para baixo o que é um pressuposto mais do que razoável). O facto desta função ser injectiva vai-se mostrar muito conveniente em aplicações futuras.

2.3.3 Relação entre as grandezas cinemáticas lineares e angulares

No decurso do desenvolvimento e trabalho com robôs com pernas vai ser frequente querermos que a extremidade da perna se mova numa dada direcção com um certa velocidade. No entanto, não nos podemos esquecer que a actuação é feita através dos motores das juntas. Neste contexto temos que forçosamente trabalhar com grandezas cinemáticas angulares. Torna-se assim vital conseguir determinar, para uma dada velocidade vectorial da ponta da perna, as respectivas velocidades angulares das juntas.

Consideremos as coordenadas definidas em relação ao referencial base da perna - *sistema*₀. Naturalmente que, no caso das grandezas serem fornecidas noutra referencial, facilmente conseguiremos fazer a conversão utilizando as matrizes de transformação adequadas.

Quando analisámos a questão da cinemática directa concluímos que, dado um trio de ângulos $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, podíamos fazer-lhe corresponder a posição da extremidade da perna (p_x, p_y, p_z) . Definimos assim uma função vectorial - F - cujo domínio são os ângulos das juntas e o contradomínio as respectivas posições da extremidade.

Ao resolver o problema da cinemática inversa chegámos à conclusão de que F era uma função injectiva e, conseqüentemente, podíamos definir uma função inversa - F^{-1} - que a cada ponto fizesse corresponder um trio de ângulos.

$$\begin{cases} (p_x, p_y, p_z) = F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ p_x = F_x(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ p_y = F_y(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ p_z = F_z(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = F^{-1}(p_x, p_y, p_z) \\ \theta_1 = F_{\theta_1}^{-1}(p_x, p_y, p_z) \\ \theta_2 = F_{\theta_2}^{-1}(p_x, p_y, p_z) \\ \theta_3 = F_{\theta_3}^{-1}(p_x, p_y, p_z) \end{cases}$$

Trabalhando agora a ultima função, e assumindo que a posição da extremidade da perna varia com o tempo, verificamos que, de acordo com as regras de derivação compostas:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{dF_{\theta_1}^{-1}(p_x(t), p_y(t), p_z(t))}{dt} = \frac{\partial F_{\theta_1}^{-1}}{\partial p_x} \frac{dp_x}{dt} + \frac{\partial F_{\theta_1}^{-1}}{\partial p_y} \frac{dp_y}{dt} + \frac{\partial F_{\theta_1}^{-1}}{\partial p_z} \frac{dp_z}{dt} \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \frac{dF_{\theta_2}^{-1}(p_x(t), p_y(t), p_z(t))}{dt} = \frac{\partial F_{\theta_2}^{-1}}{\partial p_x} \frac{dp_x}{dt} + \frac{\partial F_{\theta_2}^{-1}}{\partial p_y} \frac{dp_y}{dt} + \frac{\partial F_{\theta_2}^{-1}}{\partial p_z} \frac{dp_z}{dt} \end{aligned}$$

$$\frac{d\theta_3}{dt} = \frac{dF_{\theta_3}^{-1}(p_x(t), p_y(t), p_z(t))}{dt} = \frac{\partial F_{\theta_3}^{-1}}{\partial p_x} \frac{dp_x}{dt} + \frac{\partial F_{\theta_3}^{-1}}{\partial p_y} \frac{dp_y}{dt} + \frac{\partial F_{\theta_3}^{-1}}{\partial p_z} \frac{dp_z}{dt}$$

Definindo o vector velocidade linear como - $V(v_x, v_y, v_z) = (\frac{dp_x}{dt}, \frac{dp_y}{dt}, \frac{dp_z}{dt})$ - e o trio de velocidades angulares como - $\Omega(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\frac{d\theta_1}{dt}, \frac{d\theta_2}{dt}, \frac{d\theta_3}{dt})$ - temos a relação pretendida. Usando a noção de Jacobiano de uma função vectorial rescrevemos as relações anteriores como:

$$\Omega = J_{F^{-1}}(p_x, p_y, p_z) * V$$

O calculo da matriz Jacobiana permite ainda estabelecer uma relação similar entre as acelerações linear e angulares.

Capítulo 3

Dinâmica

3.1 Introdução

As vantagens da locomoção com pernas foram exaustivamente descritas no capítulo 1 deste documento. Muito do trabalho realizado até agora na área debruçou-se sobre a navegação em superfícies suaves, tendo sido criados alguns protótipos e tiradas muitas conclusões (“gait” óptima, relações entre parâmetros cinemáticos, estabilidade, etc). Os grandes desafios da actualidade põem-se com os pisos irregulares, agrestes e desconhecidos onde se ambiciona vir a operar com este tipo de máquinas.

Caminhar em terreno natural levanta um conjunto de problemas variados e complexos, como sejam a alternância de carga nos pontos de apoio, fixação e escorregamento das extremidades, colocação dos pés em superfícies com declives e obstáculos, estabilidade do veículo, etc. Assuntos estes que têm de ser tidos em conta, não só na construção e desenvolvimento das estruturas mecânicas, como também na elaboração de sistemas de controlo e pilotagem. Dificilmente estas questões virão a ser convenientemente ultrapassadas sem uma modelização física e matemática das situações. A elaboração de modelos, com maior ou menor aproximação, permitirá não só estudos de simulação e elaboração de algoritmos de controlo, como também a aquisição de um certo conhecimento e sensibilidade sobre os sistemas, que é sempre útil no desenvolvimento e tomadas de decisão.

Este tipo de abordagem é difícil exigindo, entre outras coisas, uma grande multidisciplinidade. Os conhecimentos de física e matemática necessários para este trabalho saiem muitas vezes da formação geral dada em engenharia electrotécnica. Daí que, embora tenhamos desenvolvido todos os esforços para tentar dominar estas áreas, consultando inclusive alguns especialistas, o nosso formalismo possa parecer algo primário e ingénuo.

Antes de iniciarmos este projecto fizemos, como é de toda a conveniência, uma pesquisa em relação aos trabalhos de desenvolvimento na área. Esta investigação teve como intuito, entre outras coisas, encontrar ideias que nos auxiliassem. No entanto, da informação que recolhemos, pouca ou nenhuma ajuda conseguimos sobre a questão da modelização dinâmica. Ficámos com a sensação de que muitas vezes se foge ao problema, tentando esquemas de controlo baseados em informação recolhida através de sensores. É certo que esta abordagem tem uma série de vantagens, mais não seja a economia de esforço na modelização que, como veremos, não é um factor de somenos importância. Porém, quer por pretendermos construir um simulador, quer por, de acordo com o que dissemos acima, acreditarmos que a modelização, embora sendo um caminho mais difícil, permitirá melhores resultados, optámos por começar por fazer uma análise da dinâmica do HEG.

3.2 Estratégia e formulação dinâmica

O estudo iniciado neste capítulo, e desenvolvido nos capítulos subsequentes, tem como objectivo a obtenção de um modelo dinâmico (o cinemático já foi abordado) para a locomoção com pernas em terreno natural.

Dada a complexidade do problema vamos partir duma situação simplificada, confirmar a veracidade das ideias e resultados, e só depois evoluir para situações mais complexas.

Assim, começaremos por trabalhar num modelo planar (2D), considerando um robô só com duas pernas. A superfície sobre a qual se realiza o movimento terá configuração plana. A interacção com o solo será modelizada através de reacções normais e forças de atrito que, ao serem incorporadas, conduzirão a um sistema não conservativo. O atrito nas juntas será considerado desprezável. Analisaremos só a estrutura mecânica não nos preocupando com actuação dos motores, ou seja, estes estarão desligados e destravados. Naturalmente que todas as formulações feitas durante esta fase serão elaboradas de forma a poderem vir a ser expandidas para o caso subsequente mais complexo - a situação real a 3D com seis pernas.

Resta-nos falar sobre o método utilizado para a derivação das equações dinâmicas. Em robótica utilizam-se basicamente dois tipos de formulação: Lagrange e Newton-Euler. Alguma literatura também refere abordagens baseadas no Princípio d'Alembert e da Dinâmica de Kane de que não falaremos neste documento.

A abordagem de Lagrange baseia-se nos princípios de energia dos corpos. Tem a vantagem de trabalhar sobre grandezas escalares e, ao ser aplicada a estruturas complexas, tratar implicitamente as forças de ligação entre os

elementos constituintes dessa estrutura. Computacionalmente, e envolvendo matrizes homogêneas 4×4 , torna-se dispendiosa em termos de somas e multiplicações a executar, sendo ineficiente para a resolução de problemas de dinâmica inversa e aplicações de controlo em tempo real (embora existam algoritmos recursivos para minorar esta deficiência). Em contrapartida tem um nível de abstracção tal que permite a aplicação a varias configurações através da variação dos diferentes parâmetros geométricos, característica muito útil aquando da concepção das estruturas mecânicas. O método de Lagrange é provavelmente a técnica mais frequentemente usada na resolução de problemas dinâmicos de robótica.

Alternativamente, existe a formulação de Newton-Euler, que aplica directamente as equações vectoriais da dinâmica a cada segmento da estrutura. O sistema de equações, em relação a um determinado referencial, é obtido juntando as equações locais dos segmentos. A aproximação de Newton-Euler, dado trabalhar com grandezas vectoriais e tratar explicitamente as forças de ligação, bem como forças inerciais e de Coriolis, torna-se mais difícil de aplicar a estruturas complexas. Tem a vantagem de, utilizando técnicas recursivas, ser bem mais económica computacionalmente, quer no problema directo quer inverso, sendo por isso muitas vezes usada para fins de controlo em tempo real.

A metodologia explanada no capítulo seguintes não se pode enquadrar rigidamente em nenhuma destas técnicas, indo buscar inspiração a ambas (em particular à de Newton-Euler). Pode-se descrever como uma aplicação das leis fundamentais da dinâmica de translação e rotação do corpo rígido ao caso particular da estrutura do HEG. Longe de obtermos uma formulação geral e flexível, pretendemos uma particularização que se adapte bem ao nosso robô e ao estudo cinemático já feito. Embora não tão sofisticada como as abordagens referidas, julgamos ter a vantagem de ser muito mais intuitiva e fácil de compreender, permitindo um melhor entendimento do sistema a trabalhar, o que constitui um dos nosso objectivos.

Subsequentemente aplicaremos a metodologia de Lagrange. Com isto pretendemos ter uma outra perspectiva do problema tentando obter as equações de estado do sistema, bem como realçar eventuais forças e fraquezas da metodologia inicial.

Capítulo 4

Modelização dinâmica do caso simplificado 2D usando Diagrama de Corpo Livre

4.1 Introdução

Como já referimos no capítulo anterior vamos tentar aplicar uma abordagem um pouco diferente dos trabalhos realizados de que temos conhecimento. Começaremos pela análise dum caso simplificado a duas dimensões (2D). Numa primeira fase consideraremos os motores desactivados preocupado-nos somente com as equações da estrutura bem como a sua interacção com um solo rígido e plano.

4.2 Modelo cinemático para o caso 2D

Vamos começar por adaptar as matrizes de transformação 3D deduzidas anteriormente para a situação 2D.

Note-se que neste modelo simplificado só temos as pernas 3 e 4. A translação só é possível sobre o plano XOY e as rotações são exclusivamente feitas em torno de Z.

$${}^{inercial}A_{central}(R_x, R_y, \phi_z) = \begin{bmatrix} \cos(\phi_z) & \sin(\phi_z) & R_x \\ \sin(\phi_z) & \cos(\phi_z) & R_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trabalhando a 2D perdemos um grau de liberdade na mobilidade das pernas. Qualquer que seja a perna temos que $\theta_1 = 0$. Deste modo sabemos que a matriz de transformação entre o *sistema*_{base} e o *sistema*₁ é con-

stante dado o objecto ou argumento da função não variar. Assim, temos que ${}^{central}A_1(\gamma_i) = {}^{central}A_{base} * {}^{base}A_1(0)$ para cada *perna*_{*i*} (*i*=3,4).

$${}^{central}A_1(\gamma_i) = \begin{bmatrix} \Leftrightarrow \cos(\gamma_i) & 0 & dist * \cos(\gamma_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \gamma_3 = 180 \\ \gamma_4 = 0 \end{cases}$$

Calculemos agora as duas matrizes de transformação que faltam

$${}^1A_2(\theta_{2i}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{2i}) & \Leftrightarrow \sin(\theta_{2i}) & \Leftrightarrow anca * \cos(\theta_{2i}) \\ \sin(\theta_{2i}) & \cos(\theta_{2i}) & \Leftrightarrow anca * \sin(\theta_{2i}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3(\theta_{3i}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{3i}) & \Leftrightarrow \sin(\theta_{3i}) & canela * \cos(\theta_{3i}) \\ \sin(\theta_{3i}) & \cos(\theta_{3i}) & canela * \sin(\theta_{3i}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

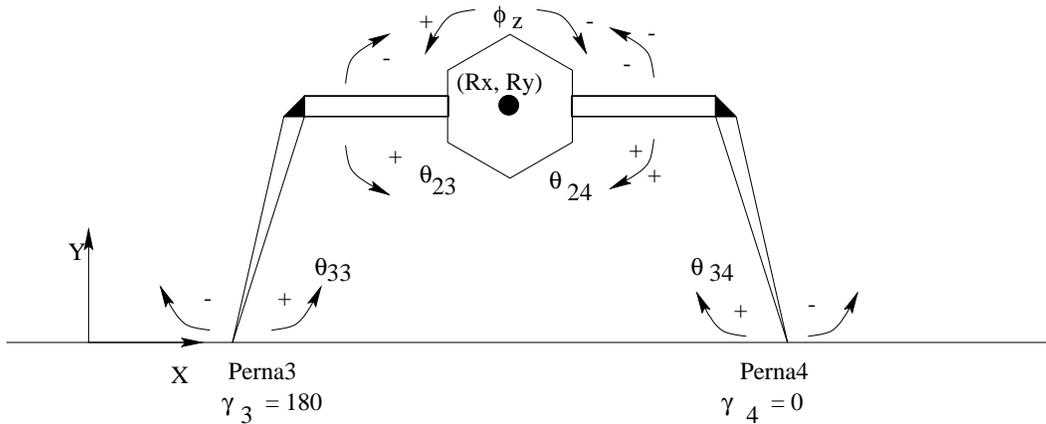


Figura 4.1: Cinemática - variáveis independentes.

4.3 Algumas considerações iniciais

A primeira questão que se põe é a seguinte: Com tantos referenciais, em relação a qual vamos deduzir as equações? Como forma de fugir a transformações complexas entre sistemas, muitas vezes envolvendo forças inerciais,

decidimos optar por deduzir tudo em relação a um referencial inercial fora do robô. Naturalmente que esta escolha tem uma série de inconvenientes, nomeadamente a necessidade de uma aproximação menos sistemática e mais heurística. Mas como já referimos, a generalidade da formulação não é uma coisa que nos preocupe nesta fase.

Vamos trabalhar com os conceitos da dinâmica do corpo rígido. Numa situação 2D, a posição dum sólido é univocamente fornecida pelas coordenadas do seu centro de massa e por um ângulo de rotação em torno de Z. Vamos considerar os componentes da estrutura do HEG como sólidos geométricos simétricos e de densidade constante, de forma a facilitar o cálculo dos centros de massa e momentos de inércia em torno de um eixo.

Para cada corpo constituinte a translação do centro de massa é regida pelo teorema do movimento do centro de inercia. A inercia do corpo é expressa através da sua massa M. Definindo as forças exteriores como (F_x^{ext}, F_y^{ext}) e a aceleração do centro de massa como (a_x, a_y) vem:

$$\begin{cases} \sum F_x^{ext} = M * a_x \\ \sum F_y^{ext} = M * a_y \end{cases}$$

A rotação em torno do centro de massa é descrita com base no teorema da variação do momento angular.

$$\begin{cases} \vec{M}_z = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} \\ M_z = I_{CM} * \gamma \end{cases}$$

Onde M_z , I_{CM} e γ são respectivamente o momento das forças, o momento de inercia e a aceleração angular computados para o eixo dos Z a passar pelo centro de massa (CM). Uma relação que pode ser útil, no caso de ser mais fácil calcular os momentos de força em relação a outro ponto que não o CM, é a dos momentos de inercia. Dado um momento de inercia I_{CM} , para a rotação em torno de um eixo que passe pelo CM, o momento de inercia I_P definido para um eixo paralelo ao primeiro mas a passar por um ponto P é dado por:

$$I_P = I_{CM} + M.d^2 \text{ (d - distancia entre os eixos paralelos)}$$

4.4 Obtenção do sistema de equações

4.4.1 Pontos a considerar no robô

O esquema seguinte indica os pontos na estrutura mecânica onde são aplicadas forças. As coordenadas são expressas em relação ao referencial inercial

assinalado. Para a determinação dos braços para a computação dos momentos de forças basta-nos, como iremos ver, fazer subtrações entre os vectores indicados. Em resumo, estes são os únicos pontos cujas coordenadas são relevantes para a resolução do problema.

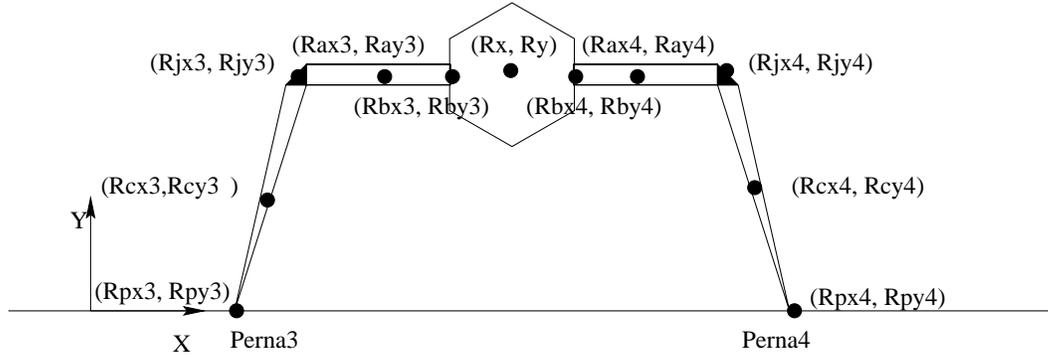


Figura 4.2: Pontos no Robô.

Coordenadas do robô	
Coordenadas	Descrição
(R_x, R_y)	Centro de massa do corpo
(R_{axi}, R_{ayi})	Centro de massa da anca ($perna_i$)
(R_{cxi}, R_{cyi})	Centro de massa da canela ($perna_i$)
(R_{bxi}, R_{byi})	Junção com o corpo($perna_i$)
(R_{jxi}, R_{jyi})	Junção da anca com a canela ($perna_i$)
(R_{pxi}, R_{pyi})	Extremidade de apoio ($perna_i$)

4.4.2 Diagramas de corpo livre e forças aplicadas

O diagrama de corpo livre é um formalismo utilizado na engenharia mecânica em geral e na dinâmica do corpo rígido em particular. Dada uma estrutura mais ou menos complexa, começamos por a dividir nos seus componentes principais - no nosso caso um corpo central, duas ancas e duas canelas. Feito isto indicamos, para cada elemento, as forças exteriores aplicadas. Naturalmente que nos pontos de ligação com outros componentes estaremos a indicar forças interiores ao sistema total. Na nossa situação, e dado não considerarmos atrito nas juntas, as forças de tensão estão nesta situação. Para terminar determinamos as equações de translação e de rotação. O conjunto das expressões obtidas será o sistema de equações dinâmicas da estrutura.

A seguir enunciamos o diagrama de corpos livres.

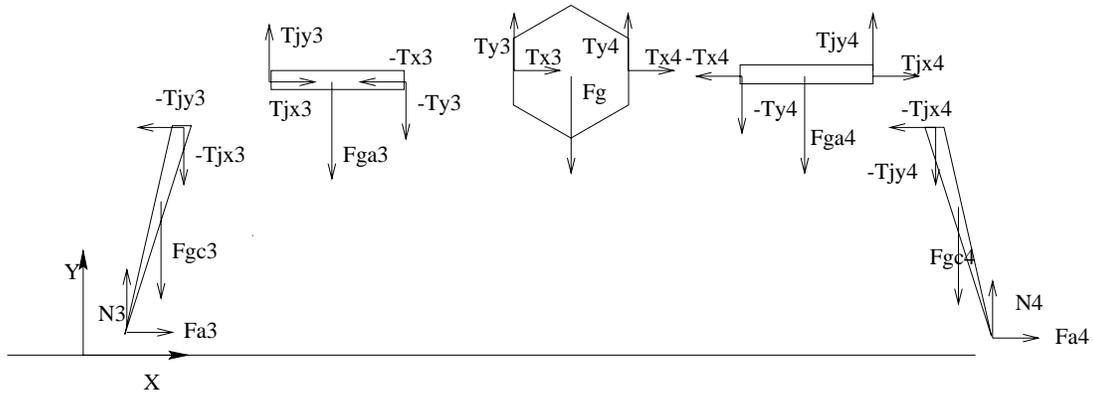


Figura 4.3: Diagrama de Corpos Livres.

Legenda do diagrama de corpos livres	
Forças	Descrição
(F_g)	Força gravítica sobre o corpo
(F_{gai})	Força gravítica sobre a anca(<i>perna_i</i>)
(F_{gci})	Força gravítica sobre a canela (<i>perna_i</i>)
(N_i)	Reacção normal do solo na extremidade de apoio(<i>perna_i</i>)
(F_{ai})	Força de atrito(<i>perna_i</i>)
(T_{xi}, T_{yi})	Tensão na junção anca-corpo(<i>perna_i</i>)
(T_{bxi}, T_{byi})	Tensão na junta anca-canela(<i>perna_i</i>)

Considerando outra vez o conjunto e eliminando as forças interiores.

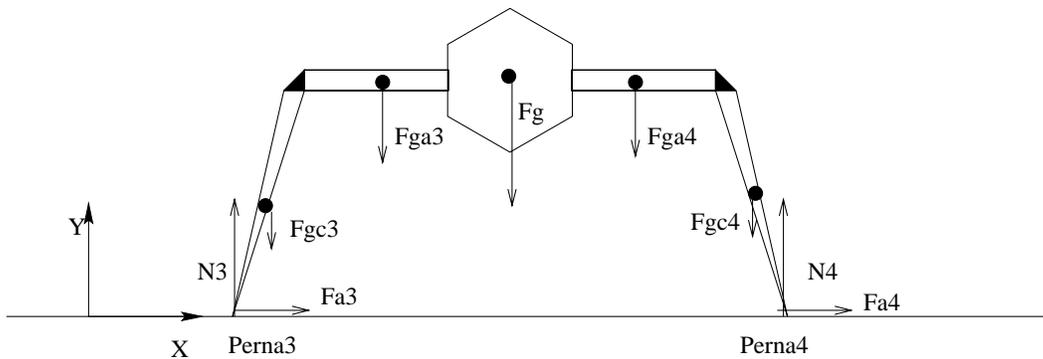


Figura 4.4: Forças exteriores.

Antes de passarmos à dedução das equações note-se que nem sempre o eixo de rotação coincide com o eixo dos Z do referencial inercial. Nomeadamente,

no caso da perna 4, o sentido de rotação, de acordo com o modelo cinemático, é inverso ao normal. De forma a criar um norma vamos calcular os momentos de força sempre em relação ao eixos do referencial inercial. Resolvemos o problema da não coincidência do eixo de rotação com o sistema de referência determinando as coordenadas do versor do primeiro em função do segundo. O valor do momento necessário à determinação da aceleração angular é obtido fazendo a projecção do vector sobre o versor usando o produto interno.

No nosso caso concreto determinamos os momentos sempre em torno de Z e utilizamos os seguintes versores.

$$\begin{cases} \text{vers}_3 = \vec{u}_z \\ \text{vers}_4 = \Leftrightarrow \vec{u}_z \end{cases}$$

Como neste caso simplificado só estamos a considerar rotação em torno de Z podemos abandonar a notação de vector e fazer simplesmente ...

$$\begin{cases} \text{vers}_3 = 1 \\ \text{vers}_4 = \Leftrightarrow 1 \end{cases}$$

Esta metodologia vai facilitar a expansão da técnica para problemas maiores, nomeadamente a estrutura tridimensional.

4.4.3 Primeira tentativa para estabelecer as equações

Corpo principal

Comecemos pelo corpo principal. De acordo com a figura 3 as coordenadas do seu centro de massa são dadas por (R_x, R_y) . Sendo assim, se considerarmos uma massa inercial “ m_{cp} ” e a aceleração gravítica “ g ”, as equações de translação serão

$$\begin{cases} m_{cp} \frac{d^2 R_x}{dt^2} = T_{x3} + T_{x4} \\ m_{cp} \frac{d^2 R_y}{dt^2} = T_{y3} + T_{y4} \Leftrightarrow m_{cp} g \end{cases}$$

O movimento de rotação é feito em torno do eixo dos Z. Considerando o momento de inercia “ I_{cp} ” e a posição angular “ ϕ_z ” calculamos o momento de forças (ver produto externo ou vectorial) em relação ao CM e estabelecemos a relação com a aceleração.

$$\begin{cases} M_{cp} = \sum_{i=3}^4 [(R_{bxi} \Leftrightarrow R_x) T_{yi} + (R_{byi} \Leftrightarrow R_y) T_{xi}] \\ I_{cp} \frac{d^2 \phi_z}{dt^2} = M_{cp} \end{cases}$$

Anca da perna_i

Mais uma vez, e olhando para a figura 3, a dedução das equações de dinâmica é absolutamente trivial. Sendo “ m_a ” a massa inercial, igual para ambas as pernas vem

$$\begin{cases} m_a \frac{d^2 R_{axi}}{dt^2} = T_{jxi} \Leftrightarrow T_{xi} \\ m_a \frac{d^2 R_{ayi}}{dt^2} = T_{jyi} \Leftrightarrow T_{yi} \Leftrightarrow m_a g \end{cases}$$

As equações de rotação complicam-se um pouco. Começamos por, à semelhança do que fizemos para o corpo principal, calcular os momentos de força para a rotação em torno de um eixo paralelo ao eixo Z passando pelo CM. Para estabelecer a relação com a aceleração angular teremos que ter alguns cuidados. Primeiro temos que projectar o momento de forças no eixo de rotação adequado. Para isso basta fazer $vers_i * M$. Como iremos ver mais à frente, de forma a reduzir o numero de incógnitas no sistema, teremos toda a conveniência em relacionar os momentos de força com os ângulos definidos na modelização cinemática. Deste modo em vez de falarmos da posição angular do elemento trabalharemos com a diferença angular entre dois constituintes estruturais contíguos, neste caso a anca e o corpo. Assim

...

$$\begin{cases} M_{ai} = [(R_{bxi} \Leftrightarrow R_{axi})(\Leftrightarrow T_{yi}) + (R_{byi} \Leftrightarrow R_{ayi})(\Leftrightarrow T_{xi})] + \\ + [(R_{jxi} \Leftrightarrow R_{axi})T_{jyi} + (R_{jyi} \Leftrightarrow R_{ayi})T_{jxi}] \\ \frac{d^2 \theta_{2i}}{dt^2} = \frac{vers_i M_{ai}}{I_a} \Leftrightarrow \frac{vers_i M_{cp}}{I_{cp}} \end{cases}$$

Canela da perna_i

Observando a figura 3 e tendo em conta as considerações e convenções feitas para os casos anteriores facilmente deduzimos as equações.

Assim, se m_c for a massa inercial da canela e (R_{cx}, R_{cy}) forem as coordenadas do CM vem que

$$\begin{cases} m_c \frac{d^2 R_{cxi}}{dt^2} = F_{ai} \Leftrightarrow T_{jxi} \\ m_c \frac{d^2 R_{cxi}}{dt^2} = N_i \Leftrightarrow T_{jyi} \Leftrightarrow m_c g \end{cases}$$

As equações de rotação são deduzidas de forma similar ao caso da anca. Agora consideraremos a diferença angular entre a anca e a canela cujo valor inicial é 270.

$$\begin{cases} M_{ci} = [(R_{jxi} \Leftrightarrow R_{cxi})(\Leftrightarrow T_{jyi}) + (R_{jyi} \Leftrightarrow R_{cxi})(\Leftrightarrow T_{jxi})] + \\ + [(R_{pxi} \Leftrightarrow R_{cxi})N_i + (R_{pyi} \Leftrightarrow R_{cxi})F_{ai}] \\ \frac{d^2 \theta_{3i}}{dt^2} = \frac{vers_i M_{ci}}{I_c} \Leftrightarrow \frac{vers_i M_{ai}}{I_a} \end{cases}$$

Resumindo ...

Juntemos as equações e contemos as incógnitas ...

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{cp} \frac{d^2 R_x}{dt^2} = T_{x3} + T_{x4} \\ m_{cp} \frac{d^2 R_y}{dt^2} = T_{y3} + T_{y4} \Leftrightarrow m_{cp} g \\ m_a \frac{d^2 R_{ax3}}{dt^2} = T_{jx3} \Leftrightarrow T_{x3} \\ m_a \frac{d^2 R_{ay3}}{dt^2} = T_{jy3} \Leftrightarrow T_{y3} \Leftrightarrow m_a g \\ m_a \frac{d^2 R_{ax4}}{dt^2} = T_{jx4} \Leftrightarrow T_{x4} \\ m_a \frac{d^2 R_{ay4}}{dt^2} = T_{jy4} \Leftrightarrow T_{y4} \Leftrightarrow m_a g \\ m_c \frac{d^2 R_{cx3}}{dt^2} = F_{a3} \Leftrightarrow T_{jx3} \\ m_c \frac{d^2 R_{cy3}}{dt^2} = N_3 \Leftrightarrow T_{jy3} \Leftrightarrow m_c g \\ m_c \frac{d^2 R_{cx4}}{dt^2} = F_{a4} \Leftrightarrow T_{jx4} \\ m_c \frac{d^2 R_{cy4}}{dt^2} = N_4 \Leftrightarrow T_{jy4} \Leftrightarrow m_c g \\ M_{cp} = \sum_{i=3}^4 [(R_{bxi} \Leftrightarrow R_x) T_{yi} + (R_{byi} \Leftrightarrow R_y) T_{xi}] \\ I_{cp} \frac{d^2 \phi_z}{dt^2} = M_{cp} \\ M_{a3} = [(R_{bx3} \Leftrightarrow R_{ax3})(\Leftrightarrow T_{y3}) + (R_{by3} \Leftrightarrow R_{ay3})(\Leftrightarrow T_{x3})] + \\ + [(R_{jx3} \Leftrightarrow R_{ax3}) T_{jy3} + (R_{jy3} \Leftrightarrow R_{ay3}) T_{jx3}] \\ \frac{d^2 \theta_{23}}{dt^2} = \frac{vers_3 M_{a3}}{I_a} \Leftrightarrow \frac{vers_3 M_{cp}}{I_{cp}} \\ M_{a4} = [(R_{bx4} \Leftrightarrow R_{ax4})(\Leftrightarrow T_{y4}) + (R_{by4} \Leftrightarrow R_{ay4})(\Leftrightarrow T_{x4})] + \\ + [(R_{jx4} \Leftrightarrow R_{ax4}) T_{jy4} + (R_{jy4} \Leftrightarrow R_{ay4}) T_{jx4}] \\ \frac{d^2 \theta_{24}}{dt^2} = \frac{vers_4 M_{a4}}{I_a} \Leftrightarrow \frac{vers_4 M_{cp}}{I_{cp}} \\ M_{c3} = [(R_{jx3} \Leftrightarrow R_{cx3})(\Leftrightarrow T_{jy3}) + (R_{jy3} \Leftrightarrow R_{cy3})(\Leftrightarrow T_{jx3})] + \\ + [(R_{px3} \Leftrightarrow R_{cx3}) N_3 + (R_{py3} \Leftrightarrow R_{cy3}) F_{a3}] \\ \frac{d^2 \theta_{33}}{dt^2} = \frac{vers_3 M_{c3}}{I_c} \Leftrightarrow \frac{vers_3 M_{a3}}{I_a} \\ M_{c4} = [(R_{jx4} \Leftrightarrow R_{cx4})(\Leftrightarrow T_{jy4}) + (R_{jy4} \Leftrightarrow R_{cy4})(\Leftrightarrow T_{jx4})] + \\ + [(R_{px4} \Leftrightarrow R_{cx4}) N_4 + (R_{py4} \Leftrightarrow R_{cy4}) F_{a4}] \\ \frac{d^2 \theta_{34}}{dt^2} = \frac{vers_4 M_{c4}}{I_c} \Leftrightarrow \frac{vers_4 M_{a4}}{I_a} \end{array} \right.$$

Como se pode ver obtivemos 20 equações linearmente independentes. No entanto, contando as incógnitas temos: 5 ângulos ($\phi_z, \theta_{23}, \theta_{24}, \theta_{33}, \theta_{34}$); 11 pontos ($R_c, R_{a3}, R_{a4}, R_{c3}, R_{c4}, R_{b3}, R_{b4}, R_{j3}, R_{j4}, R_{p3}, R_{p4}$) o que faz 22 incógnitas; 4 forças de tensão (T_3, T_4, T_{j3}, T_{j4}) ou seja 8 incógnitas; 2 forças de atrito (F_{a3}, F_{a4}); 2 reacções normais (N_3, N_4); e 5 momentos de força ($M_{cp}, M_{a3}, M_{a4}, M_{c3}, M_{c4}$). Somando isto tudo verificamos ter 44 incógnitas. Parece que estamos com problemas!

4.4.4 Em busca dum sistema não singular

Dependências entre as incógnitas de posição

Note-se que devido a termos formulado as incógnitas com base nos diagramas de corpo livre considerámos que, embora os elementos da estrutura interagissem uns sobre os outros através das forças de tensão, o seu movimento seria independente. Isto na prática não se verifica. Dados os elementos constituintes estarem ligados, a posição do corpo num dado instante restringe, por exemplo, o movimento da anca. Daí suspeitarmos que nos faltam equações, nomeadamente equações que nos forneçam a informação de estrutura ligada com um numero restrito de graus de liberdade dos seus componentes.

Das 44 incógnitas que obtivemos na formulação anterior verificámos que 27 delas (5 ângulos e 11 pontos) referiam-se a variáveis de posição do robô. Se nos reportarmos ao modelo cinemático no início do capítulo constatamos que, na sua totalidade, as matrizes de transformação são função de 7 variáveis diferentes. A saber um ponto (o CM do corpo) e os 5 ângulos (daí o nosso cuidado de usar diferenças em vez de posições angulares). O valor destas variáveis define, em cada instante, a posição da estrutura, de forma unívoca.

Deste modo, 10 dos pontos desconhecidos no sistema da secção anterior podem ser determinados em função destas 7 variáveis. Temos assim mais 20 equações. Usando a notação matricial para uma *perna*_{*i*} (*i*=3, 4) vem ...

$$\begin{bmatrix} R_{axi} \\ R_{ayi} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{inercial} A_{central}(R_x, R_y, \phi_z) * {}^{central} A_1(\gamma_i) * {}^1 A_2(\theta_{2i}) * \begin{bmatrix} \frac{anca}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_{cxi} \\ R_{cyi} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{inercial} A_{central}(R_x, R_y, \phi_z) * {}^{central} A_1(\gamma_i) * {}^1 A_2(\theta_{2i}) * {}^2 A_3(\theta_{3i}) * \begin{bmatrix} 0 \\ \Leftrightarrow \frac{canela}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_{bxi} \\ R_{byi} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{inercial} A_{central}(R_x, R_y, \phi_z) * {}^{central} A_1(\gamma_i) * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_{jxi} \\ R_{jyi} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{inercial} A_{central}(R_x, R_y, \phi_z) * {}^{central} A_1(\gamma_i) * {}^1 A_2(\theta_{2i}) * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_{pxi} \\ R_{pyi} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{inercial} A_{central}(R_x, R_y, \phi_z) * {}^{central} A_1(\gamma_i) * {}^1 A_2(\theta_{2i}) * {}^2 A_3(\theta_{3i}) * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

As interacções com o solo

A modelização matemática das interacções com o piso é um assunto complexo e ainda não consensual na área da locomoção com pernas. Começemos por considerar um piso em que duas das seguintes situações se verificam no caso da perna estar em contacto com o solo: a ponta desliza sobre a superfície de apoio (escorregamento) ou encontra-se fixa (não escorregamento). Nesta última situação a força de atrito tem de ser menor que o produto do módulo da reacção normal por um coeficiente. Este coeficiente designa-se por coeficiente de atrito estático - μ_E - e é característico do piso. No caso de haver deslizamento sobre o solo o movimento é desacelerado por acção do atrito de escorregamento, proporcional à reacção normal. A constante de proporcionalidade designa-se por coeficiente de atrito dinâmico - μ_D - sendo também propriedade do solo.

Fazendo novamente o ponto da situação temos 4 incógnitas para 40 equações. Houve uma melhoria substancial da situação, no entanto ainda temos um sistema indeterminado.

Repare-se que, se nenhuma das pernas estiver em apoio, sabemos que as forças de atrito e as reacções normais são nulas. Temos assim as 4 equações que nos faltam, e um sistema perfeitamente determinado. Esta observação faz-nos concluir que, se uma *perna_i* não estiver em contacto com o solo, devemos acrescentar ao sistema as equações ...

$$\begin{cases} N_i = 0 \\ F_{ai} = 0 \end{cases}$$

E se estiver em apoio? Nesta situação começemos por pressupor que não há escorregamento. Sendo assim desconhecemos quer a reacção normal quer o atrito. No entanto sabemos que os valores de (R_{pxi}, R_{pyi}) são os do ponto de apoio (a, b) conhecido. Assim, as duas equações que acrescentamos são ...

$$\begin{cases} R_{pxi} = a \\ R_{pyi} = b \end{cases}$$

Note-se que, se estivermos a considerar a situação simplificada de solo plano, b é nulo.

Imaginemos agora que resolvemos os sistema impondo estas duas últimas restrições.

Começemos por olhar para o valor da reacção normal. Se ele for negativo porque o piso está a “agarrar” a perna. Talvez isso aconteça num solo lamacento ou numa estrada de alcatrão em pleno Agosto, mas num chão de

azulejo isto será provavelmente um contrassenso. O que acontece é que nós, ao impormos as restrições acima, estamos a fixar o apoio da perna. E se o robô estiver a levantar a perna e o contacto com o piso for superficial? Pois é, aqui as imposições não estão correctas. No entanto, nesta situação de levantamento da perna o atrito e a reacção podem ser considerados nulos e caímos na primeira situação. Assim, se o N_i obtido for 0 devemos recalculer o sistema considerando desta vez o caso de não contacto com o solo.

E se a reacção normal for positiva mas a força de atrito for menor que $\mu_E * N_i$? Aqui teríamos uma situação de escorregamento. Se $y = \varrho(x)$ for a equação da superfície de apoio, as duas equações que faltam relativamente á perna em contacto seriam

$$\begin{cases} F_{ai} = \mu_D * N_i \\ R_{pyi} = \varrho(R_{pxi}) \end{cases}$$

No caso particular da superfície ser plana a equação será $y = 0$ e os sistema será acrescentado de

$$\begin{cases} F_{ai} = \mu_D * N_i \\ R_{pyi} = 0 \end{cases}$$

4.5 Resolução do sistema por computador

4.5.1 O sistema

Sumariando os resultados da secção anterior, concluimos que para cada instante uma perna encontra-se num de três estados: sem estar em contacto com o solo (*estado0*), em contacto sem escorregamento (*estado1*) e em contacto com escorregamento (*estado2*). Em qualquer uma das situações temos para resolver um sistema de 44 equações e 44 incógnitas composto da seguinte forma

1. As equações de Newton de rotação e translação originam 15 equações diferenciais ordinárias de segunda ordem.
2. 5 equações algébricas não lineares para os momentos de força de cada elemento constituinte da estrutura.
3. 20 restrições holonómicas que definem os pontos auxiliares em função dos valores das variáveis generalizadas escolhidas (os sete graus de liberdade independentes da estrutura).
4. 4 equações cuja forma depende dos estado de cada perna e da superfície considerada.

4.5.2 Algoritmos de resolução de equações diferenciais ordinárias

De acordo com a descrição feita na secção anterior pretendemos resolver computacionalmente um sistema que envolve equações diferenciais. As aplicações de calculo científico (no nosso caso o Scilab-2.2), utilizam algoritmos específicos para resolução de sistemas diferenciais. Estes algoritmos, designados genericamente por “ode” (ordinary differential equations), permitem resolver um conjunto variado de problemas, desde sistemas com condições de fronteira até aos sistemas STIFF passando pelos sistemas implícitos.

No entanto, estes algoritmos só funcionam para sistemas que, de uma maneira ou outra, se possam escrever na forma $\frac{d^2x}{dt^2} = \mathcal{F}(t, x)$, podendo \mathcal{F} ser linear ou não. Infelizmente, por mais manipulações matemáticas que façamos sobre o nosso sistema, nunca o conseguiremos colocar na forma pretendida. Voltaremos a abordar este assunto.

Teoria das variáveis de estado

Para fins de controlo é costume dividir os sistemas em SISO (single input, single output) e MIMO (multiple input, multiple output), havendo ainda as classificações intermédias SIMO e MISO. Como as designações em inglês indicam, um sistema SISO caracteriza-se por uma entrada e uma saída, enquanto os MIMO são sistemas multivariáveis dispondo de várias entradas e saídas. Há luz destas considerações facilmente concluimos que o sistema que nos propomos a estudar pode ser visto como um MIMO onde as entradas serão as actuações sobre os diferentes motores, ainda não considerados, e as saídas serão os valores dos diferentes graus de liberdade que definem a posição em cada instante.

As técnicas de controlo clássicas baseiam-se na determinação de funções de transferência e na utilização de lugares de raízes, diagramas de Bode, curvas de Nyquist, etc. Estes procedimentos são particularmente bem sucedidos para sistemas SISO. Num sistema MIMO a interacção entre as entradas e saídas (a entrada u_j normalmente influencia todas as saídas) dificulta muito esta análise. A extensão é normalmente feita implementando controladores que anulem a interacção de modo a que, em malha fechada, cada entrada só influencie uma saída.

Alternativamente a isto, e de forma mais frequente, recorre-se à representação por equações de estado. O estado é uma estrutura matemática constituída por um conjunto de n variáveis $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^t$ de tal forma que, se tivermos o estado inicial $x(t_0)$ e os valores das entradas aplicadas $u(t)$ durante um intervalo de tempo $T = [t_0, t_f]$, conseguimos deter-

minar univocamente os valores das saídas $y(t)$ ao longo desse período. Estas variáveis de estado nem sempre são quantidades fisicamente mensuráveis, podem ser grandezas puramente matemáticas sem qualquer significado.

Se o sistema for linear e $x(t)$, $x(t_0)$, $u(t)$, $y(t)$ forem, respectivamente, o vector de estado, o estado inicial, as entradas e as saídas, temos a expressão abaixo. A , B , C e D são matrizes cuja dimensão depende do numero de variáveis de estado, de entradas e de saídas.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

No caso do sistema não ser linear as relações acima podem ser descritas por ...

$$\dot{x}(t) = \mathcal{F}(x, x_0, u, t)$$

$$y(t) = \mathcal{H}(x, u, t)$$

A colocação do nosso sistema nesta ultima forma teria uma dupla vantagem. Por um lado permitiria a aplicação e exploração directa duma série de técnicas de controlo já estudadas para sistemas MIMO. Por outro, e se repararmos nas considerações que fizemos na apresentação dos algoritmos “ode”, facilmente os poderíamos usar para computar os resultados. Infelizmente, por mais voltas que demos ao sistema não o conseguimos colocar na forma desejada. No capítulo seguinte vamos regressar a este assunto, tentando aplicar a metodologia de Lagrange para deduzir as equações de estado. Especularemos ainda sobre a dificuldade em colocar o problema na forma descrita.

4.5.3 Resolução aplicando discretização

Como vimos a utilização da rotina “ode” não nos resolve o problema. Um caminho alternativo consiste em tentar discretizar as derivadas utilizando, por exemplo, uma aproximação centrada. Desta forma, considerando uma intervalo de discretização de Δt , a derivada de segunda ordem no instante $t=i*\Delta t$ é dada pela expressão abaixo, onde se considera que $x(i)=x(i*\Delta t)$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x(i+1)-2x(i)+x(i-1)}{\Delta t^2}$$

Naturalmente que esta aproximação será tanto melhor quanto menor for o intervalo.

No seguimento do referido na secção anterior, em cada instante i , conhecendo a posição do robô, pretendemos determinar as forças internas e externas nesse instante e a posição para o qual o sistema irá evoluir em $i+1$. A grande vantagem desta técnica é que as 20 equações restritivas, relacionadas com a estrutura, deixam de ter de ser resolvidas juntamente com as outras 24. Isto porque, se conhecermos, no instante i , os valores das 7 variáveis independentes de posição - $R_x, R_y, \phi_z, \theta_{23}, \theta_{33}, \theta_{24}, \theta_{34}$ - e se substituirmos esses valores naquelas 20 equações obtemos as coordenadas dos 10 pontos auxiliares. Se por sua vez substituirmos, nas restantes 24 equações, as coordenadas dos pontos auxiliares pelos valores computados obtemos um sistema que nos permitirá calcular os valores dos 7 graus de liberdade para $i+1$ e as forças internas e externas para o instante i . Conhecendo a posição do robô em $i+1$ repetimos o procedimento para $i+2$ e assim sucessivamente

Em resumo, a discretização tem pelo menos a vantagem de reduzir o nosso numero de equações em quase 50%.

O sistema a resolver pode ser observado no anexo B.

Como se pode ver trata-se de um sistema de equações não lineares. Estes sistemas podem ser numericamente resolvidos por aplicação do método de Newton . Dado uma função vectorial $\mathcal{F}(x)$, onde x é o vector das incógnitas, o método de Newton calcula a solução de $\mathcal{F}(x) = 0$ de forma iterativa. Para isso, se x_0 for uma estimativa inicial de x , usando a formula de Taylor truncada temos ...

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(x_0) + J_{\mathcal{F}}(x_0) * \delta x, \delta x = x \Leftrightarrow x_0$$

$J_{\mathcal{F}}(x_0)$ é o jacobiano de \mathcal{F} . Como $\mathcal{F}(x) = 0$ temos a seguinte expressão.

$$\delta x = \Leftrightarrow J_{\mathcal{F}}^{-1}(x_0) * \mathcal{F}(x_0)$$

Esta expressão permite obter aproximações sucessivas $x_{new} = x_{old} + \delta x$ até $\delta x = 0$, o que ocorre quando $x_0 = x$, ou seja quando chegarmos à solução. Naturalmente que a convergência será tanto mais rápida quanto melhor for a aproximação inicial. No nosso caso usamos sempre como valor inicial para o calculo no instante $i+1$, a solução obtida no instante anterior.

Duas coisas podem correr mal neste método. Por um lado o jacobiano pode não ser invertível. Isto pode ser resolvido através da soma de uma perturbação durante a decomposição LU (ver técnicas de inversão de matrizes). Por outro o método pode convergir para um mínimo local que não a solução pretendida. Isto é particularmente frequente quando a aproximação

inicial é muito má. Infelizmente é impossível assegurar a convergência correcta para toda e qualquer situação. A rotina de “fsolve” do Scilab-2.2 que vamos utilizar, dispõe de uma série de mecanismos para tentar minorar estes inconvenientes. No entanto o utilizador pode ser confrontado a qualquer momento com estes problemas. Nesta situação deverá manipular a aproximação inicial e afrouxar as tolerâncias (menor exactidão) com vista a conseguir a convergência adequada.

4.6 Resultados obtidos

Como forma de validar a nossa aproximação fizemos um conjunto de cinco simulações utilizando o Scilab-2.2 do INRIA. Nesta secção vamos analisar cada uma dessas simulações e verificar até que ponto o nosso modelo tem um comportamento verosímil.

Começamos por indicar na tabela abaixo, os valores iniciais de cada um dos sete graus de liberdade que traduzem a posição da estrutura no principio da simulação. Note-se que, dado estarmos a considerar os actuadores desligados, a computação reproduz o comportamento de queda do robô largado de repente numa determinada posição. As posturas iniciais escolhidas tentam ser abrangentes de forma a por à prova o modelo assegurando a sua generalidade.

Valores iniciais das variáveis de posição					
	Sim1	Sim2	Sim3	Sim4	Sim5
R_x	0	0	0	0	0
R_y	0.4047	0.4047	0.6	0.6	0.6
ϕ_z	0	0	0	0	0
θ_{23}	0	0	0	0	0
θ_{33}	0	0	0	0	0
θ_{24}	250	250	250	245	279
θ_{34}	250	200	250	255	279

A tabela seguinte resume o intervalo de discretização utilizado, a duração em tempo real da simulação, a margem tolerância do algoritmo de resolução do sistema de equações e os coeficientes de atrito dinâmico e estático. Por enquanto estaremos a considerar sempre superfícies planas.

Tabela resumo dos parâmetros de simulação					
	Sim1	Sim2	Sim3	Sim4	Sim5
Intervalo de Discretização	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
Duração da Simulação	0.28	0.26	0.26	0.26	0.25
Margem de Tolerância	1e-10	1e-6	1e-6	1e-6	1e-6
Atrito Estático	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
Atrito Dinâmico	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

Ao longo desta secção vamos apresentar os resultados das diferentes simulações sempre da mesma forma. Começamos por mostrar graficamente a evolução dos parâmetros cinemáticos. Os cinco gráficos associados referem-se, sucessivamente, às coordenadas do centro de massa do corpo principal, aos centros de massa dos segmentos superiores de ambas as pernas, aos centros de massa dos segmentos inferiores, aos parâmetros angulares ($\phi_z, \theta_{23}, \theta_{33}, \theta_{24} e \theta_{34}$) e às coordenadas de posição de ambas as pontas de apoio. Na parte seguinte mostramos a progressão dos valores das grandezas dinâmicas, nomeadamente, as forças de tensão exercidas sobre o corpo principal, as tensões nas juntas e as forças aplicadas nos apoios. Mais uma vez cada gráfico refere-se simultaneamente a ambas as pernas. Desta forma evidenciamos de forma mais clara eventuais simetrias ou paralelismos.

4.6.1 Simulação 1

De acordo com a tabela, e considerando os parâmetros característicos do robô, verificamos que a estrutura é largada da posição indicada abaixo. A figura permite visualizar a evolução correcta da estrutura com o tempo. Como podemos constatar nos gráficos em anexo, os resultados da simulação apontam exactamente para este movimento.

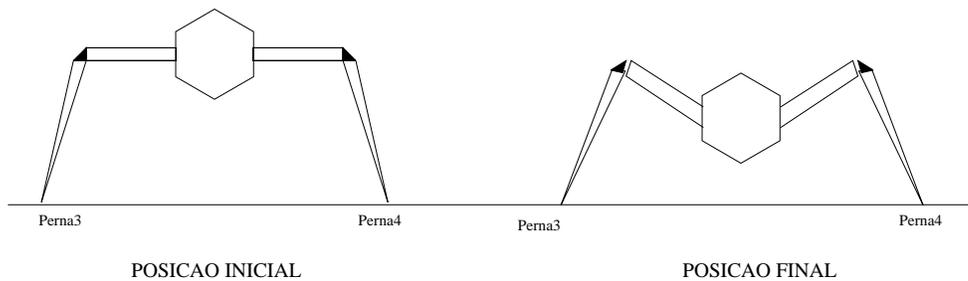


Figura 4.5: Evolução de posição (simulação 1)

Relativamente à evolução das grandezas cinemáticas verificamos que a estrutura cai de forma simétrica (nem havia razão para ser de outra forma).

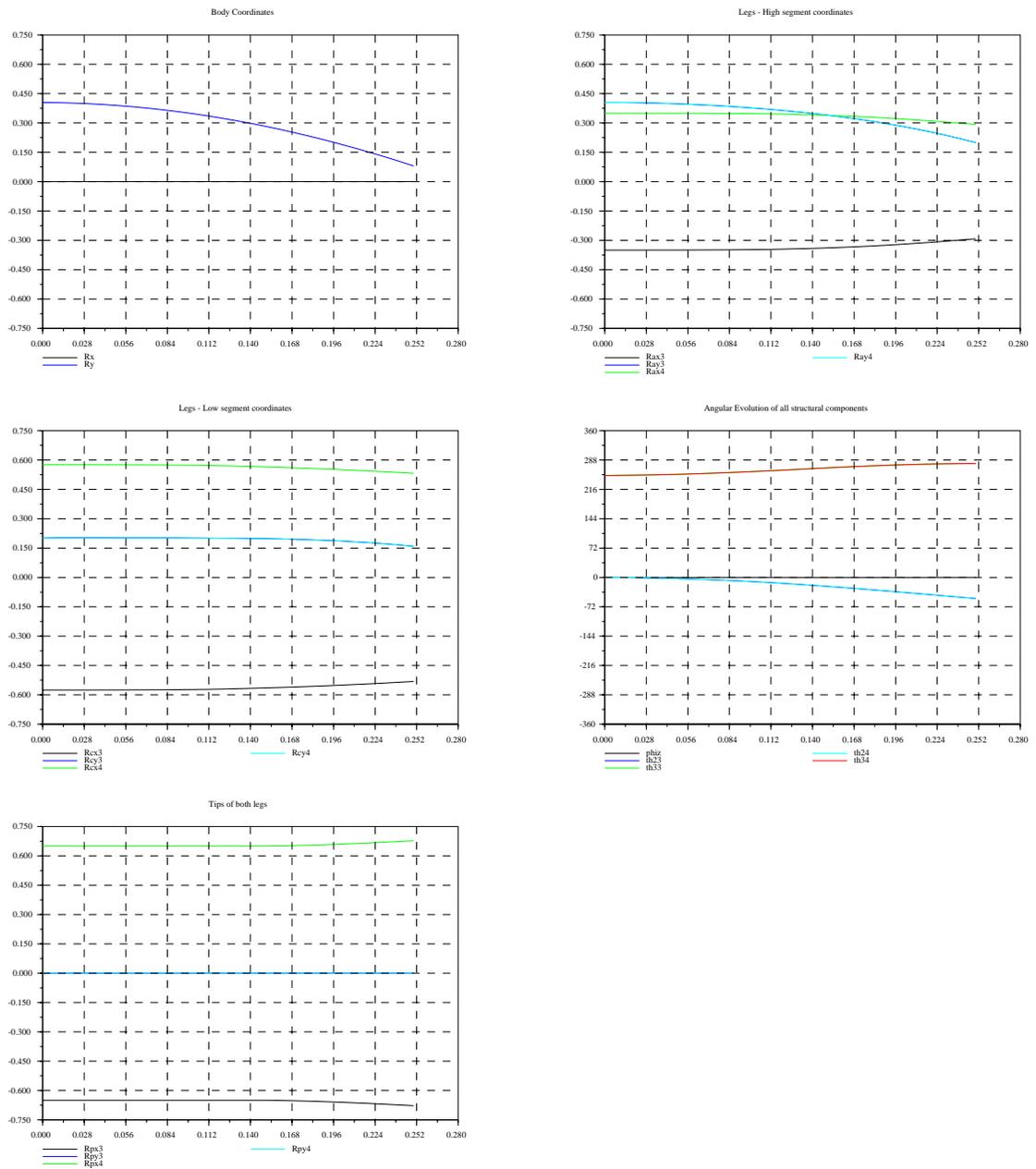


Figura 4.6: Resultados da simulação 1 - Parâmetros cinemáticos

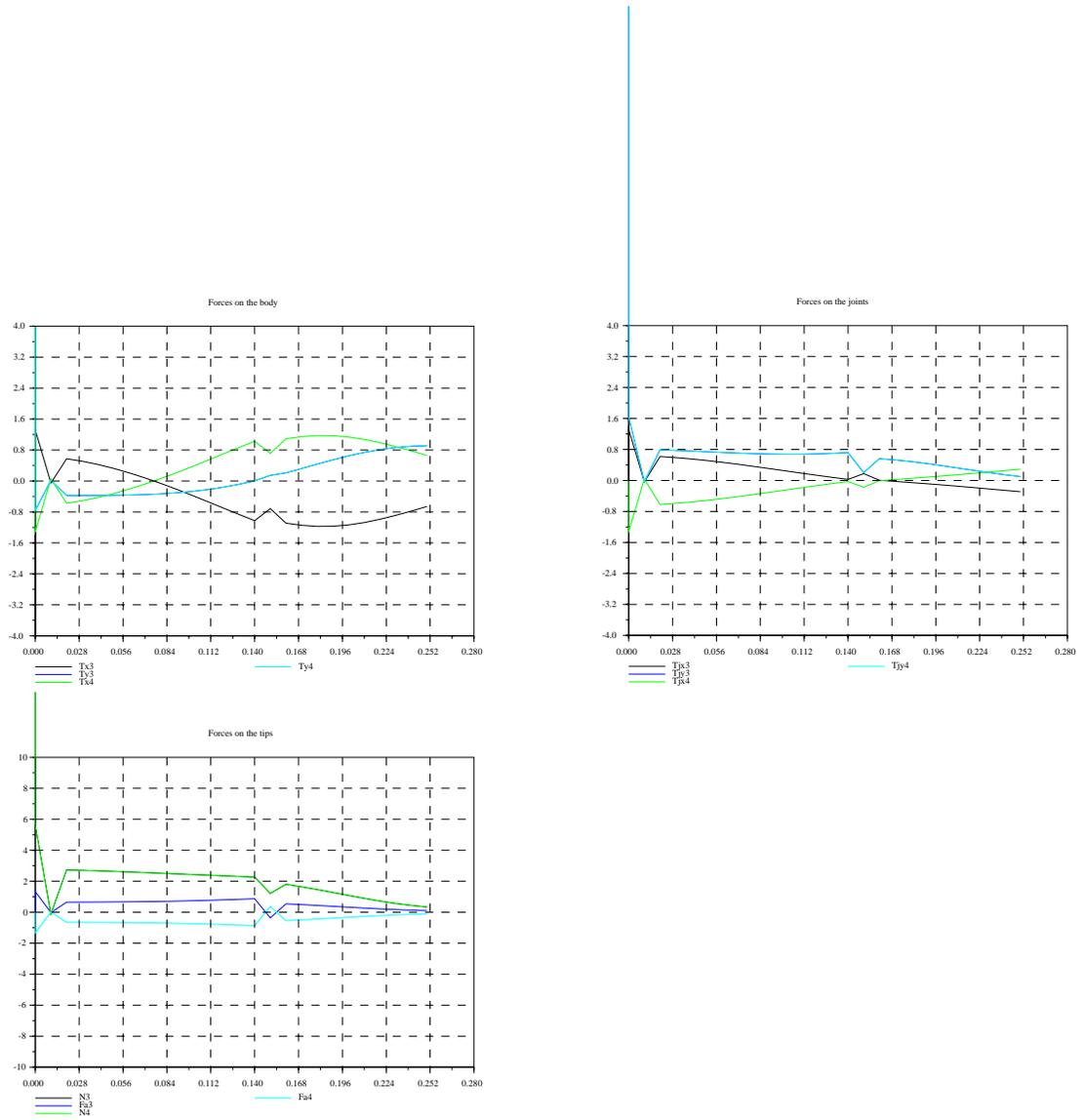


Figura 4.7: Resultados da simulação 1 - Parâmetros dinâmicos

A inclinação e a coordenada em X do centro de massa do corpo principal mantêm-se nulas. Note-se que, dado o coeficiente de atrito estático ser relativamente elevado, os apoios não escorregam logo. No ultimo gráfico, que monitoriza a posição das pontas, observámos que estas só se movem passados 0.16 segundos. A partir daí é que se assiste ao deslocamento para os lados.

Dinamicamente o comportamento é inteiramente concordante sendo bem visível a mudança de estado por volta desse instante. Após a confusão inicial, o modelo responde com reacções normais que decrescem lentamente. Simultaneamente, as forças de atrito exigidas para contrariar o movimento divergente das pontas crescem em modulo. Aos 0.16 segundos é vencida a resistência do piso e inicia-se o escorregamento.

Curioso é também o facto das pernas começarem por puxar o corpo central para baixo ($T_y < 0$) e, a partir de certa altura, inverterem a sua influência, dada a mudança de configuração da estrutura. O corpo principal passa a estar abaixo dos pontos de inserção dos membros ($\theta_2 < 0$), sendo o seu movimento de queda desacelerado pelo efeito suspensivo das pernas.

4.6.2 Simulação 2

Dentro da orgânica seguida para a simulação 1 começamos por mostrar esquematicamente a evolução da estrutura ao longo desta simulação.

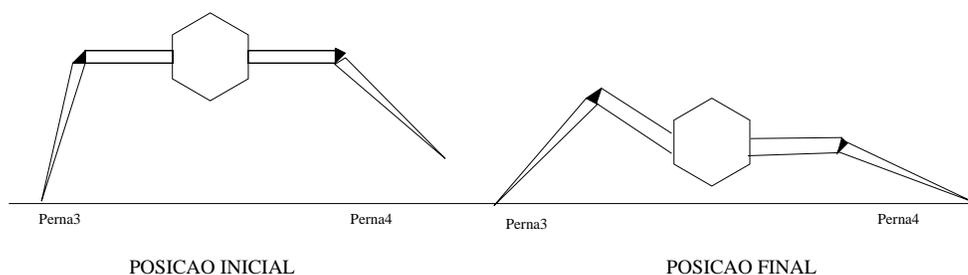


Figura 4.8: Evolução de posição (simulação 2)

Como se pode ver os resultados são perfeitamente verosímeis. Os parâmetros cinemáticos descrevem completamente o movimento ao longo daqueles 0.26 segundos. Note-se que a perna 4 entra em contacto com o solo no instante 0.24 começando logo a escorregar. À semelhança do que aconteceu no exemplo anterior a perna 3 mantém a sua ponta de apoio fixa durante cerca de 0.22 segundos. Este efeito deve-se ao atrito estático elevado. De realçar que agora, como seria de esperar e ao contrario do que aconteceu na primeira simulação, a progressão numérica das diferentes grandezas referentes às pernas não é simétrica.

Do ponto de vista dinâmico pouco há a acrescentar aos gráficos. As mudanças de estado não-contacto/contacto e não-escorregamento/escorregamento reflectem-se de forma bem visível nas forças internas e externas do sistema.

4.6.3 Simulação 3

Se até aqui largávamos o robô numa posição em contacto com o solo, a partir daqui vamos deixá-lo cair dum nível acima do chão. Isto porque as mudanças de estado com o contacto e o escorregamento são sempre críticas permitindo avaliar, pelas respostas, a qualidade do modelo.

Começemos por esquematizar a evolução da estrutura.

Julgamos que o esquema e os gráficos são perfeitamente elucidativos. Refira-se só que os diferentes parâmetros têm um comportamento simétrico para cada perna, o que é compreensível. O contacto com o solo é feito no instante 0.20 e o escorregamento inicia-se em 0.23.

4.6.4 Simulação 4

Nesta simulação voltamos a deixar cair a estrutura do ar. Agora as pernas no instante inicial partem de posições diferentes.

Como se pode observar a simetria patente nos gráficos do exemplo anterior deixa de existir. A perna 4 entra em contacto com o solo 0.02 segundos antes que a perna 3. A primeira chega ao solo no instante 0.20 enquanto a segunda só chega no instante 0.22. Ambas começam a escorregar por volta dos 0.24 segundos.

4.6.5 Simulação 5

A figura abaixo permite acompanhar o movimento agora simulado.

Os resultados parecerão um pouco estranhos à primeira vista. Lançando a estrutura com as pernas metidas para dentro, a forma mais natural dele aterrar seria certamente sobre as pernas. Não nos podemos no entanto esquecer que os membros só estão muito ligeiramente para dentro no instante inicial. Por outro lado a massa do corpo principal é muito superior à das pernas. À luz disto talvez o resultado da simulação ilustre efectivamente a queda real.

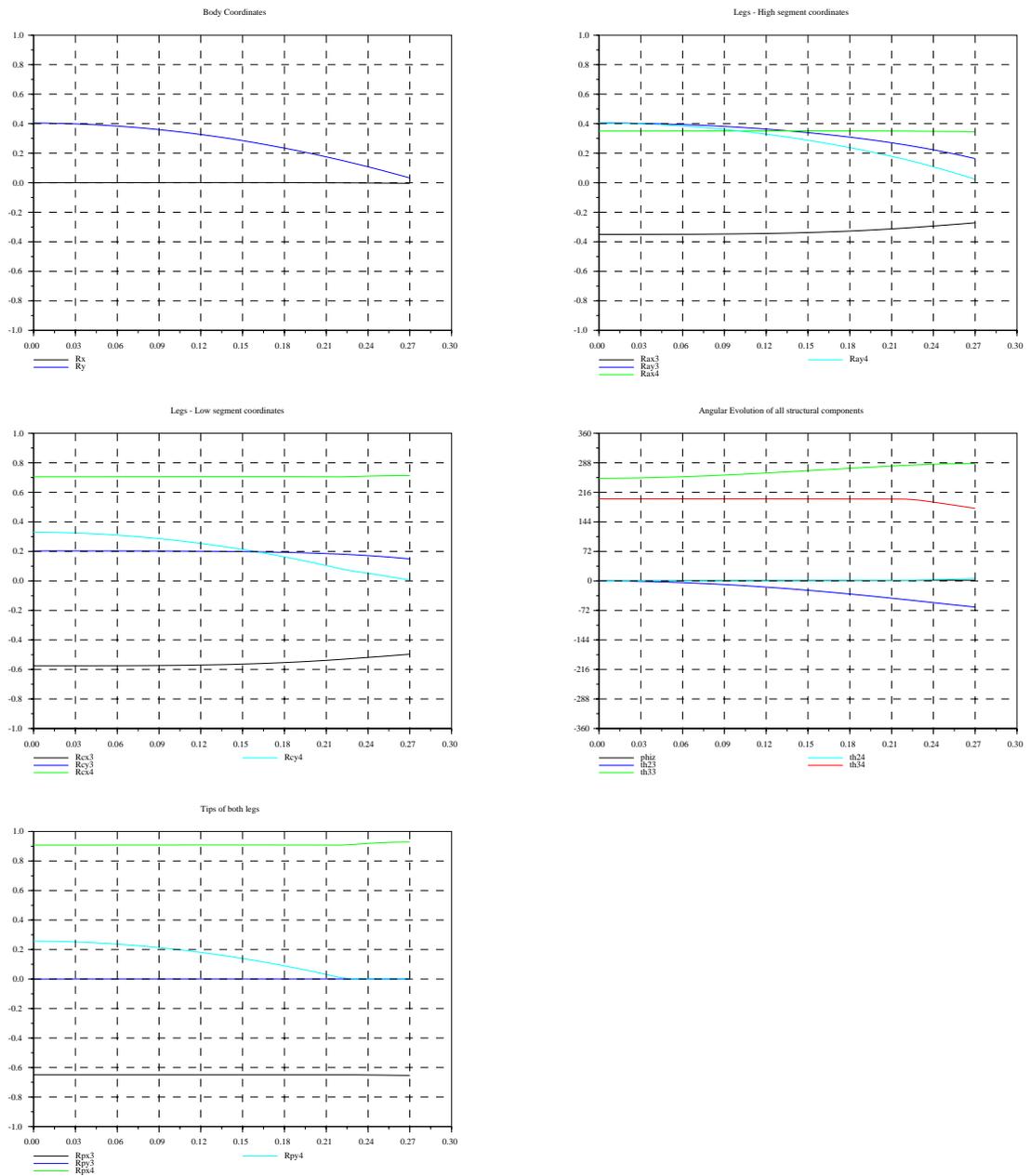


Figura 4.9: Resultados da simulação 2- Parâmetros cinemáticos

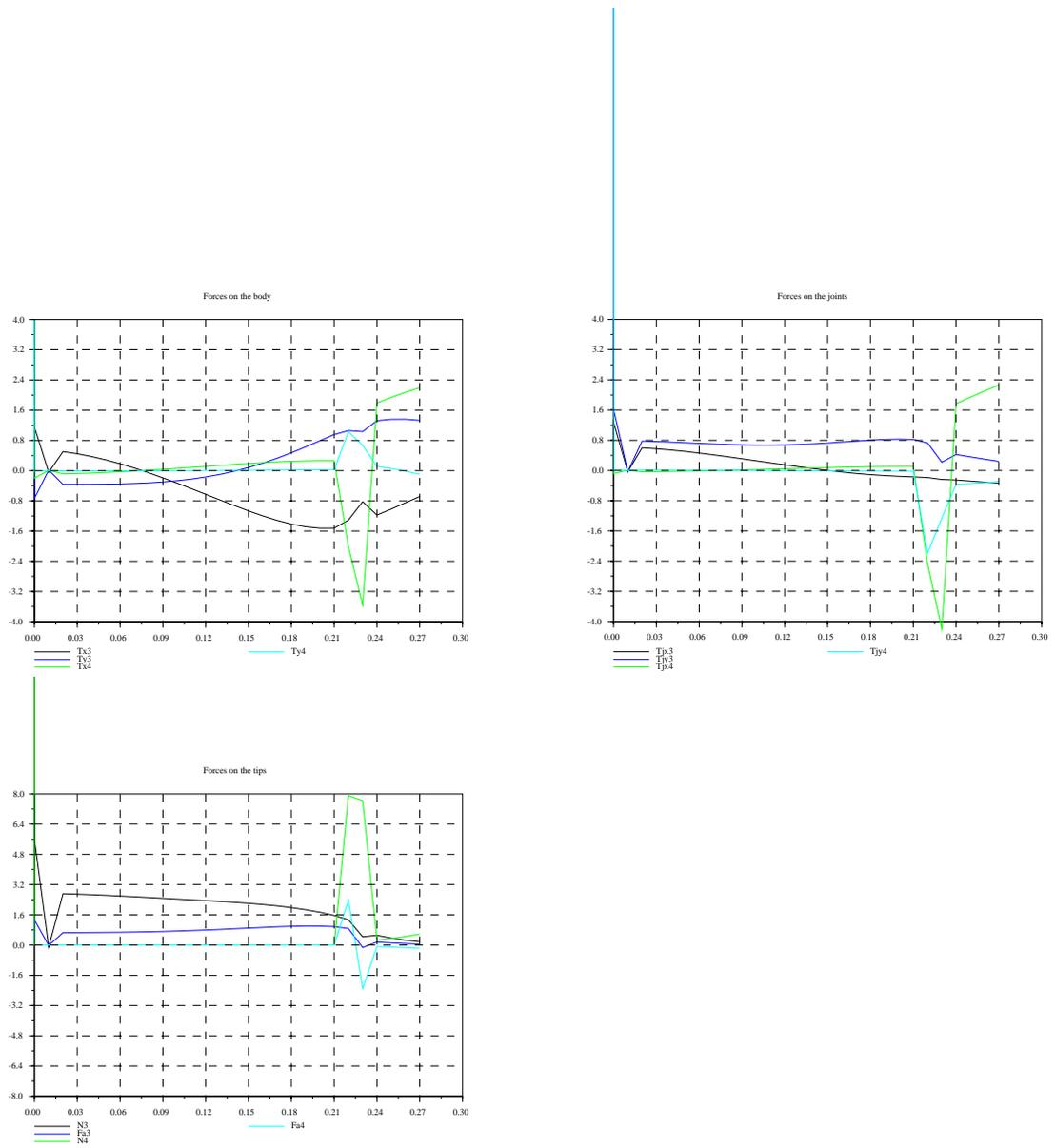


Figura 4.10: Resultados da simulação 2 - Parâmetros dinâmicos

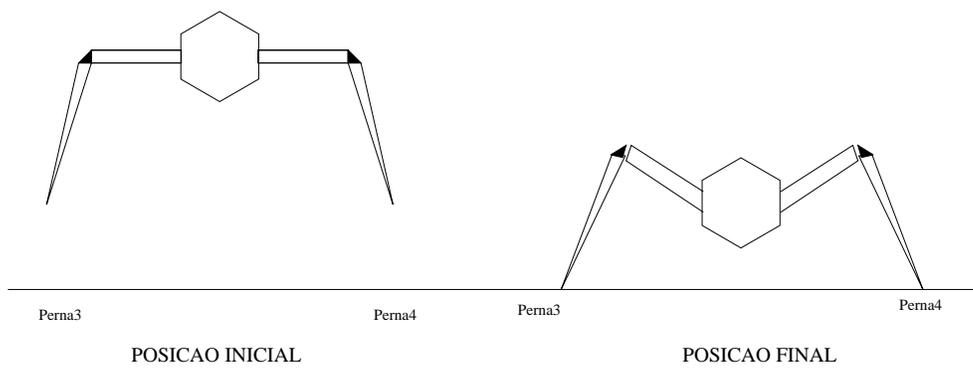


Figura 4.11: Evolução de posição (simulação 3)

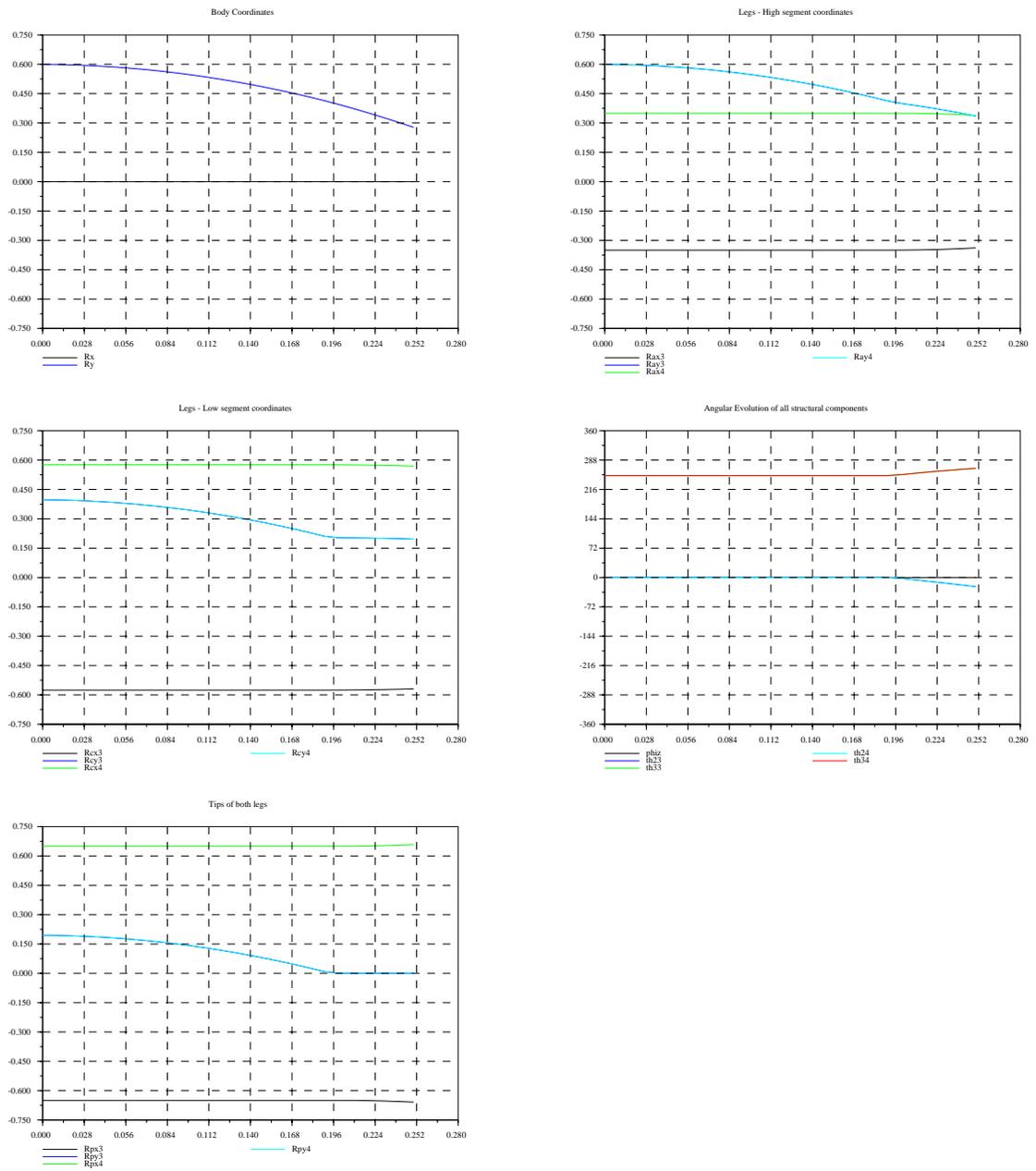


Figura 4.12: Resultados da simulação 3- Parâmetros cinemáticos

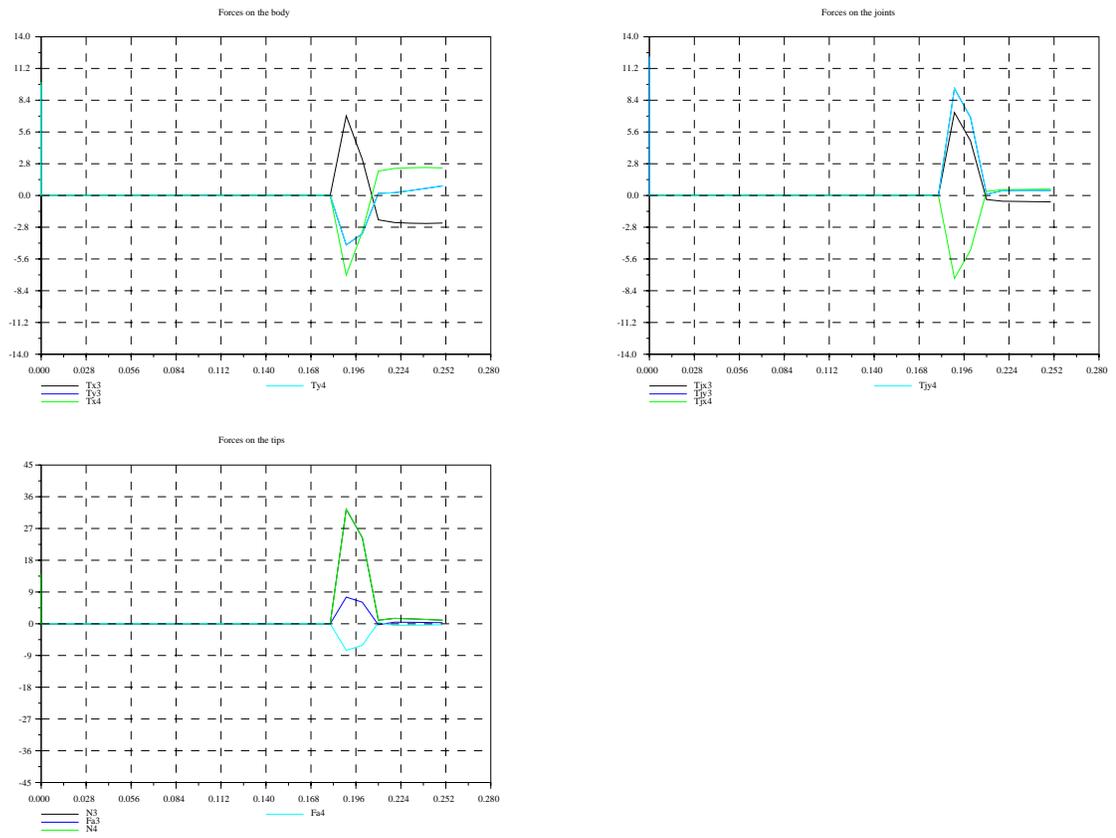


Figura 4.13: Resultados da simulação 3 - Parâmetros dinâmicos

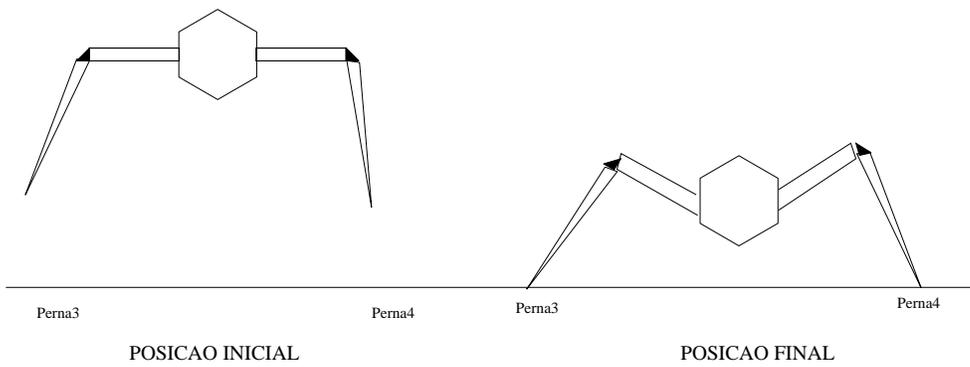


Figura 4.14: Evolução de posição (simulação 4)

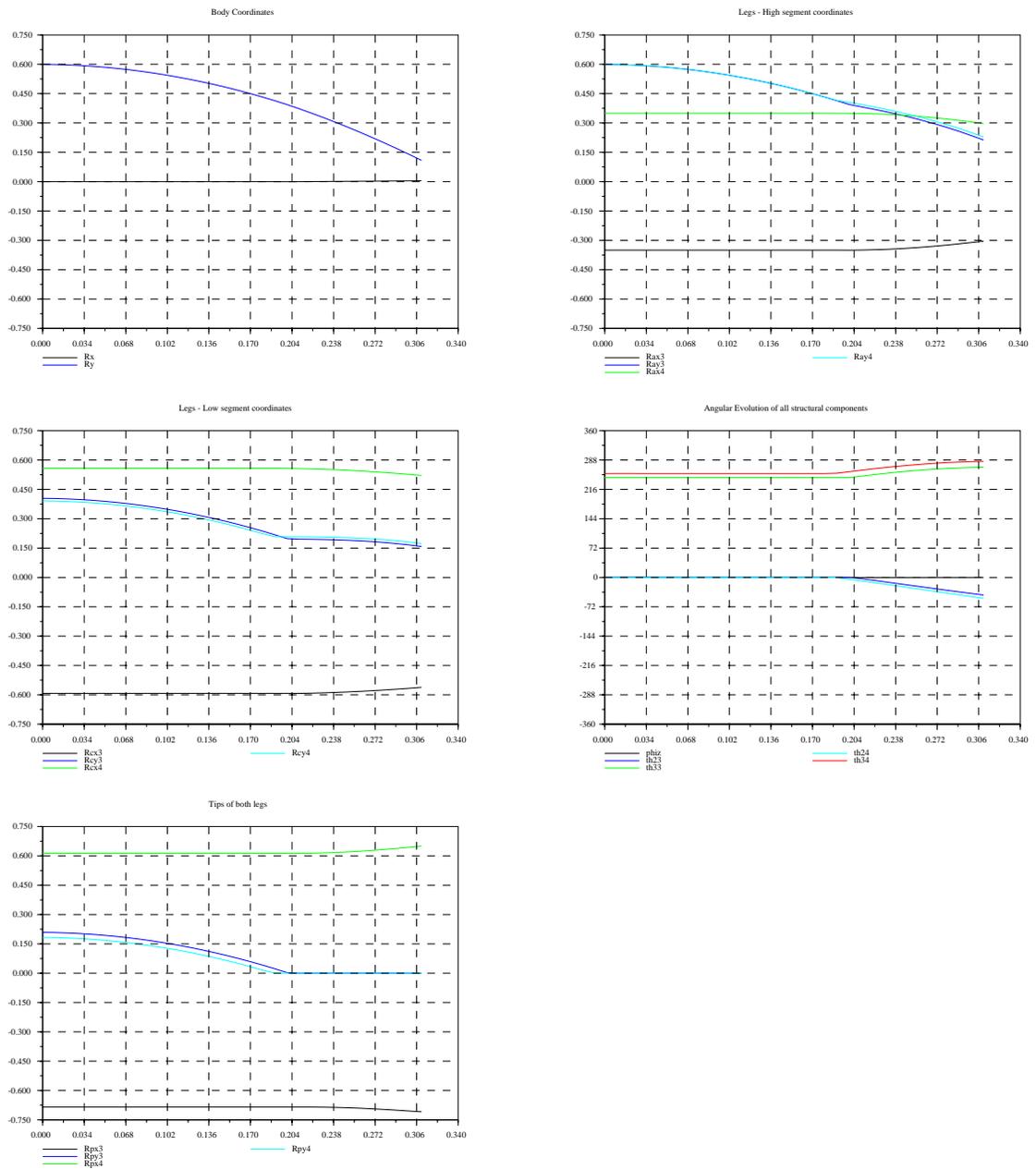


Figura 4.15: Resultados da simulação 4- Parâmetros cinemáticos

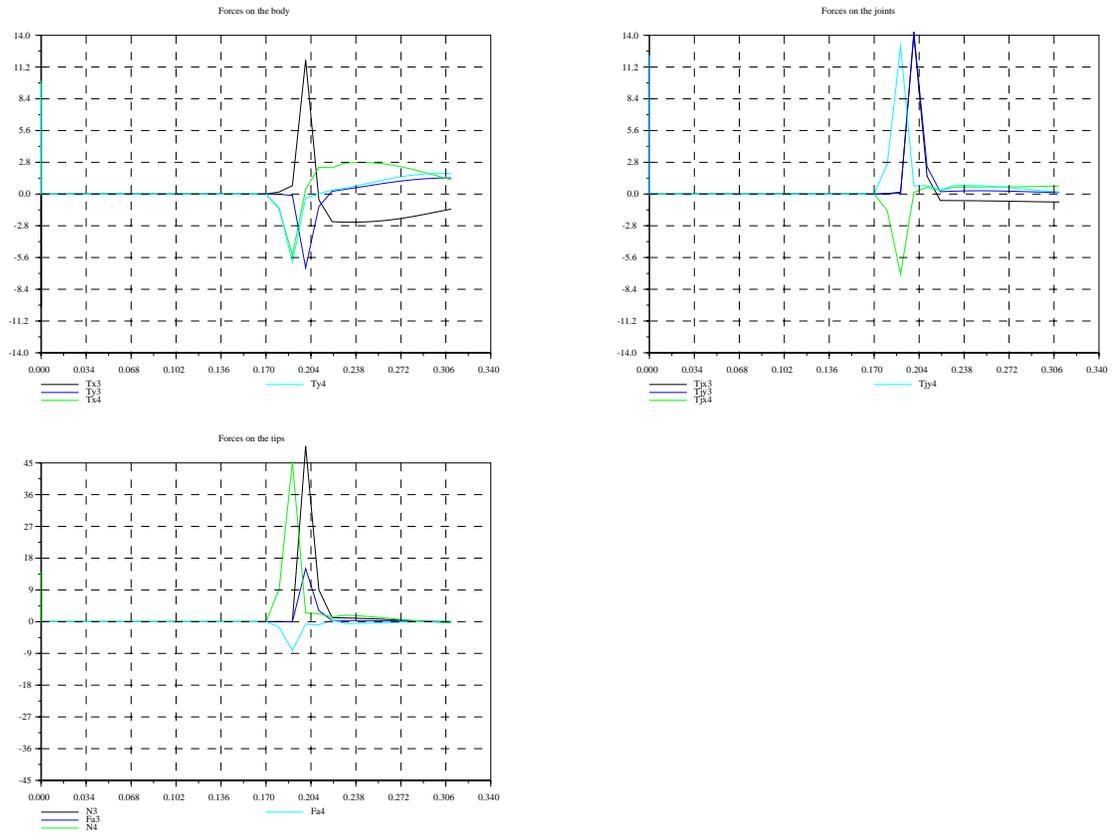


Figura 4.16: Resultados da simulação 4 - Parâmetros dinâmicos

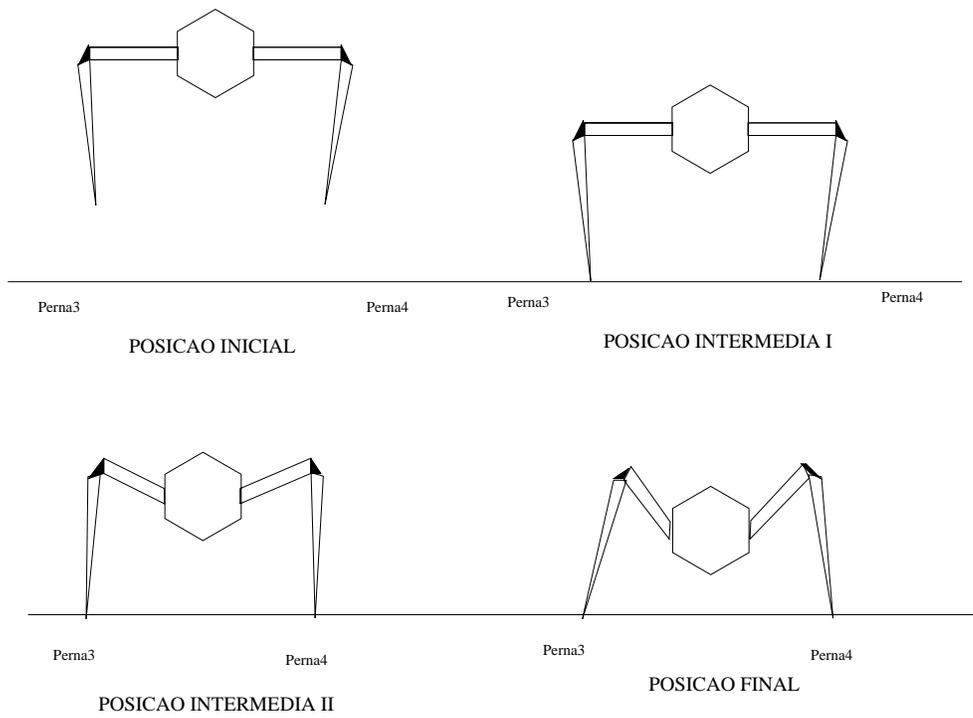


Figura 4.17: Evolução de posição (simulação 5)

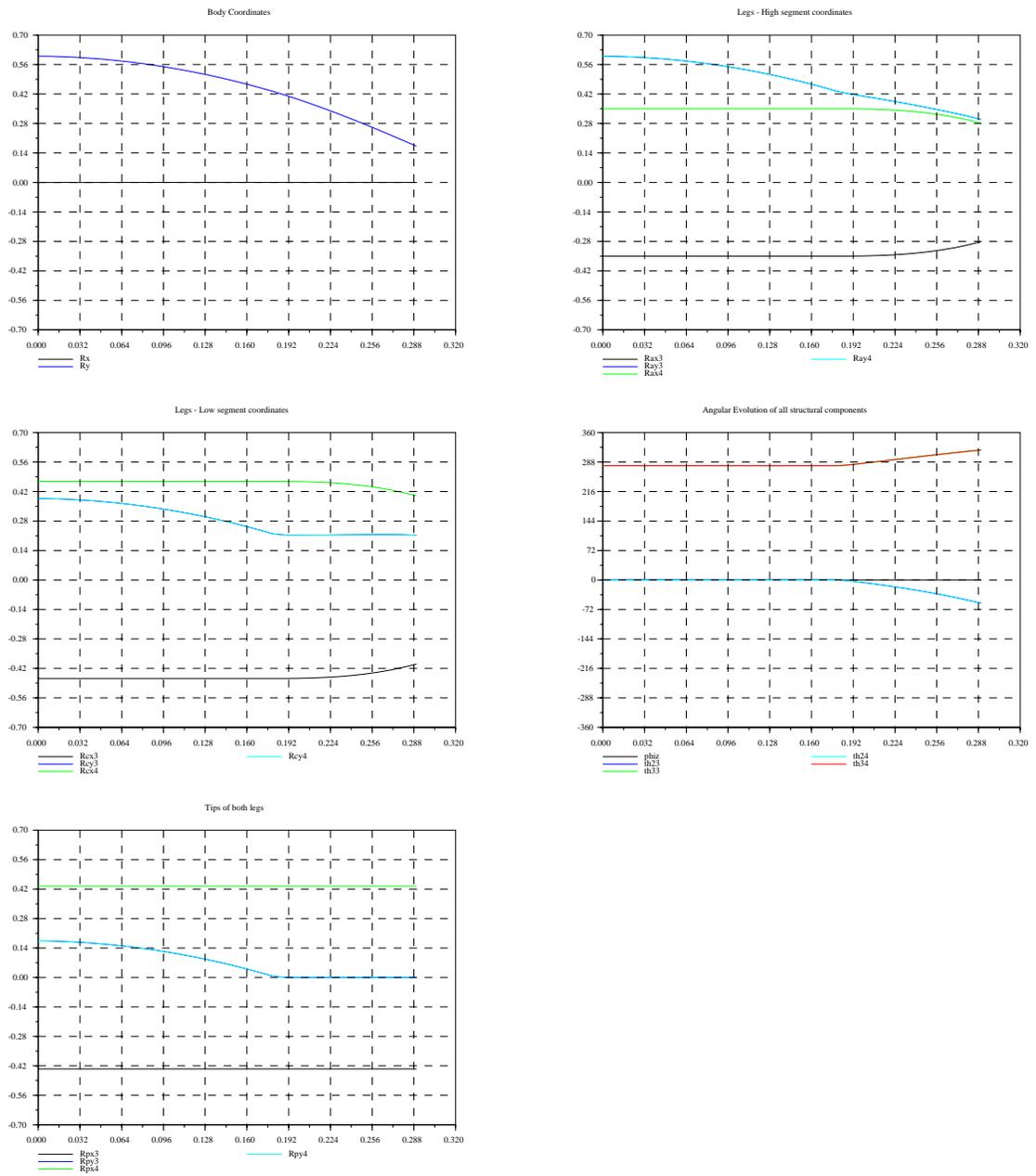


Figura 4.18: Resultados da simulação 5- Parâmetros cinemáticos

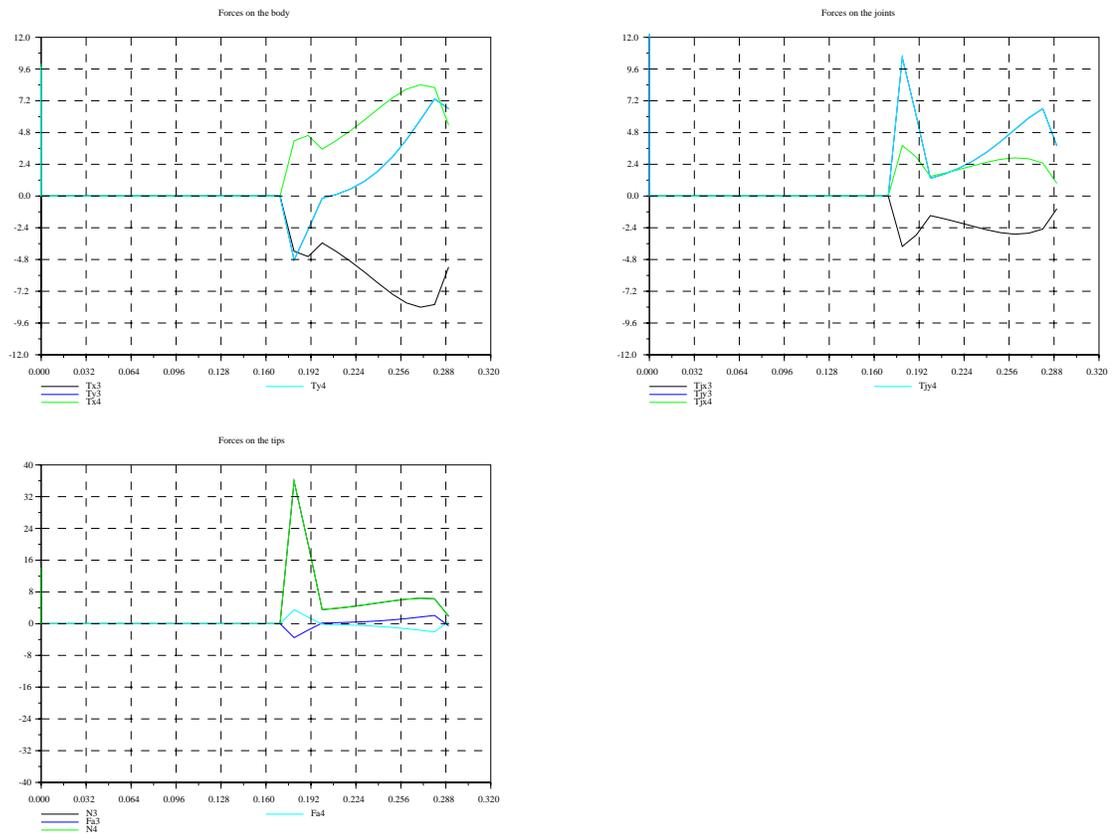


Figura 4.19: Resultados da simulação 5 - Parâmetros dinâmicos

Capítulo 5

Modelização dinâmica do caso simplificado 2D usando o método de Lagrange-Euler

5.1 Introdução

Neste capítulo vamos explorar as possibilidades de aplicação do formalismo de Lagrange na modelização do caso simplificado 2D. Como vimos o método aplicado no capítulo 4 não permitiu a obtenção de equações de estado explícitas. Tal resultado possibilitaria uma diferente perspectiva do problema, como foi alias referido em 4.5.2. Um dos objectivos da análise feita nesta secção é conseguir uma descrição do sistema sob a forma de equações e variáveis de estado.

Antes de passarmos à resolução do problema começaremos por introduzir alguns conceitos de apoio de forma a permitir uma melhor compreensão das técnicas usadas. Embora muitos livros apresentem métodos sistemáticos de modelização, que evitam um estudo aprofundado dos conceitos físicos subjacentes, estão sobretudo voltados para os manipuladores. Assim, o que iremos fazer será a adaptação das técnicas à situação do robô, à semelhança do que fizemos aquando a modelização cinemática. Para isso teremos que, inevitavelmente, ter alguns conhecimentos suplementares sobre a dinâmica de Lagrange.

5.2 Conceitos subjacentes ao formalismo de Lagrange

5.2.1 Conceitos gerais

Coordenadas generalizadas, graus de liberdade e restrições

Ao longo do nosso trabalho temos utilizado diferentes sistemas de coordenadas para indicar um mesmo ponto da estrutura. É certo que até ao momento todos os referenciais eram cartesianos, no entanto, nada nos impediria de fazer uso de coordenadas esféricas, cilíndricas ou qualquer outro conjunto de coordenadas (q_1, q_2, \dots, q_n) que permitissem localizar, de forma unívoca, um dado ponto. Em resumo, podemos servir-nos de um conjunto variado de coordenadas, conforme a conveniência do problema. Essas coordenadas poderão ser de natureza diversa envolvendo tipicamente ângulos e deslocamentos. São em geral referenciadas pela letra q sendo designadas por coordenadas generalizadas.

Quando trabalhamos com diferentes sistemas de coordenadas é usual necessitarmos das equações de transformação que permitam passar de um sistema para outro. Assim, considerando uma coordenada cartesiana x_i , teremos (5.1). Note-se que a transformação, para além de ser função das coordenadas generalizadas, poderá se-lo também do tempo. Isto acontece sempre que houver movimento relativo entre os referenciais.

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (5.1)$$

Consideremos agora um sistema de p partículas em movimento num espaço tridimensional. Numa primeira aproximação temos que, de forma a conhecermos em cada instante a posição de todos os elementos do sistema, necessitaríamos de $3p$ coordenadas generalizadas (três variáveis por partícula). Tal seria efectivamente preciso se cada elemento se pudesse deslocar de forma completamente livre e independente. No entanto, é frequente o movimento nos sistemas ser limitado por restrições que, muitas vezes, traduzem as interacções entre os seus diferentes componentes. Imaginemos uma esfera a rodar sobre uma dada superfície. Neste caso a trajectória daquela será forçosamente descrita sobre os contornos desta, deixando o movimento de ser completamente livre. Do ponto de vista matemático, se associarmos à esfera um conjunto adequado de coordenadas generalizadas (q_1, q_2, q_3) e tivermos a equação da superfície, conseguiremos obter uma delas (por exemplo q_3) em função das outras duas (5.2). Dizemos que temos uma restrição holonómica (uma das coordenadas é explicitamente definida pelas outras) que poderá ou não depender do tempo (móvel ou não).

$$q_3 = \phi_i(q_1, q_2, t)(5.2)$$

Isto abre caminho para um novo conceito, o de graus de liberdade. O numero de graus de liberdade de um sistema não é mais do que o numero de coordenadas generalizadas independentes (excluindo o tempo), necessárias para especificar de forma completa e inequívoca a posição de todos os componentes desse sistema. Isto perssupoem a exclusão das coordenadas superfluas, calculáveis usando as equações das restrições. Assim, se um sistema de p partículas tiver n graus de liberdade, terá de ter associado $3p-n$ restrições.

Trabalho e energia

Se aplicarmos uma força $F(F_x, F_y, F_z)$ a uma partícula o trabalho realizado no deslocamento dum ponto A para um ponto B será dado por (5.3).

$$W_{A \rightarrow B}^F = \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz(5.3)$$

Se considerarmos a resultante das forças aplicadas, a massa da partícula m e aplicarmos a segunda lei da dinâmica chegamos a (5.4). Concluimos assim que o trabalho da resultante é igual à variação da energia cinética do sistema.

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B}^F &= \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz = m \int_A^B \ddot{x} dx + \ddot{y} dy + \ddot{z} dz = \\ &= m \int_A^B \dot{x} d\dot{x} + \dot{y} d\dot{y} + \dot{z} d\dot{z} = \frac{m}{2} (v_B^2 \Leftrightarrow v_A^2) \end{aligned}$$

$$W_{A \rightarrow B}^F = \Delta T(5.4)$$

Imaginemos agora que temos um corpo rígido, animado de movimento de translação e de movimento rotação em torno de um eixo definido em relação a um referencial X'Y'Z', cuja origem O' coincide com o centro de massa. Se tivermos ainda um referencial inercial XYZ, as coordenadas duma partícula de massa dm neste sistema serão: $x = \bar{x} + x'$; $y = \bar{y} + y'$ e $z = \bar{z} + z'$. Em que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ são as coordenadas do centro de massa em XYZ e (x', y', z') são as coordenadas do ponto em X'Y'Z'. Determinemos a energia cinética T do corpo.

$$T = \frac{1}{2} \int (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dm = \frac{1}{2} \int [(\dot{\bar{x}} + \dot{x}')^2 + (\dot{\bar{y}} + \dot{y}')^2 + (\dot{\bar{z}} + \dot{z}')^2] dm$$

Note-se que, dado X'Y'Z' estar situado no centro de massa temos que

$$\int \dot{x}' dm = \int \dot{y}' dm = \int \dot{z}' dm = 0(5.5)$$

Assim vem que

$$T = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} \int (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) dm = \frac{M}{2} v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \int v'^2 dm$$

Como o corpo roda em torno dum eixo com velocidade angular ω , se r for a distância do eixo ao ponto vem $v'^2 = r^2 \omega^2$. Assim, e atendendo a que o momento de inercia do corpo em relação ao eixo de rotação é $I = \int r^2 dm$, chegamos a (5.6).

$$T = \frac{M}{2} v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \int r^2 \omega^2 dm = \frac{M}{2} v_{CM}^2 + \frac{I}{2} \omega^2 \quad (5.6)$$

Em resumo, a expressão deduzida para a energia cinética é composta por um elemento de translação e outro de rotação. É importante frisar que a formula só é valida no caso do referencial X'Y'Z', que acompanha o corpo, ter a origem coincidente com o centro de massa. Se tal não se verificar (5.6) terá um componente adicional devido à não anulação de (5.5).

Deslocamento e trabalho virtual

Voltemos ao exemplo da esfera e da superfície. Temos uma esfera de massa m , sobre a qual está aplicada uma força F que a faz descrever uma dada trajectória sobre a superfície considerada (restrição). Durante um dado intervalo de tempo dt , m sofre um deslocamento infinitesimal $ds(dx, dy, dz)$ medido em relação a um referencial. Como o movimento obedece às restrições dizemos que ds é um deslocamento real.

Consideremos agora um deslocamento infinitesimal arbitrário $\delta s(\delta x, \delta y, \delta z)$, não necessariamente sobre a superfície. Devido ao facto do movimento poder violar as restrições impostas dizemos que estamos a falar dum deslocamento virtual. O trabalho realizado, nesta situação, pela força F designa-se por trabalho virtual (5.7).

$$\delta W = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \quad (5.7)$$

Estes conceitos, parecendo para já um pouco bizarros, vão-se mostrar extremamente úteis. É importante entretanto classificar os deslocamentos em três tipos diferentes. Para isso imaginemos um sistema de p partículas.

1. Fazendo uso de $x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3p}, t)$, etc, (em que há um máximo de $3p$ coordenadas generalizadas) temos que $\delta x_i = \sum_{j=1}^{3p} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \delta t$. Note-se que o deslocamento viola as restrições. Nesta situação as forças de ligação interiores do sistema (no exemplo a reacção normal sobre a esfera) realizam trabalho.

2. Consideremos agora que utilizamos as restrições holonómicas e passamos a só ter as n coordenadas generalizadas correspondentes aos graus de liberdade. Assim vem $\delta x_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \delta t$. Este deslocamento não viola as restrições. No entanto, no intervalo de tempo δt , os referenciais e/ou as restrições mudam ligeiramente de posição. Isto faz com que as forças de ligação possam ainda realizar trabalho.
3. Façamos agora o tempo fixo ($\delta t = 0$). Temos $\delta x_i = \sum_{j=1}^{3p} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j$. Nesta situação as forças de ligação não realizam trabalho podendo ser eliminadas de (5.7). É devido a este facto que, utilizando o formalismo de Lagrange, podemos evitar o calculo das tensões nas juntas do robô.

5.2.2 Formalismo de Lagrange

Dedução

Consideremos uma partícula de massa m em movimento, cujas coordenadas em relação a um referencial inercial são (x, y, z) . Se F for a força resultante aplicada e considerarmos o resultado de (5.7) chegamos a (5.8), expressão conhecida por equação d'Alembert.

$$m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z \quad (5.8)$$

Partindo do principio que o sistema tem n graus de liberdade (n não superior a 3 para o caso de uma partícula), que escolhemos um conjunto (q_1, q_2, \dots, q_n) de coordenadas generalizadas adequadas e que conhecemos as expressões de transformação para o referencial cartesiano inicial, chegamos à expressão (5.9) manipulando matematicamente (5.8).

$$\sum_{r=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial q_r} \right) \delta q_r = \sum_{r=1}^n \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_r} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_r} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_r} \right) \delta q_r \quad (5.9)$$

Note-se que estamos a considerar deslocamentos virtuais de tal forma que o trabalho das forças de ligação seja nulo (terceira situação da secção anterior). Agora se considerarmos que δq_r é nulo para todo o r com excepção de $r=i$ temos (5.10).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial q_i} = F_x \frac{\partial x}{\partial q_i} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_i} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_i} \quad (5.10)$$

Estas n relações ($i=1\dots n$) são as equações de movimento de Lagrange. Obtivemos um sistema de equações diferenciais de segunda ordem em que, conhecendo as forças aplicadas, calculamos os valores das coordenadas e assim o movimento. Este não é mais que o problema da dinâmica directa, aliviado de eventuais preocupações com as forças de ligação. O mesmo sistema permitirá resolver a questão de dinâmica inversa, ou seja, calcular as forças aplicadas conhecendo o movimento.

Forças generalizadas

Vamos agora introduzir o conceito de força generalizada F_{q_r} . Considerando o segundo membro de (5.10) definimos força generalizada relativa à coordenada q_r da seguinte forma.

$$F_{q_r} = F_x \frac{\partial x}{\partial q_r} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_r} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_r} \quad (5.11)$$

Fisicamente a força generalizada é uma grandeza de modo a, se considerarmos um deslocamento virtual $\delta s = \delta q_r$, o trabalho realizado no movimento será dado por $\delta W = F_{q_r} \delta q_r$. Note-se que nem sempre F_{q_r} é uma força no sentido usual. Se, por exemplo, q_r for um ângulo, a força generalizada correspondente será um momento.

Existem diferentes técnicas para a obtenção das forças generalizadas, sendo o melhor método função das características particulares do problema real. No entanto, uma boa maneira, com um largo espectro de situações aplicáveis, consiste em considerar um deslocamento, exclusivamente ao longo de q_r , e subsequentemente determinar a expressão do trabalho da resultante das forças aplicadas. A expressão deduzida será F_{q_r} .

Notas adicionais

Uma das grandes vantagens da utilização do formalismo de Lagrange consiste em não termos de envolver as forças de ligação. No entanto, como vimos nos capítulos 3 e 4, poderá ter interesse calculá-las. Como proceder para obter esses resultados? Uma forma consiste, num sistema com n graus de liberdade, em considerar mais do que n equações do tipo (5.10). Tem que se ter o cuidado de, na dedução das equações referentes às coordenadas generalizadas superfluas ($q_{r, \text{talquer}} > n$), entrar com as forças de ligação no cálculo das forças generalizadas correspondentes.

E se, considerando somente as n coordenadas generalizadas independentes, tivermos equações de transformação função do tempo, motivadas por referenciais ou restrições moveis? Neste caso poderemos deduzir uma equação adicional, referente a t , onde se volta a entrar com as forças de ligação da forma referida no parágrafo anterior. Normalmente esta equação não é incluída no sistema final dado ser redundante.

5.2.3 Forças conservativas

Uma força diz-se conservativa se o trabalho por ela realizado, num deslocamento de um ponto A para um ponto B, for exclusivamente função da posição inicial e final do corpo e independente da trajectória. Uma força

conservativa F tem sempre associada uma grandeza escalar, designada por potencial $U(x,y,z)$, de tal forma que ...

$$W_{A \rightarrow B}^F = U(A) \Leftrightarrow U(B) = \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\begin{cases} F_x = \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

Considerando agora as n variáveis generalizadas poderemos definir U em função de (q_1, q_2, \dots, q_n) . Se F provocar um deslocamento δq_r calculamos o trabalho realizado.

$$\delta W_{q_r} = F_{q_r} \delta q_r = \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial q_r} \delta q_r \quad (5.12)$$

Concluindo, se aplicarmos uma força conservativa ao sistema e se conhecermos a expressão do potencial em função das coordenadas generalizadas, o calculo das forças generalizadas torna-se trivial.

$$F_{q_r} = \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial q_r} \quad (5.13)$$

Estes resultados são muito uteis quando trabalhamos com sistemas onde tenhamos que entrar, por exemplo, com a força gravítica. Nestas situações é usual definirmos o lagrangiano L .

$$L = T \Leftrightarrow U \quad (5.14)$$

Se a única força externa aplicada for conservativa a equação (5.10) poderá ser reescrita na forma (5.15).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \quad (5.15)$$

5.3 Aplicação do formalismo de Lagrange na modelização dinâmica de manipuladores

Nesta secção vamos explicar um método, baseado no formalismo de Lagrange, que permite modelizar o comportamento dinâmico dum manipulador. Este processo permitirá, por um lado, reunir os conhecimentos necessários à eventual aplicação do formalismo ao nosso robô com pernas, e por outro, antever as principais vantagens e dificuldades que esta abordagem poderá apresentar.

Em 2.2.2 fizemos a modelização cinemática da perna por analogia com um manipulador tendo sido descritas as coordenadas homogêneas, as matrizes de transformação e o método de D-H. Nesta secção vamos considerar um modelo cinemático elaborado sobre os conceitos aí descritos.

5.3.1 Energia cinética

Dedução da expressão geral

Seja r_i^i um ponto do segmento i , referenciado em relação ao *sistema* _{i} fixo no segmento. De acordo com o que vimos em 2.2.2 as coordenadas do ponto em relação ao *sistema*₀ podem ser calculadas usando a matriz de transformação A_i^0 .

$$r_i^0 = A_i^0 * r_i^i$$

Se considerarmos o *sistema*₀ como sendo inercial e pretendermos calcular a sua velocidade basta-nos fazer a derivação da expressão anterior.

$$v_i^0 = \frac{dr_i^0}{dt} = \frac{dA_i^0}{dt} r_i^i + A_i^0 \frac{dr_i^i}{dt}$$

Dado r_i^i ser constante e aplicando a derivada da composta temos o seguinte.

$$v_i^0 = \sum_{j=1}^i \frac{\partial A_i^0}{\partial q_j} \dot{q}_j r_i^i$$

Definindo agora as matrizes U_{ij} podemos reescrever a expressão anterior.

$$\begin{cases} U_{ij} = \frac{\partial A_i^0}{\partial q_j} & \leq j < i \parallel j = i \\ U_{ij} = 0 & \leq j > i \end{cases}$$

$$v_i^0 = \sum_{j=1}^i U_{ij} \dot{q}_j r_i^i \quad (5.16)$$

Aplicando a formula para o calculo da energia cinética, $T = \frac{1}{2}mv^2$, considerando que a massa do ponto é dm , e sendo Tr o traço duma matriz quadrada chegamos a (5.17) que nos permite calcular a energia infinitesimal associada à massa pontual.

$$dT = \frac{1}{2}v_i^0 v_i^{0t} dm = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i [\text{Tr}(U_{ij} r_i^i r_i^{it} U_{ik}^t) \dot{q}_j \dot{q}_k] dm \quad (5.17)$$

Se agora integrarmos de forma a obtermos a energia T_i de todo o segmento temos (5.18).

$$T_i = \int dT = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Tr}[U_{ij} (\int r_i^i r_i^{it} dm) U_{ik}^t] \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (5.18)$$

Note-se que $\int r_i^i r_i^{it} dm$ resulta numa matriz quadrada J_i designada por matriz de inércia do segmento i . Esta matriz é função da distribuição de massa do corpo sendo independente da sua posição e movimento (r_i^i é constante ao longo do tempo). Assim, só é necessário calcula-la uma vez de forma a avaliar a energia cinética do segmento. Regressaremos ainda a esta questão.

$$J_i = \int r_i^i r_i^{it} dm \quad (5.19)$$

Se o manipulador tiver n juntas e segmentos distintos teremos que a energia cinética total será dada por (5.20).

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i Tr[U_{ij} J_i U_{ik}^t] \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (5.20)$$

A matriz de inércia

A aplicação de (5.20) para o cálculo da energia cinética de um manipulador implica a determinação da matriz de inércia J_i de cada um dos n segmentos constituintes (5.19). Esta matriz introduz a informação de resistência ao movimento sendo, naturalmente, função da forma e distribuição de massa do corpo. Desenvolvendo (5.19) chegamos a (5.21).

$$J_i = \int r_i^i r_i^{it} dm = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix}$$

Se considerarmos que (I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}) são os momentos de inércia de rotação em torno dos eixos XYZ do *sistema* _{i} , que as coordenadas do centro de massa do segmento são dadas por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e definirmos os produtos de inércia cruzados (I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}) como sendo $(\int xy dm, \int xz dm, \int yz dm)$, podemos reescrever a equação anterior na seguinte forma.

$$J_i = \int r_i^i r_i^{it} dm = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & m\bar{x} \\ I_{xy} & \frac{I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{yz} & m\bar{y} \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}}{2} & m\bar{z} \\ m\bar{x} & m\bar{y} & m\bar{z} & m \end{bmatrix}$$

5.3.2 Energia potencial

Seja U_i a energia potencial gravítica do *segmento* _{i} . Sendo $g(0, \Leftrightarrow 9.8, 0, 1)$ a aceleração gravítica expressa em coordenadas homogêneas em relação a um referencial inercial adequado e \bar{r}_i^0 o centro de massa do corpo em relação ao mesmo referencial, a energia pode ser calculada por (5.23).

$$U_i = \Leftrightarrow m_i g \bar{r}_i^0 = m_i g (A_i^0 \bar{r}_i^i) \quad (5.23)$$

Somando a energia potencial dos n segmentos temos a energia potencial total (5.24).

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \Leftrightarrow m_i g \bar{r}_i^0 = \sum_{i=1}^n \Leftrightarrow m_i g (A_i^0 \bar{r}_i^i) \quad (5.24)$$

5.3.3 As forças generalizadas

Num manipulador temos a considerar três tipos de forças externas aplicadas: as forças gravíticas sobre os segmentos, as forças de actuação exercidas pelos motores da diferentes juntas, e as forças de carga na extremidade. Ao entrarmos com a energia potencial gravítica no Lagrangiano, automaticamente incluímos os efeitos do primeiro tipo de forças nas equações de movimento. Resta-nos só analisar os últimos dois tipos.

Como vimos em 5.2, dada uma variação infinitesimal da variável q_r , a força generalizada respectiva há-de ser uma quantidade tal que, multiplicada pelo deslocamento δ_{q_r} , dá o trabalho realizado no movimento. Considerando as forças de actuação, estas só realizam trabalho se a junta a que estão associadas sofrer um deslocamento. Esse trabalho será igual ao produto desse deslocamento angular pelo momento aplicado pelo motor. Assim, no calculo de F_{q_r} , teremos sempre uma parcela correspondente ao momento de força debitado pelo *motor*_k.

No caso de termos uma ou mais forças de carga, os seus contributos para F_{q_r} serão dados pelos momentos calculados em função do eixo de rotação da junta r.

$$F_{q_r} = , motor_r + \sum_{i=1}^p , f_{carga_p} \quad (5.25)$$

5.3.4 As equações de movimento

Substituindo em (5.14) T e U pelo deduzido em (5.20) e (5.24) obtemos a expressão para o Lagrangiano do manipulador (5.26).

$$L = T \Leftrightarrow U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i Tr[U_{ij} J_i U_{ik}^t] \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n m_i g (A_i^0 \bar{r}_i^i) \quad (5.26)$$

Considerando a variável generalizada $q_r (r = 1, \dots, n)$, a partir do conluído em (5.10) e (5.25) e fazendo as derivações adequadas, tiramos a equação de movimento respectiva (5.27) .

$$F_{q_r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_r} = \\ = \sum_{i=r}^n \sum_{j=1}^i Tr(U_{ij} J_i U_{ir}^t) \ddot{q}_j + \sum_{i=r}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i Tr(U_{ijk} J_i U_{ir}^t) \dot{q}_j \dot{q}_k \Leftrightarrow \sum_{i=r}^n m_i g U_{ir} \bar{r}_i^i$$

Note-se que, dada um junta r, só é relevante para a equação de movimento correspondente as inercias dos segmentos situadas acima dessa junta. Dai os envolver um i maior ou igual a r. Aparece-nos ainda uma notação nova - U_{ijk} .

$$U_{ijk} = \frac{\partial A_i^0}{\partial q_j \partial q_r}$$

Façamos as seguintes manipulações matemáticas.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) &= \sum_{i=r}^n \sum_{j=1}^i Tr(U_{ij} J_i U_{ir}^t) \ddot{q}_j = \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=r, j}^n Tr(U_{ij} J_i U_{ir}^t) \right] \ddot{q}_j = \sum_{j=1}^n D_{rj} \ddot{q}_j \\
&\Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = \sum_{i=r}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i Tr(U_{ijk} J_i U_{ir}^t) \dot{q}_j \dot{q}_k = \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=j, k, r}^i Tr(U_{ijk} J_i U_{ir}^t) \right] \dot{q}_j \dot{q}_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{rjk} \dot{q}_j \dot{q}_k \\
\frac{\partial U}{\partial q_r} &= \sum_{i=r}^n m_i g U_{ir} \bar{r}_i^i = c_r
\end{aligned}$$

Podemos agora reescrever (5.27) na forma (5.28).

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{q_r} = \sum_{j=1}^n D_{rj} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{rjk} \dot{q}_j \dot{q}_k + c_r \\ D_{rj} = \sum_{i=\max(r, j)}^n Tr(U_{ij} J_i U_{ir}^t) \\ h_{rjk} = \sum_{i=\max(j, k, r)}^i Tr(U_{ijk} J_i U_{ir}^t) \\ c_r = \sum_{i=r}^n m_i g U_{ir} \bar{r}_i^i \end{array} \right.$$

D_{rj} está relacionado com as acelerações angulares das juntas. Do ponto de vista físico podemos considera-lo como um parâmetro de ponderação para o calculo do momento induzido pela aceleração da junta j no eixo da junta r. Quanto maior seu valor, mais significativa será a interação entre as acelerações das duas juntas. Matematicamente verificamos que $D_{rj} = D_{jr}$, o que é perfeitamente coerente com a interpretação dada.

Os coeficientes h_{rjk} permitem avaliar o momento induzido na junta r pela interação dinâmica da velocidades das juntas j e k. No caso de $j=k$, o coeficiente está relacionado com a força centrífuga gerada pelo movimento da junta j e sentida na junta r. No caso de $j \neq k$ o coeficiente relaciona-se com a força de Coriolis gerada pelas velocidades da duas juntas e sentida em r.

c_r representa a carga gravítica exercida sobre a junta r. Naturalmente que só serão relevantes para o seu calculo os segmentos acima de r ($i \geq r$).

5.3.5 O sistema de equações

Com o visto até ao momento podemos, juntando as n equações de movimento ($r=1, \dots, n$), obter um sistema que permita o calculo das variáveis de posição do manipulador ao longo do tempo. Note-se que para isto partimos do pressuposto que a expressão (5.25), para o calculo das forças generalizadas, é quando muito função das variáveis generalizadas (q_1, q_2, \dots, q_n). Por outras palavras, não é introduzida nenhuma incógnita adicional ao sistema

que obrigue a dedução de equações adicionais. Tal pode ter de acontecer no caso de, por exemplo, lidarmos com forças de carga desconhecidas que compliquem ainda mais o problema.

$$F_{q_r} = \sum_{j=1}^n D_{rj} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{rjk} \dot{q}_j \dot{q}_k + c_r, r = 1, \dots, n$$

Ou, em forma matricial ...

$$\mathbf{F}_q(\mathbf{q}) = \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{c}(\mathbf{q}) \quad (5.29)$$

Em que ...

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} D_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & D_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & D_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_r(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} h_{r11} & \cdot & \cdot & \cdot & h_{r1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{rn1} & \cdot & \cdot & \cdot & h_{rnn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{H}_1 \dot{\mathbf{q}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{H}_n \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}$$

No caso de matriz quadrada \mathbf{D} ser invertível a partir de (5.29) podemos chegar a (5.30).

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{D}^{\Gamma 1}(\mathbf{q})(\mathbf{F}_q(\mathbf{q}) \Leftrightarrow \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \Leftrightarrow \mathbf{c}(\mathbf{q})) \quad (5.30)$$

Conseguimos assim obter um modelo do comportamento dinâmico do manipulador sob a forma de variáveis de estado.

5.4 Modelização da estrutura simplificada 2D

De forma a simplificar a escrita das expressões e garantir um fácil alargamento à situação 3D com seis pernas, vamos usar um conjunto de notações e convenções diferentes das usadas até ao momento. Assim, consideraremos (q_1, q_2, q_3) como correspondentes aos três graus de liberdade do corpo (x, y, ϕ_z) . Os dois ângulos de cada perna serão referenciados por (q_{n4}, q_{n5}) em que n é o numero da perna (no nosso caso $n=3,4$). Poderá, nomeadamente nos argumentos de alguns somatorios, aparecer a indicação q_{nj} com j não superior a 3. Neste caso o numero da perna será irrelevante, estando a ser referenciado, de forma incondicional, uma das variáveis do corpo.

n	indefinido	3	4
q_1, q_{n1}	x	x	x
q_2, q_{n2}	y	y	y
q_3, q_{n3}	ϕ_z	ϕ_z	ϕ_z
q_{n4}		θ_{23}	θ_{24}
q_{n5}		θ_{33}	θ_{34}

Com isto assente as restantes adaptações de notação, algumas vezes implícitas, serão facilmente compreendidas.

5.4.1 Energia cinética

Dedução da expressão geral

Com o visto na secção anterior temos que considerar cinco corpos ou segmentos: o corpo central, dois segmentos superiores (ancas) e dois segmentos inferiores (canelas). As matrizes de inercia associadas serão: J_3 para o corpo central, J_4 para as ancas e J_5 para as canelas. Note-se que, ao contrario do que acontece para os manipuladores em que a cada variável q_i corresponde uma segmento de matriz J_i , temos três graus de liberdade (q_1, q_2, q_3) associados a um mesmo corpo de matriz J_3 .

A partir de (5.20) e somando as energias cinéticas referentes aos cinco segmentos chegamos a (5.31).

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 Tr[U_{3j} J_i U_{3k}^t] \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^4 \sum_{i=4}^5 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i Tr[U_{ij} J_i U_{ik}^t] \dot{q}_{nj} \dot{q}_{nk} \quad (5.31)$$

Temos um termo, função exclusiva de (q_1, q_2, q_3) , que representa a energia cinética do corpo central. Os restantes dois traduzem a energia de cada uma das pernas. Note-se que a sua estrutura é semelhante à de um manipulador de dois segmentos, com a influência acrescida de uma “base de suporte” móvel (o corpo principal).

As matrizes U

As diferentes matrizes U_{ij} necessárias, bem como as U_{ijk} resultantes da derivação, não serão aqui expostas dado o seu elevado numero e pequeno interesse. Para o seu calculo usámos as matrizes de A.3 de forma a obter as seguintes cinco expressões.

$$\begin{cases} A_3^0(q_1, q_2, q_3) =^{inercial} A_{central}(R_x, R_y, \phi_z) \\ A_4^3(q_{n4}) =^{central} A_1(\gamma_n) *^1 A_2(\theta_{2n}), n = 3, 4 \\ A_5^4(q_{n5}) =^2 A_3(\theta_{2n}), n = 3, 4 \end{cases}$$

Se considerarmos as derivadas - $\frac{\partial A_3^0}{\partial q_1}, \frac{\partial A_3^0}{\partial q_2}, \frac{\partial A_3^0}{\partial q_3}, \frac{\partial A_4^3}{\partial q_{n4}}, \frac{\partial A_5^4}{\partial q_{n5}}$ - juntamente com as matrizes anteriores, estaremos em condições de calcular de forma sistemática as diferentes matrizes U_{ij} por diferentes combinações de multiplicação.

As matrizes de inercia

De forma a simplificar a computação destas matrizes vamos aproximar a forma do corpo central a uma esfera e dos segmentos a cilindros. Considerando uma distribuição de massa homogénea determinamos, resolvendo os integrais de (5.22), os momentos e produtos cruzados de inércia. É aconselhável usar coordenadas esféricas para o corpo central, e coordenadas cilíndricas para os segmentos. As matrizes obtidas, considerando os corpos tridimensionais, foram as seguintes.

$$J_{esfera} = m_{esfera} * \begin{bmatrix} \frac{r_{esfera}^2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_{esfera}^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_{esfera}^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{cilindro} = m_{cilindro} * \begin{bmatrix} \frac{l_{cilindro}^2}{3} & 0 & 0 & \frac{l_{cilindro}}{2} \\ 0 & \frac{r_{cilindro}^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_{cilindro}^2}{2} & 0 \\ \frac{l_{cilindro}}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note-se que $J_{cilindro}$ foi calculada considerando o sistema de referencia posicionado num dos topos, com o eixo dos X a atravessar longitudinalmente o corpo.

Para obter as matrizes (3x3) do modelo planar basta suprimir as terceiras linhas e colunas.

5.4.2 Energia potencial

De (5.24) tiramos a expressão da energia potencial do robô.

$$U = \Leftrightarrow m_3 g(A_3^0 \bar{r}_3^3) \Leftrightarrow \sum_{n=3}^4 \sum_{i=4} m_i g(A_i^0 \bar{r}_i^i) \quad (5.32)$$

5.4.3 As forças generalizadas

No capítulo anterior considerámos o piso rugido e indeformável, podendo o ponto de apoio, no caso de contacto da perna com o chão, ser fixo (não escorregamento) ou móvel (escorregamento). Dissemos ainda que este era um modelo de entre muitos. E, se os resultados com ele obtidos, no caso dum piso rígido, eram satisfatórios e verosímeis, tal já não aconteceria num solo não compacto passível de sofrer deformações plásticas. Em resumo, a interacção solo-apoio pode ser modelizada de diferentes formas devendo o critério de escolha do modelo assentar nas características da situação a estudar.

Em 5.3.5 focámos a necessidade de expressar as forças generalizadas em função das variáveis generalizadas de forma a não introduzir incógnitas adicionais no sistema. Tal facto obrigaria à dedução e inclusão de mais condições, o que comprometeria a obtenção das equações de estado (5.30). O modelo utilizado no capítulo anterior conduziria a esta situação sendo necessário procurar alternativas que, por um lado, descrevam o comportamento real do solo, e, por outro, apresentem o formato matemático mais favorável. As hipóteses são muitas, tendo cada uma as suas vantagens e desvantagens. Dado não estarmos a trabalhar com nenhum piso em particular vamos considerar o modelo que, satisfazendo os nossos requisitos formais, seja matematicamente mais simples.

É intuitivo que, se considerarmos um piso passível de sofrer deformações, quanto maior for o afundamento vertical do apoio no solo, maior será a pressão exercida por este e maior será a reacção normal de resposta. Assim, a expressão (5.33) pode ser usada para estimar a componente vertical da força aplicada, em que v é o afundamento vertical e k, n e F_0 parâmetros do solo (maior ou menor compactes, etc).

$$N = F_0 + kv^n \quad (5.33)$$

Naturalmente que podemos complicar a expressão se começarmos a diferenciar a resposta elástica da plástica, levarmos em consideração pontos de ruptura, etc. Uma modelização rigorosa passará sempre por um estudo experimental das superfícies concretas a descrever.

A equação (5.34) permite estimar as forças de atrito laterais. Entra com um valor máximo F_{max} e um coeficiente k dependentes do solo. A força varia

exponencialmente na gama $[0, F_{max}]$ em função do deslocamento horizontal h do apoio.

$$F_a = F_{max}(1 \Leftrightarrow e^{-\frac{h}{k}}) \quad (5.34)$$

5.4.4 As equações do movimento

À semelhança do que fizemos na secção anterior vamos determinar as equações de movimento do robô relativas a uma variável genérica q_r . Note-se que, ao fazer as derivações necessárias da expressão de Lagrange (5.10), no caso de r ser maior que 3 a primeira parcela de (5.31) e de (5.32) é irrelevante. Dai que tenhamos que dividir as equações de movimento em dois tipos: equações do corpo com parcelas adicionais, para r menor ou igual a 3; equações das pernas, para q_{nr} com $n=3,4$ e $r=4,5$, similares a (5.28) em que as parcelas adicionais desaparecem na derivação.

Assim temos as equações do corpo (5.35) e as equações das pernas (5.36).

$$F_{qr} = \sum_{j=1}^3 (D_{rj})_b \ddot{q}_j + \sum_{n=3}^4 \sum_{j=1}^5 (D_{rj})_l \ddot{q}_{nj} + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (h_{rjk})_b \ddot{q}_j + \sum_{n=3}^4 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 (h_{rjk})_l \ddot{q}_{nj} + c_r \quad (5.35)$$

$$F_{q_{nr}} = \sum_{n=3}^4 \sum_{j=1}^5 (D_{rj})_l \ddot{q}_{nj} + \sum_{n=3}^4 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 (h_{rjk})_l \ddot{q}_{nj} + c_r \quad (5.36)$$

$$\begin{cases} (D_{rj})_b = Tr(U_{3j} J_3 U_{3r}^t) \\ (D_{rj})_l = \sum_{i=\max(4,r,j)}^5 Tr(U_{ij} J_i U_{ir}^t), n = 3, 4 \\ (h_{rjk})_b = Tr(U_{3jk} J_3 U_{3r}^t) \\ (h_{rjk})_l = \sum_{i=\max(4,j,k,r)}^5 Tr(U_{ijk} J_i U_{ir}^t), n = 3, 4 \\ c_r = \Leftrightarrow m_3 g U_{3r} \Leftrightarrow \sum_{i=4}^5 m_i g U_{ir} \bar{r}_i^i, r = 1, \dots, 3 \\ c_r = \sum_{i=r}^5 \Leftrightarrow m_i g U_{ir} \bar{r}_i^i, r = 4, 5; n = 3, 4 \end{cases}$$

5.4.5 O sistema de equações

Pretendemos colocar o nosso sistema de 7 equações e 7 incógnitas na forma de (5.29) em que o vector das incógnitas é dado por (5.37).

$$\mathbf{q}(q_1, q_2, q_3, q_{34}, q_{35}, q_{44}, q_{45})^t \quad (5.37)$$

Atenção que, do ponto de vista matricial, a linha ou coluna associada a uma variável generalizada q_{nr} , passa a ser r , se r for não superior a 3, e $(2 * (n \Leftrightarrow 3) + r)$, se r for maior que 3. Por exemplo, q_{45} está associado à posição sete.

De forma a simplificar a computação podemos considerar D como a soma de três matrizes: $D_b, D_{l_3} e D_{l_4}$. D_b é uma matriz 7×7 tal que $D_b(r, j)$ é igual a $(D_{rj})_b$ para r e j compreendidos entre 1 e 3 e nulo nos restantes casos. D_{l_3} é outra matriz da mesma dimensão em que a perna 3 é vista como um manipulador assente numa base móvel. Os elementos das duas últimas linhas e colunas serão nulos. D_{l_4} é similar a D_{l_3} mas, desta vez, com as linhas e colunas 4 e 5 nulas.

$$D = D_{l_3} + D_{l_4} + D_b \quad (5.38)$$

De forma similar podemos considerar matrizes H_{r_n} para $r=1, \dots, 7$ e $n=3, 4$ e H_{r_b} para $r=1, \dots, 3$. Definindo H_r em (5.39).

$$\begin{cases} \mathbf{H}_r = \mathbf{H}_{r_{l_3}} + \mathbf{H}_{r_{l_4}} + \mathbf{H}_{r_b}, r = 1, \dots, 3 \\ \mathbf{H}_r = \mathbf{H}_{r_{l_3}} + \mathbf{H}_{r_{l_4}}, r = 4, \dots, 7 \end{cases}$$

Estamos agora em condições de definir a função $h(q, \dot{q})$, à semelhança do que fizemos para os manipuladores.

A obtenção do vector com os componentes de energia potencial não oferece dificuldades de maior.

5.5 Resultados obtidos

Na introdução dissemos que um dos principais objectivos da aplicação do formalismo de Lagrange seria a obtenção dum modelo em equações de estado. Para isso, e de acordo com (5.30), seria essencial, depois de calcularmos D , inverter a matriz. Note-se que pretendemos obter D^{-1} como função das variáveis generalizadas, sendo conveniente manipular a matriz simbolicamente.

Para computar D utilizámos o MAPLE, um programa específico que permite trabalhar com matemática simbólica. Dada a complexidade do resultado decidimos não o transcrever para este documento. No entanto, os ficheiros com o código fonte serão fornecidos em anexo de forma à matriz obtida poder ser consultada.

Feito isto passámos ao cálculo da inversa. Para isso começámos por usar a função “inverse” do MAPLE. Esta função aplica a eliminação de Gauss-Jordan sobre uma matriz quadrada, com elementos numéricos e/ou simbólicos, com o objectivo de obter a sua inversa. No caso desta não existir devolve um código de erro.

Após algumas tentativas verificámos que o programa, depois de algum tempo de execução, rebentava por falta de memória da máquina. Naturalmente que nos interrogámos sobre esta enorme necessidade de memória

na manipulação de uma matriz relativamente pequena (7x7). De forma a podermos dar uma resposta a esta questão não nos podemos esquecer de duas coisas. Primeiro, que estamos a trabalhar com expressões que envolvem funções transcendentais trigonométricas, que são as mais difíceis de manipular e simplificar por computador. Segundo, que a eliminação baseia-se na subtração, a uma determinada linha da matriz, do produto de outra linha pelo quociente entre a expressão pivot e a expressão a cancelar, ambas trigonométricas. A primeira circunstância conjugada com a segunda permite antever um factor multiplicador extremamente complexo logo ao fim de poucas iterações. Isto explica as faltas de memória com que nos deparamos.

Procurámos minimizar o numero de símbolos, aumentar a memória RAM expandindo a área de disco para varrimento, optimizar a simplificação das expressões, etc. Tudo se revelou infrutífero. Em resumo, a inversão simbólica de D mostrou ser, senão impossível, pelo menos muito difícil.

Para além disso existe um outro problema. Vamos imaginar que D era invertível e que até conseguíramos, após um esforço tremendo, computar a sua inversa. Não nos podemos esquecer que, após tantas manipulações, seriam cometidos uma série de erros, como truncatura de coeficientes e consequentes cancelamentos imperfeitos. Tais factos, de acordo com as experiências da álgebra numérica, conduziram, muito provavelmente, a um sistema extremamente instável. Independentemente do bom ou mau condicionamento do problema, este método, ao ser aplicado, levaria a resultados instáveis.

Concluindo, estamos perante uma metodologia, senão impossível, extremamente difícil de aplicar que conduz a resultados de pouca ou nenhuma utilidade prática. Temos argumentos de sobra para afirmar que, no caso concreto do robô com pernas, a modelização do sistema em variáveis de estado é impraticável, pelo menos através do formalismo de Lagrange.

No entanto continua a ser possível a descrição do sistema na forma (5.29). Obtidas as equações poderíamos aproximar numericamente as derivadas de primeira e segunda ordem das incógnitas e, à semelhança do que fizemos no capítulo anterior, obter os seus valores no instante $i + 1$ em função dos valores nos instantes i e $i \Leftrightarrow 1$.

5.6 Análise comparativa de duas abordagens

Constatámos que, nem o método baseado nos diagramas de corpos livres (DCL), nem o baseado no formalismo de Lagrange (FL), permitia a modelização em variáveis de estado. Ambos conduzem a um sistema que, ao ser discretizado, leva a um conjunto de equações não-lineares resolúveis, por exemplo, pelo método de Newton.

Em 4.5 falámos dos problemas de convergência e de inversão do jacobiano do método de Newton e que afectam, de igual forma, o DCL e o FL. No entanto, a resolução de um sistema obtido pelo FL leva a complicações adicionais. Não nos podemos esquecer que, para cada iteração, computamos a matriz $D(q(i))$ e invertemo-la, o que, fora a computação adicional, pode ser difícil ou impossível no caso de singularidade.

O DCL é ainda muito mais intuitivo e perceptível que o FL, levando a uma melhor compreensão e conhecimento mais profundo do sistema a estudar. Para além das incógnitas de posição podemos, com o DCL, acompanhar a evolução e comportamento das forças interiores e momentos. Isto é pago por um numero muito superior de equações. Podemos dizer que o FL conduz a uma representação matemática mais condensado apesar de mais difícil de deduzir.

Em resumo, confrontando o DCL com o FL, a metodologia por nós concebida tem um conjunto de vantagens em relação às técnicas tradicionais. As deficiências, nomeadamente a representação menos condensada, são pouco relevantes para a maior parte das aplicações. Assim, a modelização baseada no diagrama de corpo livre é, no nosso entender, a técnica mais aconselhada para a elaboração dum modelo tridimensional do robô com pernas.

Tabela comparativa	
Formalismo de Lagrange (FL)	Diagrama de Corpo Livre(DCL)
Representação condensada	Dedução mais simples das equações Melhor compreensão do sistema Determinação dos momentos e forças internas Maior flexibilidade na modelização da interacção apoio-solo Resolução numérica do sistema simplificada

Capítulo 6

“Gaits” - Tipos de Passo

6.1 Introdução

Uma roda, durante o movimento, está em permanente contacto com o chão, ao contrário da perna que, se tem de levantar e voltar a pousar. Este tipo de movimento traz consigo um problema de fases, ou seja, como e em que altura é que as pernas devem ser levantadas e pousadas, a fim de evitar choques e de otimizar o movimento da máquina com pernas. Este problema é descrito pelo termo “gait” e que se pode definir como sendo a escolha do tempo e do local para colocação e levantamento de cada pé, coordenado com o movimento do corpo do robô, por forma a levar este de um lado para o outro.

A palavra “gait” não se aplica aos robôs com rodas, dado que estas não necessitam de uma descrição do movimento que executam, pois este não varia. Neste capítulo ir-nos-emos referir aos robôs com pernas simplesmente como robôs.

Podemos então utilizar a noção de “gait” para descrever o movimento de diferentes animais e robôs. Inversamente, um “gait” bem definido pode descrever com precisão o movimento de um robô ou animal com pernas. A escolha de um “gait” para um determinado robô depende não só do número de pernas, como da geometria destas e performance desejado. Por outro lado, um arquitecto de robôs tem de ter um bom conhecimento do conceito de “gait”, antes de construir o robô.

6.1.1 Importância do estudo dos “gaits”

Os cavalo possui três “gaits” diferentes: andar, trote e o galope. Desta forma ele otimiza a sua forma de andar conforme as suas necessidades. Tal como o cavalo outros animais possuem diferentes “gaits”, dependendo do tipo de movimento que querem efectuar. Quando animais da mesma

espécie se encontram sob as mesmas condições, de velocidade por exemplo, tendem a adoptar “gaits” idênticos. Os leões, tigres, cães e muitos outros animais utilizam “gaits” muito similares quando andam devagar. Podemos por isso pensar que sob determinadas condições existem “gaits” óptimos, que as diferentes espécies acabam por adoptar espontaneamente.

Torna-se por isso importante determinar quais os gaits óptimos e o porquê de serem óptimos. As razões pelas quais eles tendem a adoptar estes “gaits” óptimos, podem estar relacionadas com a estabilidade do animal, estrutura da perna, etc. A parte mais crucial no desenho de um robô é o desenho da perna e a coordenação deste. Este trabalho deve ser feito com base na análise de “gaits”.

6.2 Métodos utilizados na análise de “gaits”

Na análise de “gaits” utilizam-se dois métodos: o analítico e o gráfico. A aplicação ou não de cada um depende da natureza do problema. De um modo geral o método analítico é a principal ferramenta, sendo um método muito eficaz. O método gráfico é utilizado para se ter uma ideia da geometria do movimento.

Em muitos casos a utilização dos dois métodos torna-se necessária para resolver o problema. A maior parte destes conceitos vêm da língua inglesa, pelo que se torna por vezes complicado arranjar termos portugueses suficientemente claros para traduzir o significado dos termos ingleses. Um exemplo disso é a palavra “gait”, que embora tenha tradução, não encontramos nenhuma palavra que tivesse o mesmo significado.

6.2.1 Conceitos gerais

Aqui apresentam-se algumas definições, necessárias para compreender este capítulo sobre “gaits”.

Fase de transferência: Período em que o pé não está em contacto com o chão. A esta fase é atribuído o estado 1.

Fase de suporte: Período em que o pé está em contacto com o chão, a que se atribui o estado 0.

Ciclo de movimento: Ciclo de movimento de uma perna, constituído pela fase de transferência seguido da fase de suporte.

Período T : Tempo de um ciclo completo de movimento de uma perna, para um “gait” periódico.

Factor de apoio β_i : Razão entre o tempo que a *perna_i* está na fase de suporte e o tempo total do ciclo de movimento da perna, ou seja,

$$\beta_i = \frac{\text{tempo da fase de suporte da perna}_i}{\text{tempo de um ciclo completo de movimento da perna}_i}.$$

Fase da perna, ϕ_i : Fracção de um ciclo de movimento da perna no qual a *perna_i*, em contacto com o chão, fica atrás do contacto da *perna₁* com o chão.

O passo da perna λ : Distância que o centro de gravidade do robô se desloca durante um ciclo de locomoção.

Impulso da perna R : Distância que o pé percorre relativamente ao corpo durante a fase de suporte.

O passo do impulso, P : Distância entre os centros de impulso de duas pernas adjacentes, do mesmo lado do robô.

Matriz do “gait”: É uma matriz com n-colunas cujas sucessivas linhas são números binários (zeros e uns) que correspondem ao sucessivo estado das n-pernas para um gait de um animal ou robô, onde o número total das linhas corresponde ao número de estados que as pernas podem tomar durante um ciclo de locomoção.

Fórmula do “gait”: É uma fórmula g que define um “gait”, para um sistema de locomoção com n-pernas, da seguinte forma: $g = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n)$

Posição de contacto com o chão, $P(X_i, Y_i)$: Par de coordenadas que especifica o ponto de contacto da perna- i com o chão. O sistema de coordenadas que geralmente se escolhe tem por origem o centro de massa do robô. O eixo X está alinhado com a direcção do movimento, o Y é normal a X, estando alinhado à direita de X. O eixo Z é normal a estes dois, estando direccionado para baixo.

Posição inicial do pé- i , (γ_i, δ_i) : É o valor inicial de contacto da perna- i com o chão antes do início de um novo ciclo de locomoção.

Fórmula cinemática do gait: É definida, para um robô com n-pernas como sendo, $K = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n)$

Um acontecimento, ou evento, de um “gait”: É o pisar ou levantar de um pé durante a locomoção. A cada evento é associado um número. Para um sistema de locomoção com n-pernas, os eventos i e $i+n$ são atribuídos ao pisar e levantar da perna- i respectivamente.

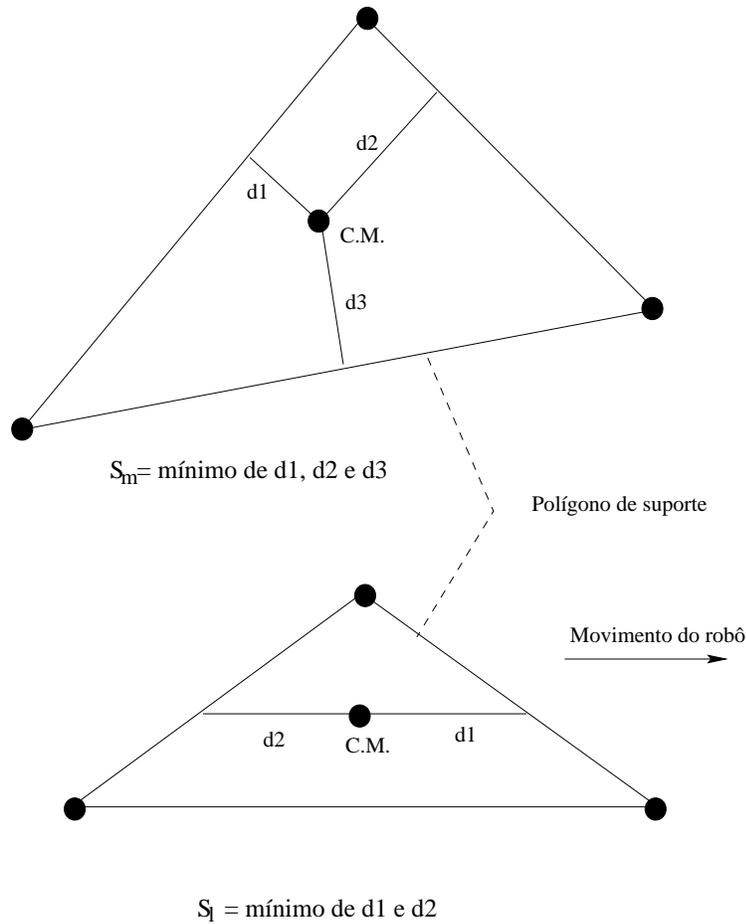


Figura 6.1: Representação dos pés assentes no chão

“*Gait*” *singular*: Um gait diz-se regular, quando dois ou mais eventos ocorrem durante um ciclo de locomoção.

“*Gait*” *regular*: Trata-se de um “gait” com o mesmo factor de apoio para todas as pernas.

“*Gait*” *simétrico*: Estamos perante um “gait” simétrico, quando o movimento de um par de pernas oposto (esquerda-direita) se encontra desfasado de meio ciclo.

Polígono de suporte: É o polígono formado pela união, através de segmentos de recta, das projecções de todos os pés que se encontram na fase de suporte.

“Gait” periódico: Um “gait” diz-se periódico, se os sucessivos impulsos de uma perna originam os mesmos estados nesta e ocorrem no mesmo intervalo de tempo para todas as pernas, sendo esse intervalo de tempo o período T. Caso contrário estamos perante um “gait” não periódico.

Margem de estabilidade, S_m : É a distância mais curta do centro de gravidade a uma das fronteiras do polígono de suporte.

Margem de estabilidade dianteira: É a distância do centro de gravidade à fronteira dianteira do polígono de suporte na direcção do movimento.

Margem de estabilidade traseira: O mesmo que a anterior, em relação à fronteira traseira do polígono de suporte na direcção do movimento.

Margem de estabilidade longitudinal, S_l : É a menor das duas anteriores.

Margem de estabilidade longitudinal de um “gait”, S : Para um “gait” periódico é o mínimo de S_l , durante um ciclo de locomoção. Um “gait” diz-se estaticamente estável se $S \geq 0$. Caso contrário é instável.

Margem de estabilidade longitudinal normalizada em relação ao passo, S^ :* Para um gait periódico G, com a equação cinemática k, $S^*(K) = S(K)/\lambda$.

Margem de estabilidade longitudinal normalizada em relação ao passo do impulso, S_p : Definida como sendo, para o mesmo “gait” da definição anterior, $S_p(K) = S(K)/P$.

Margem de estabilidade longitudinal normalizada em relação ao impulso da perna, S_r : Definida como sendo, para o mesmo “gait” da definição anterior $S_r(K) = S(K)/R$

McGhee e Frank (1968) provaram matematicamente que existe um “gait” óptimo que maximiza a estabilidade estática de uma animal com quatro patas.

$$S^* = \beta \Leftrightarrow 3/4 \text{ para } R \leq P \text{ e } 3/4 < \beta < 1$$

Mais tarde, através de experimentação numérica, Bessonov e Umnov descobriram que para um robô ou animal de seis pernas, a margem de estabilidade de um “gait” é maximizada por um “gait” regular e simétrico definido pela seguinte equação:

$$\phi_3 = \beta, \phi_5 = 2\beta \Leftrightarrow 1, \text{ para } 1/2 < \beta < 1$$

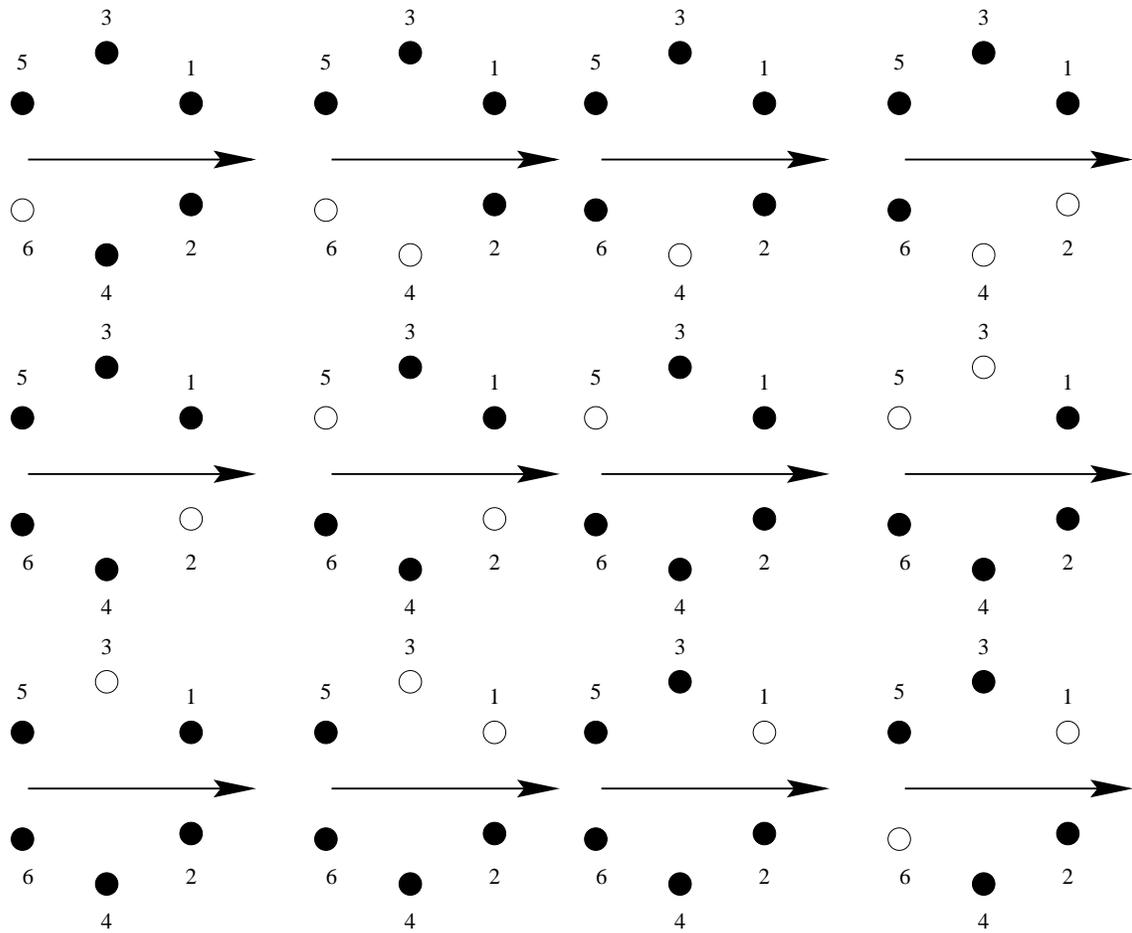


Figura 6.2: Representação dos pés assentes no chão

Um facto interessante é o de que na natureza, muitos animais de quatro e seis patas utilizam este tipo de gaits óptimos na sua locomoção. Existe ainda uma semelhança entre estes dois “gaits” que é a de que a colocação do pé faz-se de trás para a frente e que as pernas estão desfasadas de 180 graus, ou seja, estamos perante um “gait” simétrico. Este tipo de “gait”, que também é regular denomina-se por “wave gait” que em português podemos traduzir como “gait” de onda.

Sun descobriu, também por experimentação numérica, que a margem de estabilidade de um “gait” simétrico e regular, de um animal com $2n$ -pernas, era maximizada por um “gait” de onda. A equação geral de um “gait” de onda é a seguinte:

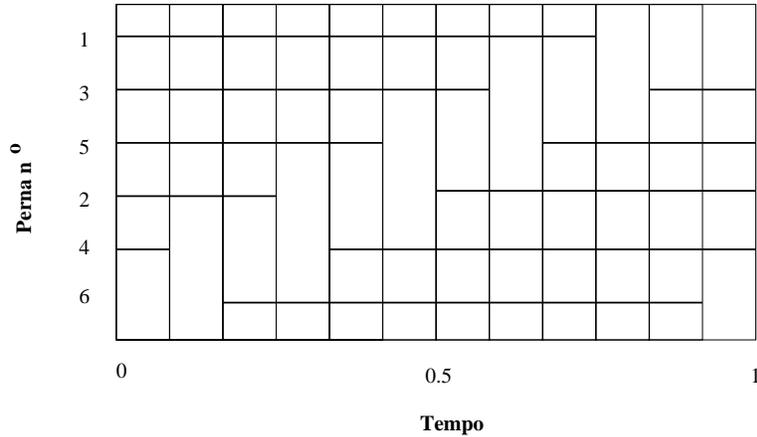


Figura 6.3: Diagrama de um “gait”.

$$\phi_{2m+1} = F(m\beta), \quad m = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow 1, \quad 3/(2n) \leq \beta < 1$$

, onde $F(X)$ é a parte decimal do número real X , ou seja $X \bmod 1$, e m representa as pernas do lado esquerdo numeradas da frente para trás.

6.2.2 Métodos gráficos

Existem muitos métodos úteis para a análise de “gaits”, muitos dos quais serão aqui apresentados. Alguns dos métodos só permitem a análise parcial do “gait”, outros conseguem representar totalmente o “gait” em questão, outros podem ser utilizados para estudar a margem de estabilidade de um “gait” periódico, outros para o estudo de ultrapassagem de obstáculos, etc. Uma característica comum a todos os métodos gráficos, é a de que estes permitem uma melhor percepção do “gait” que os métodos analíticos. Por este motivo eles são muito importantes no estudo dos “gaits”, pois por melhor que seja o método analítico ou algoritmo computacional, nenhum destes dois consegue transmitir de forma intuitiva o “gait” em causa.

Um dos métodos mais utilizados, é o da representação dos pés assentes no chão. O animal ou robô é visto de cima à medida que se vai deslocando. Na figura ?? representamos o nosso robô a deslocar-se da esquerda para a direita, onde os círculos a negro indicam os pés assentes no chão e a seta a direcção do movimento.

Outro método utilizado é o do diagrama do “gait”. Como se pode ver na figura ??, a cada linha horizontal é atribuída uma perna, e cada linha a preto indica o período da fase de suporte de cada perna. O princípio e fim de cada linha preta corresponde respectivamente ao poisar e levantar do

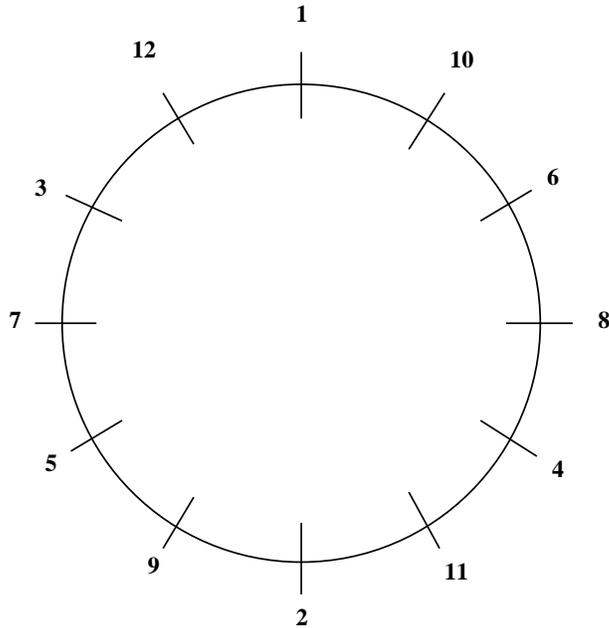


Figura 6.4: Sequência de eventos de um “gait”.

pé correspondente à linha preta. Este método não só regista qual as pernas que se estão a posar e levantar, bem como a duração da fase de de suporte. Permite por isso a extracção de equações matemáticas do movimento.

Uma sequência de eventos, é outra forma de representar um “gait”. Para um “gait” periódico é conveniente representar esta sequência de eventos numa circunferência pois a sequência repete-se sucessivamente. A circunferência representa o tempo, geralmente normalizado para 1. Podemos então ver na figura ?? o mesmo “gait” que o representado pelo diagrama do “gait”. Os eventos 1, 2, 3, 4, 5, 6 representam os eventos de colocação dos pés e os eventos 7, 8, 9, 10, 11, 12 os de levantamento dos mesmos. A sequência deve ser lida seguindo os ponteiros do relógio.

Outro método é a representação sucessiva do polígono de suporte do “gait”. Este é semelhante ao método dos pés assentes no chão, pois basta unir os pontos que estão assentes no chão para obter o polígono de suporte. Temos outro método que consiste na representação estática do polígono de suporte, que é desenhada tendo como base o diagrama do “gait” em questão. A representação lateral do movimento é mais um método, muito útil para estudar a transposição de obstáculos. Existem muitos outros métodos como sejam os criados com a ajuda de computadores, para simular o movimento do robô, etc.

6.3 “Gaits” diferentes para situações diferentes

O problema da selecção de gaits depende factores diversos, os quais nós enumeramos de seguida:

- Condição do terreno
- Estabilidade requerida
- Facilidade de controlo
- Suavidade do movimento
- Velocidade desejada
- Mobilidade desejada
- Consumo desejado

O nosso estudo de selecção de “gaits” irá debruçar-se sobre um dos factores acima enumerados, o da condição do terreno, que é sem dúvida o factor que mais condiciona a escolha do “gait” apropriado. Um terreno pode ser dividido em pequenas células do tamanho do pé do robô. Temos então células de dois tipos: o tipo proibida, em que o robô não pode colocar o pé; e o tipo não proibida, em que o robô pode colocar o pé.

Temos então três tipos de terrenos:

Perfeito: Aqui não existem células proibidas.

Normal: Existem algumas células proibidas, embora a maioria seja do tipo não proibida.

Duro: Neste tipo de terrenos existe uma grande quantidade de células proibidas no caminho do robô.

Dado já não haver muito tempo, nós vamos efectuar o estudo de selecção de “gaits” para o caso do terreno perfeito e plano, ou seja sem inclinação. O estudo de “gaits” sobre os outros tipos de terrenos receberá aqui uma pequena referência, ficando para outros a tarefa de os implementar e testar no nosso simulador do robô.

Se o terreno em questão for perfeito, “gaits” periódicos devem ser utilizados, pois são mais fáceis de implementar computacionalmente. Dentro deste

tipo de “gaits” temos os de onda que como já foi visto otimizam a margem de estabilidade do “gait”. Os “gaits” de fase igual conseguem distribuir a colocação e levantamento dos pés de uma forma equilibrada, motivo pelo qual não só consomem menos energia como dão mais suavidade ao movimento do robô. Tanto num como no outro a colocação dos pés faz-se de trás para a frente, sendo este tipo de “gaits” denominados de “gaits” periódicos trás para a frente. Se a sequência de colocação das pernas for a inversa dá-se o nome de “gaits” periódicos frente para trás. Estes últimos são geralmente utilizados nos “gaits” do tipo siga o chefe, onde as pernas de trás são colocadas no sítio onde estavam as da frente.

Em terrenos duros a utilização de “gaits” periódicos não é uma boa ideia, pois não têm a agilidade e liberdade suficiente para colocarem os pés nos locais desejados, que não são muitos. Temos pois que utilizar “gaits” não periódicos, como sejam o de ultrapassagem de obstáculos, de siga o chefe descontinuo, etc.

Por último temos os terrenos normais, onde se utilizam “gaits” que são uma mistura dos utilizados nos terrenos duros e perfeitos. Um dos que se costuma utilizar é o siga o chefe periódico (ou contínuo), onde as células iniciais são escolhidas e as pernas traseiras são colocadas no local das dianteiras, utilizando à mistura um “gait” frente para trás. Outro que é utilizado “gait” hábil, onde o robô negocia com o terreno o local onde irá colocar o pé. Ele começa por colocar o pé numa célula, se lhe for permitido por o pé tem o caso resolvido se não volta a levantar e coloca o pé noutra local até encontrar uma célula onde possa colocar o pé. Outra opção é o “gait” livre.

Na tabela seguinte podemos ver um resumo dos diferentes “gaits”, apresentados no livro “Machines That Walk” que nos seuiu de base para este capítulo.

“Gaits”		estabilidade do gait	tipo terreno	implementação computacional	suavidade do movimento
P E R I O D I C O S	onda	bom	perfeito	fácil	boa
	fase igual	bom	perfeito	fácil	boa
	onda frente para trás	razoável	perfeito	fácil	boa
	fase igual frente para trás	razoável	perfeito	fácil	boa
	hábil	bom/razoável	normal	normal	boa
	siga o chefe contínuo	razoável	normal/duro	normal	boa
N R A I O O D P I E C - O S	siga o chefe descontínuo	muito boa	duro	difícil	má
	grandes obstáculos	razoável	com obstáculos	normal	má
	colocação do pé com precisão	muito boa	duro com obstáculos	muito difícil	má
	livre	boa	duro	difícil	razoável

Apêndice A

Sumário da modelização cinemática

A.1 Matrizes de transformação

A.1.1 Relação entre o sistema inercial e o sistema central do corpo do robô

$$\begin{aligned} & \textit{inercial} A_{\textit{central}}(R_x, R_y, R_z, \phi_x, \phi_y, \phi_z) = \\ & = \begin{bmatrix} C(\phi_y)C(\phi_z) & S(\phi_y)S(\phi_x) \Leftrightarrow C(\phi_y)S(\phi_z)C(\phi_x) & C(\phi_y)S(\phi_z)S(\phi_x) + S(\phi_y)C(\phi_x) & R_x \\ S(\phi_z) & C(\phi_z)C(\phi_x) & \Leftrightarrow C(\phi_z)S(\phi_x) & R_y \\ \Leftrightarrow C(\phi_y)S(\phi_z) & S(\phi_y)S(\phi_z)C(\phi_x) + C(\phi_y)S(\phi_x) & C(\phi_y)C(\phi_x) \Leftrightarrow S(\phi_y)S(\phi_z)S(\phi_x) & R_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A.1.2 Matrizes de transformação associadas a cada perna

$$\textit{central} A_{\textit{base}}(\gamma) = \begin{bmatrix} \Leftrightarrow \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 & \textit{dist} * \cos(\gamma) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & \Leftrightarrow \textit{dist} * \sin(\gamma) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textit{base} A_1(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & 0 & \Leftrightarrow \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & \Leftrightarrow \sin(\theta_2) & 0 & \Leftrightarrow anca * \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & \Leftrightarrow anca * \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3(\theta_3) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & \Leftrightarrow \sin(\theta_3) & 0 & canela * \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & canela * \sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NOTA: A partir daqui chamaremos ao *sistema*₀ referencial *base*.

A.2 Cinemática inversa

A.2.1 Função Inversa

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = F^{-1}(p_x, p_y, p_z)$$

$$\begin{cases} F_{\theta_1}^{-1}(p_x, p_y, p_z) = \arctan \frac{p_y}{p_x} \\ F_{\theta_2}^{-1}(p_x, p_y, p_z) = \Leftrightarrow (\arccos(\frac{a^2 - c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2a\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}) \Leftrightarrow \arctan(\Leftrightarrow \frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}})) \\ F_{\theta_3}^{-1}(p_x, p_y, p_z) = \pi + \arccos(\frac{a^2 - c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2a\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}) + \arccos(\frac{-a^2 + c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}) \end{cases}$$

A.2.2 Relação entre grandezas angulares e lineares

$$\Omega = J_{F^{-1}}(p_x, p_y, p_z) * V \text{ (velocidades)}$$

$$, = J_{F^{-1}}(p_x, p_y, p_z) * A \text{ (acelerações)}$$

A.3 Matrizes de transformação do modelo simplificado 2D

$${}^{inercial}A_{central}(R_x, R_y, \phi_z) = \begin{bmatrix} \cos(\phi_z) & \Leftrightarrow \sin(\phi_z) & R_x \\ \sin(\phi_z) & \cos(\phi_z) & R_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{central}A_1(\gamma_i) = \begin{bmatrix} \Leftrightarrow \cos(\gamma_i) & 0 & dist * \cos(\gamma_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \gamma_3 = 180 \\ \gamma_4 = 0 \end{cases}$$

$${}^1A_2(\theta_{2i}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{2i}) & \Leftrightarrow \sin(\theta_{2i}) & \Leftrightarrow anca * \cos(\theta_{2i}) \\ \sin(\theta_{2i}) & \cos(\theta_{2i}) & \Leftrightarrow anca * \sin(\theta_{2i}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3(\theta_{3i}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{3i}) & \Leftrightarrow \sin(\theta_{3i}) & canela * \cos(\theta_{3i}) \\ \sin(\theta_{3i}) & \cos(\theta_{3i}) & canela * \sin(\theta_{3i}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apêndice B

Modelização a 2D com os motores desactivados (Cap. 4)

B.1 Equações descriptoras do sistema

B.1.1 Equações de Newton de translacção e de rotaçção Corpo

$$\begin{cases} m_{cp} \frac{d^2 R_x}{dt^2} = T_{x3} + T_{x4} \\ m_{cp} \frac{d^2 R_y}{dt^2} = T_{y3} + T_{y4} \Leftrightarrow m_{cp} g \\ I_{cp} \frac{d^2 \phi_z}{dt^2} = M_{cp} \end{cases}$$

Perna 3

$$\begin{cases} m_a \frac{d^2 R_{ax3}}{dt^2} = T_{jx3} \Leftrightarrow T_{x3} \\ m_a \frac{d^2 R_{ay3}}{dt^2} = T_{jy3} \Leftrightarrow T_{y3} \Leftrightarrow m_a g \\ \frac{d^2 \theta_{23}}{dt^2} = \frac{vers_3 M_{a3}}{I_a} \Leftrightarrow \frac{vers_3 M_{cp}}{I_{cp}} \\ m_c \frac{d^2 R_{cx3}}{dt^2} = F_{a3} \Leftrightarrow T_{jx3} \\ m_c \frac{d^2 R_{cy3}}{dt^2} = N_3 \Leftrightarrow T_{jy3} \Leftrightarrow m_c g \\ \frac{d^2 \theta_{33}}{dt^2} = \frac{vers_3 M_{c3}}{I_c} \Leftrightarrow \frac{vers_3 M_{a3}}{I_a} \end{cases}$$

Perna 4

$$\left\{ \begin{array}{l} m_a \frac{d^2 R_{ax4}}{dt^2} = T_{jx4} \Leftrightarrow T_{x4} \\ m_a \frac{d^2 R_{ay4}}{dt^2} = T_{jy4} \Leftrightarrow T_{y4} \Leftrightarrow m_a g \\ \frac{d^2 \theta_{24}}{dt^2} = \frac{vers_4 M_{a4}}{I_a} \Leftrightarrow \frac{vers_4 M_{cp}}{I_{cp}} \\ m_c \frac{d^2 R_{cx4}}{dt^2} = F_{a4} \Leftrightarrow T_{jx4} \\ m_c \frac{d^2 R_{cy4}}{dt^2} = N_4 \Leftrightarrow T_{jy4} \Leftrightarrow m_c g \\ \frac{d^2 \theta_{34}}{dt^2} = \frac{vers_4 M_{c4}}{I_c} \Leftrightarrow \frac{vers_4 M_{a4}}{I_a} \end{array} \right.$$

B.1.2 Equações dos momentos de força

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{cp} = \sum_{i=3}^4 [(R_{bxi} \Leftrightarrow R_x) T_{yi} + (R_{byi} \Leftrightarrow R_y) T_{xi}] \\ M_{a3} = [(R_{bx3} \Leftrightarrow R_{ax3})(\Leftrightarrow T_{y3}) + (R_{by3} \Leftrightarrow R_{ay3})(\Leftrightarrow T_{x3})] + \\ + [(R_{jx3} \Leftrightarrow R_{ax3}) T_{jy3} + (R_{jy3} \Leftrightarrow R_{ay3}) T_{jx3}] \\ M_{c3} = [(R_{jx3} \Leftrightarrow R_{cx3})(\Leftrightarrow T_{jy3}) + (R_{jy3} \Leftrightarrow R_{cy3})(\Leftrightarrow T_{jx3})] + \\ + [(R_{px3} \Leftrightarrow R_{cx3}) N_3 + (R_{py3} \Leftrightarrow R_{cy3}) F_{a3}] \\ M_{a4} = [(R_{bx4} \Leftrightarrow R_{ax4})(\Leftrightarrow T_{y4}) + (R_{by4} \Leftrightarrow R_{ay4})(\Leftrightarrow T_{x4})] + \\ + [(R_{jx4} \Leftrightarrow R_{ax4}) T_{jy4} + (R_{jy4} \Leftrightarrow R_{ay4}) T_{jx4}] \\ M_{c4} = [(R_{jx4} \Leftrightarrow R_{cx4})(\Leftrightarrow T_{jy4}) + (R_{jy4} \Leftrightarrow R_{cy4})(\Leftrightarrow T_{jx4})] + \\ + [(R_{px4} \Leftrightarrow R_{cx4}) N_4 + (R_{py4} \Leftrightarrow R_{cy4}) F_{a4}] \end{array} \right.$$

B.1.3 Restrições da estrutura

Perna 3

$$\left\{ \begin{array}{l}
 R_{ax3} = \frac{\cos(\phi_z) \cos(\gamma_3) anca \cos(\theta_{23})}{2} + \frac{\sin(\phi_z) anca \sin(\theta_{23})}{2} + \cos(\phi_z) dist \cos(\gamma_3) + R_x \\
 R_{ay3} = \frac{\sin(\phi_z) \cos(\gamma_3) anca \cos(\theta_{23})}{2} \Leftrightarrow \frac{\cos(\phi_z) anca \sin(\theta_{23})}{2} + \sin(\phi_z) dist \cos(\gamma_3) + R_y \\
 R_{cx3} = \Leftrightarrow \frac{canela \cos(\theta_{33}) \cos(\phi_z) \cos(\gamma_3) \cos(\theta_{23})}{2} \Leftrightarrow \frac{canela \cos(\theta_{33}) \sin(\phi_z) \sin(\theta_{23})}{2} + \\
 + \frac{canela \sin(\theta_{33}) \cos(\phi_z) \cos(\gamma_3) \sin(\theta_{23})}{2} \Leftrightarrow \frac{canela \sin(\theta_{33}) \sin(\phi_z) \cos(\theta_{23})}{2} + \\
 + \cos(\phi_z) \cos(\gamma_3) anca \cos(\theta_{23}) + \sin(\phi_z) anca \sin(\theta_{23}) + \cos(\phi_z) dist \cos(\gamma_3) + R_x \\
 R_{cy3} = \Leftrightarrow \frac{canela \cos(\theta_{33}) \sin(\phi_z) \cos(\gamma_3) \cos(\theta_{23})}{2} + \frac{canela \cos(\theta_{33}) \cos(\phi_z) \sin(\theta_{23})}{2} + \\
 + \frac{canela \sin(\theta_{33}) \sin(\phi_z) \cos(\gamma_3) \sin(\theta_{23})}{2} + \frac{canela \sin(\theta_{33}) \cos(\phi_z) \cos(\theta_{23})}{2} + \\
 + \sin(\phi_z) \cos(\gamma_3) anca \cos(\theta_{23}) \Leftrightarrow \cos(\phi_z) anca \sin(\theta_{23}) + \sin(\phi_z) dist \cos(\gamma_3) + R_y \\
 R_{bx3} = \cos(\phi_z) dist \cos(\gamma_3) + R_x \\
 R_{by3} = \sin(\phi_z) dist \cos(\gamma_3) + R_y \\
 R_{jx3} = \cos(\phi_z) \cos(\gamma_3) anca \cos(\theta_{23}) + \sin(\phi_z) anca \sin(\theta_{23}) + \cos(\phi_z) dist \cos(\gamma_3) + R_x \\
 R_{jy3} = \sin(\phi_z) \cos(\gamma_3) anca \cos(\theta_{23}) \Leftrightarrow \cos(\phi_z) anca \sin(\theta_{23}) + \sin(\phi_z) dist \cos(\gamma_3) + R_y \\
 R_{px3} = \Leftrightarrow canela \cos(\theta_{33}) \cos(\phi_z) \cos(\gamma_3) \cos(\theta_{23}) \Leftrightarrow canela \cos(\theta_{33}) \sin(\phi_z) \sin(\theta_{23}) + \\
 + canela \sin(\theta_{33}) \cos(\phi_z) \cos(\gamma_3) \sin(\theta_{23}) \Leftrightarrow canela \sin(\theta_{33}) \sin(\phi_z) \cos(\theta_{23}) + \\
 + \cos(\phi_z) \cos(\gamma_3) anca \cos(\theta_{23}) + \sin(\phi_z) anca \sin(\theta_{23}) + \cos(\phi_z) dist \cos(\gamma_3) + R_x \\
 R_{py3} = \Leftrightarrow canela \cos(\theta_{33}) \sin(\phi_z) \cos(\gamma_3) \cos(\theta_{23}) + canela \cos(\theta_{33}) \cos(\phi_z) \sin(\theta_{23}) + \\
 + canela \sin(\theta_{33}) \sin(\phi_z) \cos(\gamma_3) \sin(\theta_{23}) + canela \in (\theta_{33}) \cos(\phi_z) \cos(\theta_{23}) + \\
 + \sin(\phi_z) \cos(\gamma_3) anca \cos(\theta_{23}) \Leftrightarrow \cos(\phi_z) anca \sin(\theta_{23}) + \sin(\phi_z) dist \cos(\gamma_3) + R_y
 \end{array} \right.$$

Perna 4

$$\left. \begin{aligned}
 R_{ax4} &= \frac{\cos(\phi_z) \cos(\gamma_4) anca \cos(\theta_{24})}{2} + \frac{\sin(\phi_z) anca \sin(\theta_{24})}{2} + \cos(\phi_z) dist \cos(\gamma_4) + R_x \\
 R_{ay4} &= \frac{\sin(\phi_z) \cos(\gamma_4) anca \cos(\theta_{24})}{2} \Leftrightarrow \frac{\cos(\phi_z) anca \sin(\theta_{24})}{2} + \sin(\phi_z) dist \cos(\gamma_4) + R_y \\
 R_{cx4} &= \Leftrightarrow \frac{canela \cos(\theta_{34}) \cos(\phi_z) \cos(\gamma_4) \cos(\theta_{24})}{2} \Leftrightarrow \frac{canela \cos(\theta_{34}) \sin(\phi_z) \sin(\theta_{24})}{2} + \\
 &+ \frac{canela \sin(\theta_{34}) \cos(\phi_z) \cos(\gamma_4) \sin(\theta_{24})}{2} \Leftrightarrow \frac{canela \sin(\theta_{34}) \sin(\phi_z) \cos(\theta_{24})}{2} + \\
 &+ \cos(\phi_z) \cos(\gamma_4) anca \cos(\theta_{24}) + \sin(\phi_z) anca \sin(\theta_{24}) + \cos(\phi_z) dist \cos(\gamma_4) + R_x \\
 R_{cy4} &= \Leftrightarrow \frac{canela \cos(\theta_{34}) \sin(\phi_z) \cos(\gamma_4) \cos(\theta_{24})}{2} + \frac{canela \cos(\theta_{34}) \cos(\phi_z) \sin(\theta_{24})}{2} + \\
 &+ \frac{canela \sin(\theta_{34}) \sin(\phi_z) \cos(\gamma_4) \sin(\theta_{24})}{2} + \frac{canela \sin(\theta_{34}) \cos(\phi_z) \cos(\theta_{24})}{2} + \\
 &+ \sin(\phi_z) \cos(\gamma_4) anca \cos(\theta_{24}) \Leftrightarrow \cos(\phi_z) anca \sin(\theta_{24}) + \sin(\phi_z) dist \cos(\gamma_4) + R_y \\
 R_{bx4} &= \cos(\phi_z) dist \cos(\gamma_4) + R_x \\
 R_{by4} &= \sin(\phi_z) dist \cos(\gamma_4) + R_y \\
 R_{jx4} &= \cos(\phi_z) \cos(\gamma_4) anca \cos(\theta_{24}) + \sin(\phi_z) anca \sin(\theta_{24}) + \cos(\phi_z) dist \cos(\gamma_4) + R_x \\
 R_{jy4} &= \sin(\phi_z) \cos(\gamma_4) anca \cos(\theta_{24}) \Leftrightarrow \cos(\phi_z) anca \sin(\theta_{24}) + \sin(\phi_z) dist \cos(\gamma_4) + R_y \\
 R_{px4} &= \Leftrightarrow canela \cos(\theta_{34}) \cos(\phi_z) \cos(\gamma_4) \cos(\theta_{24}) \Leftrightarrow canela \cos(\theta_{34}) \sin(\phi_z) \sin(\theta_{24}) + \\
 &+ canela \sin(\theta_{34}) \cos(\phi_z) \cos(\gamma_4) \sin(\theta_{24}) \Leftrightarrow canela \sin(\theta_{34}) \sin(\phi_z) \cos(\theta_{24}) + \\
 &+ \cos(\phi_z) \cos(\gamma_4) anca \cos(\theta_{24}) + \sin(\phi_z) anca \sin(\theta_{24}) + \cos(\phi_z) dist \cos(\gamma_4) + R_x \\
 R_{py4} &= \Leftrightarrow canela \cos(\theta_{34}) \sin(\phi_z) \cos(\gamma_4) \cos(\theta_{24}) + canela \cos(\theta_{34}) \cos(\phi_z) \sin(\theta_{24}) + \\
 &+ canela \sin(\theta_{34}) \sin(\phi_z) \cos(\gamma_4) \sin(\theta_{24}) + canela \sin(\theta_{34}) \cos(\phi_z) \cos(\theta_{24}) + \\
 &+ \sin(\phi_z) \cos(\gamma_4) anca \cos(\theta_{24}) \Leftrightarrow \cos(\phi_z) anca \sin(\theta_{24}) + \sin(\phi_z) dist \cos(\gamma_4) + R_y
 \end{aligned} \right\}$$

B.1.4 Restrições devidas ao contacto com o solo

O estado de cada perna é descrito por um e só um dos subsistemas indicados. A superfície de apoio é matematicamente descrita por

$$y = \varrho(x)$$

Não existe contacto com o solo

$$\begin{cases} N_3 = 0 \\ F_{a3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_4 = 0 \\ F_{a4} = 0 \end{cases}$$

Contacto sem escorregamento no ponto (a,b) em que $b = \varrho(a)$

$$\begin{cases} R_{px3} = a \\ R_{py3} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{px4} = a \\ R_{py4} = b \end{cases}$$

Contacto com escorregamento

$$\begin{cases} F_{a3} = \mu_D * N_3 \\ R_{py3} = \varrho(R_{px3}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{a4} = \mu_D * N_4 \\ R_{py4} = \varrho(R_{px4}) \end{cases}$$

B.2 Sistema discretizado para resolução computacional

B.2.1 Equações de Newton de rotação e translacção

Corpo

$$\begin{cases} \frac{\Delta t^2}{m_{cp}}(T_{x3}[i] + T_{x4}[i]) \Leftrightarrow R_x[i \Leftrightarrow 1] + 2R_x[i] + R_x[i + 1] = 0 \\ \frac{\Delta t^2}{m_{cp}}(T_{y3}[i] + T_{y4}[i] \Leftrightarrow m_{cp}g) \Leftrightarrow R_y[i \Leftrightarrow 1] + 2R_y[i] + R_y[i + 1] = 0 \\ \frac{\Delta t^2}{I_{cp}}M_{cp}[i] \Leftrightarrow \phi_z[i \Leftrightarrow 1] + 2\phi_z[i] + \phi_z[i + 1] = 0 \end{cases}$$

Perna 3

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\Delta t^2}{m_a} (T_{jx3}[i] \Leftrightarrow T_{x3}[i]) \Leftrightarrow R_{ax3}[i \Leftrightarrow 1] + 2R_{ax3}[i] + \frac{1}{2}anca \cos(\phi_z[i+1] + \theta_{23}[i+1]) + \\
 + dist \cos(\phi_z[i+1]) \Leftrightarrow R_x[i+1] = 0 \\
 \\
 \frac{\Delta t^2}{m_a} (T_{jy3}[i] \Leftrightarrow T_{y3}[i] \Leftrightarrow mag) \Leftrightarrow R_{ax3}[i \Leftrightarrow 1] + 2R_{ax3}[i] + \frac{1}{2}anca \sin(\phi_z[i+1] + \theta_{23}[i+1]) + \\
 + dist \sin(\phi_z[i+1]) \Leftrightarrow R_y[i+1] = 0 \\
 \\
 \Delta t^2 \left(\frac{vers_3 M_{a3}}{I_a} \Leftrightarrow \frac{vers_3 M_{cp}}{I_{cp}} \right) \Leftrightarrow \theta_{23}[i \Leftrightarrow 1] + 2\theta_{23}[i] + \theta_{23}[i+1] = 0 \\
 \\
 \frac{\Delta t^2}{m_c} (F_{a3}[i] \Leftrightarrow T_{jx3}[i]) \Leftrightarrow R_{cx3}[i \Leftrightarrow 1] + 2R_{cx3}[i] \Leftrightarrow \frac{1}{2}canela(\cos(\phi_z[i+1]) \cos(\theta_{23}[i+1] + \\
 + \theta_{33}[i+1]) \Leftrightarrow \sin(\phi_z[i+1]) \sin(\theta_{23}[i+1] + \theta_{33}[i+1])) + anca \cos(\phi_z[i+1] + \theta_{23}[i+1]) + \\
 + dist \cos(\phi_z[i+1]) \Leftrightarrow R_x[i+1] = 0 \\
 \\
 \frac{\Delta t^2}{m_c} (N_3[i] \Leftrightarrow T_{jy3}[i] \Leftrightarrow mcg) \Leftrightarrow R_{cx3}[i \Leftrightarrow 1] + 2R_{cx3}[i] \Leftrightarrow \frac{1}{2}canela(\sin(\phi_z[i+1]) \cos(\theta_{23}[i+1] + \\
 + \theta_{33}[i+1]) + \cos(\phi_z[i+1]) \sin(\theta_{23}[i+1] + \theta_{33}[i+1])) + anca \sin(\phi_z[i+1] + \theta_{23}[i+1]) + \\
 + dist \sin(\phi_z[i+1]) \Leftrightarrow R_y[i+1] = 0 \\
 \\
 \Delta t^2 \left(\frac{vers_3 M_{c3}}{I_c} \Leftrightarrow \frac{vers_3 M_{a3}}{I_a} \right) \Leftrightarrow \theta_{33}[i \Leftrightarrow 1] + 2\theta_{33}[i] + \theta_{33}[i+1] = 0
 \end{array} \right.$$

Perna 4

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\Delta t^2}{m_a} (T_{jx4}[i] \Leftrightarrow T_{x4}[i]) \Leftrightarrow R_{ax4}[i \Leftrightarrow 1] + 2R_{ax4}[i] \Leftrightarrow \frac{1}{2}anca \cos(\phi_z[i+1] \Leftrightarrow \theta_{24}[i+1]) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow dist \cos(\phi_z[i+1]) \Leftrightarrow R_x[i+1] = 0 \\
 \\
 \frac{\Delta t^2}{m_a} (T_{jy4}[i] \Leftrightarrow T_{43}[i] \Leftrightarrow mag) \Leftrightarrow R_{ax4}[i \Leftrightarrow 1] + 2R_{ax4}[i] \Leftrightarrow \frac{1}{2}anca \sin(\phi_z[i+1] \Leftrightarrow \theta_{24}[i+1]) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow dist \sin(\phi_z[i+1]) \Leftrightarrow R_y[i+1] = 0 \\
 \\
 \Delta t^2 \left(\frac{vers_4 M_{a4}}{I_a} \Leftrightarrow \frac{vers_4 M_{cp}}{I_{cp}} \right) \Leftrightarrow \theta_{24}[i \Leftrightarrow 1] + 2\theta_{24}[i] + \theta_{24}[i+1] = 0 \\
 \\
 \frac{\Delta t^2}{m_c} (F_{a4}[i] \Leftrightarrow T_{jx4}[i]) \Leftrightarrow R_{cx4}[i \Leftrightarrow 1] + 2R_{cx4}[i] + \frac{1}{2}canela(\cos(\phi_z[i+1]) \cos(\theta_{24}[i+1] \Leftrightarrow \\
 + \theta_{34}[i+1]) + \sin(\phi_z[i+1]) \sin(\theta_{24}[i+1] + \theta_{34}[i+1])) \Leftrightarrow anca \cos(\phi_z[i+1] \Leftrightarrow \theta_{24}[i+1]) + \\
 \Leftrightarrow dist \cos(\phi_z[i+1]) \Leftrightarrow R_x[i+1] = 0 \\
 \\
 \frac{\Delta t^2}{m_c} (N_4[i] \Leftrightarrow T_{jy4}[i] \Leftrightarrow mcg) \Leftrightarrow R_{cx4}[i \Leftrightarrow 1] + 2R_{cx4}[i] + \frac{1}{2}canela(\sin(\phi_z[i+1]) \cos(\theta_{24}[i+1] + \\
 + \theta_{34}[i+1]) \Leftrightarrow \cos(\phi_z[i+1]) \sin(\theta_{24}[i+1] + \theta_{34}[i+1])) \Leftrightarrow anca \sin(\phi_z[i+1] \Leftrightarrow \theta_{24}[i+1]) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow dist \sin(\phi_z[i+1]) \Leftrightarrow R_y[i+1] = 0 \\
 \\
 \Delta t^2 \left(\frac{vers_4 M_{c4}}{I_c} \Leftrightarrow \frac{vers_4 M_{a4}}{I_a} \right) \Leftrightarrow \theta_{34}[i \Leftrightarrow 1] + 2\theta_{34}[i] + \theta_{34}[i+1] = 0
 \end{array} \right.$$

B.2.2 Equações dos momentos de força

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{cp}[i] \Leftrightarrow \sum_{j=3}^4 [(R_{bxj}[i] \Leftrightarrow R_x[i])T_{yj}[i] + (R_{byj}[i] \Leftrightarrow R_y[i])T_{xj}[i]] = 0 \\ \\ M_{a3}[i] \Leftrightarrow [(R_{bx3}[i] \Leftrightarrow R_{ax3}[i])(\Leftrightarrow T_{y3}[i]) + (R_{by3}[i] \Leftrightarrow R_{ay3}[i])(\Leftrightarrow T_{x3}[i])] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [(R_{jx3}[i] \Leftrightarrow R_{ax3}[i])T_{jy3}[i] + (R_{jy3}[i] \Leftrightarrow R_{ay3}[i])T_{jx3}[i]] = 0 \\ \\ M_{c3}[i] \Leftrightarrow [(R_{jx3}[i] \Leftrightarrow R_{cx3}[i])(\Leftrightarrow T_{jy3}[i]) + (R_{jy3}[i] \Leftrightarrow R_{cy3}[i])(\Leftrightarrow T_{jx3}[i])] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [(R_{px3}[i] \Leftrightarrow R_{cx3}[i])N_3[i] + (R_{py3}[i] \Leftrightarrow R_{cy3}[i])Fa_3[i]] = 0 \\ \\ M_{a4}[i] \Leftrightarrow [(R_{bx4}[i] \Leftrightarrow R_{ax4}[i])(\Leftrightarrow T_{y4}[i]) + (R_{by4}[i] \Leftrightarrow R_{ay4}[i])(\Leftrightarrow T_{x4}[i])] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [(R_{jx4}[i] \Leftrightarrow R_{ax4}[i])T_{jy4}[i] + (R_{jy4}[i] \Leftrightarrow R_{ay4}[i])T_{jx4}[i]] = 0 \\ \\ M_{c4}[i] \Leftrightarrow [(R_{jx4}[i] \Leftrightarrow R_{cx4}[i])(\Leftrightarrow T_{jy4}[i]) + (R_{jy4}[i] \Leftrightarrow R_{cy4}[i])(\Leftrightarrow T_{jx4}[i])] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [(R_{px4}[i] \Leftrightarrow R_{cx4}[i])N_4[i] + (R_{py4}[i] \Leftrightarrow R_{cy4}[i])Fa_4[i]] = 0 \end{array} \right.$$

B.2.3 Restrições devidas ao contacto com o solo

O estado de cada perna é descrito por um e só um dos subsistemas indicados. A superfície de apoio é matematicamente descrita por

$$y = \varrho(x)$$

Não existe contacto com o solo

$$\left\{ \begin{array}{l} N_3[i] = 0 \\ F_{a3}[i] = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_4[i] = 0 \\ F_{a4}[i] = 0 \end{array} \right.$$

Contacto sem escorregamento no ponto (a,b) em que $b = \varrho(a)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow \text{canela}(\cos(\phi_z[i+1]) \cos(\theta_{33}[i+1] + \theta_{23}[i+1]) + \sin(\phi_z[i+1]) \sin(\theta_{33}[i+1] + \theta_{23}[i+1])) + \\ + \text{anca} \cos(\phi_z[i+1] \Leftrightarrow \theta_{23}[i+1]) + \text{dist} * \cos(\phi_z[i+1]) + R_x[i+1] \Leftrightarrow a = 0 \\ \\ \Leftrightarrow \text{canela}(\sin(\phi_z[i+1]) \cos(\theta_{33}[i+1] + \theta_{23}[i+1]) \Leftrightarrow \cos(\phi_z[i+1]) \sin(\theta_{33}[i+1] + \theta_{23}[i+1])) + \\ + \text{anca} \sin(\phi_z[i+1] \Leftrightarrow \theta_{23}[i+1]) + \text{dist} * \sin(\phi_z[i+1]) + R_y[i+1] \Leftrightarrow b = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow \text{canela}(\cos(\phi_z[i+1]) \cos(\theta_{34}[i+1] + \theta_{24}[i+1]) + \sin(\phi_z[i+1]) \sin(\theta_{34}[i+1] + \theta_{24}[i+1])) + \\ + \text{anca} \cos(\phi_z[i+1] \Leftrightarrow \theta_{24}[i+1]) + \text{dist} * \cos(\phi_z[i+1]) + R_x[i+1] \Leftrightarrow a = 0 \\ \Leftrightarrow \text{canela}(\sin(\phi_z[i+1]) \cos(\theta_{34}[i+1] + \theta_{24}[i+1]) \Leftrightarrow \cos(\phi_z[i+1]) \sin(\theta_{34}[i+1] + \theta_{24}[i+1])) + \\ + \text{anca} \sin(\phi_z[i+1] \Leftrightarrow \theta_{24}[i+1]) + \text{dist} * \sin(\phi_z[i+1]) + R_y[i+1] \Leftrightarrow b = 0 \end{array} \right.$$

Contacto com escorregamento

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{a3}[i] \Leftrightarrow \mu_D * N_3[i] = 0 \\ \Leftrightarrow \text{canela}(\sin(\phi_z[i+1]) \cos(\theta_{33}[i+1] + \theta_{23}[i+1]) \Leftrightarrow \cos(\phi_z[i+1]) \sin(\theta_{33}[i+1] + \theta_{23}[i+1])) + \\ + \text{anca} \sin(\phi_z[i+1] \Leftrightarrow \theta_{23}[i+1]) + \text{dist} * \sin(\phi_z[i+1]) + R_y[i+1] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho(\Leftrightarrow \text{canela}(\cos(\phi_z[i+1]) \cos(\theta_{33}[i+1] + \theta_{23}[i+1])) + \\ + \sin(\phi_z[i+1]) \sin(\theta_{33}[i+1] + \theta_{23}[i+1])) + \\ + \text{anca} \cos(\phi_z[i+1] \Leftrightarrow \theta_{23}[i+1]) + \text{dist} * \cos(\phi_z[i+1]) + R_x[i+1] = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{a4}[i] \Leftrightarrow \mu_D * N_4[i] = 0 \\ \Leftrightarrow \text{canela}(\sin(\phi_z[i+1]) \cos(\theta_{34}[i+1] + \theta_{24}[i+1]) \Leftrightarrow \cos(\phi_z[i+1]) \sin(\theta_{34}[i+1] + \theta_{24}[i+1])) + \\ + \text{anca} \sin(\phi_z[i+1] \Leftrightarrow \theta_{24}[i+1]) + \text{dist} * \sin(\phi_z[i+1]) + R_y[i+1] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho(\Leftrightarrow \text{canela}(\cos(\phi_z[i+1]) \cos(\theta_{34}[i+1] + \theta_{24}[i+1])) + \\ + \sin(\phi_z[i+1]) \sin(\theta_{34}[i+1] + \theta_{24}[i+1])) + \\ + \text{anca} \cos(\phi_z[i+1] \Leftrightarrow \theta_{24}[i+1]) + \text{dist} * \cos(\phi_z[i+1]) + R_x[i+1] = 0 \end{array} \right.$$

Bibliografia

- [1] K. S. FU, *ROBOTICS: Control, Sensing, Vision, and Intelligence*. McGraw-Hill Book Company
- [2] Davis J Manko, *A General Model of Legged Locomotion on Natural Terrain*. Kluwer Academic Publishers
- [3] Said M Megahed, *Principles of Robot Modelling and Simulation*. Wiley Publishers
- [4] Shin-Min Song, Kenneth J Waldron, *Machines That Walk*. The MIT Press
- [5] Yangsheng Xu, Takeo Kanade, *Space Robotics: Dynamics and Control*. Kluwer Academic Publishers
- [6] Marc H. Raibert, *Robotics Science (Cap 16)*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts
- [7] Vijay R. Kumar e Kenneth J. Waldron, *Robotics Review 1, pages 243-266*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts
- [8] Alban Pobla, *Mechanics of Articulated Legs: Force and Position Control*.
- [9] Alban Pobla, *Mécanique de la Locomotion Terrestre*.
- [10] U. Schmucker, A. Schneider e T. Ihme, *Six-Legged Robot for Service Operations*. Fraunhofer Institute for Factory Operation and Automation, Magdeburg, Germany
- [11] U. Schmucker, A. Schneider, T. Ihme, E. Dejvanin, K. Savitsky *Force Control in Locomotion of Legged Vehicle and Body Movement for Mounting Operations*. Fraunhofer Institute for Factory Operation and Automation, Magdeburg, Germany
- [12] Paul Alexandre, Thomas Parvais, André Preumont, *Active Suspension of a Walking Machine*. Université Libre de Bruxelles
- [13] Paul Alexandre, André Preumont, *On the Gait Control of a Six-Legged Walking Machine*. Université Libre de Bruxelles
- [14] Qiu Xiding, Gao Yimin, Zhuang Jide, *Analysis of the Dynamics of Six-Legged Vehicle*. the International Journal of Robotics Research, Vol. 14, No.1, February 1995, pp.1-8
- [15] Alonso e Finn, *Física um curso universitário (Vol I)*. Editora Edgard Blucher Ltda.

- [16] Herbert Goldstein, *Classical Mechanics (Chapter 1)*. Addison-Wesley Publishing Company
- [17] Dare A. Wells, *Theory and Problems of Lagrangian Dynamics*. McGraw-Hill Book Company
- [18] D J van Wyk, J Spoelstra, J H de Klerk, *Mathematical Modelling of the Interaction Between a Tracked Vehicle and the Terrain*. Appl. Math. Modelling 1996, Vol. 20, November
- [19] Kevin M Lynch, Matthew T Mason, *Pulling by Pushing, Slip With Infinite Friction, and Perfectly Rough Surfaces*. the International Journal of Robotics Research, Vol. 14, No.2, April 1995, pp.174-183
- [20] David C Kay, *Tensor Calculus*. McGraw-Hill Book Company