

# **Técnicas de Redução da Variância num Sistema de Comutação Digital**

por

Teresa Gomes e José Craveirinha

Departamento de Eng<sup>a</sup> Electrotécnica

Universidade de Coimbra, INESC, 3000 Coimbra, PORTUGAL

Telex: 52273 UNICOI P      FAX 351-39-35672

**Relatório de Investigação**

# Técnicas de Redução da Variância na Simulação dum Sistema de Comutação Digital

por

Teresa Gomes e José Craveirinha

Departamento de Eng<sup>a</sup> Electrotécnica

Universidade de Coimbra, INESC, 3000 Coimbra, PORTUGAL

Telex: 52273 UNICOI P      FAX 351-39-35672

## 1 Introdução

A Simulação é uma das técnicas mais utilizadas em numerosos domínios da investigação operacional e da engenharia de sistemas e poder-se-á afirmar que a sua utilização tem aumentado significativamente em paralelo com o desenvolvimento de ferramentas computacionais mais baratas e de maior capacidade. Contudo poder-se-á constatar, em numerosos estudos que utilizam a simulação, deficientes formulações a nível metodológico. Neste contexto a problemática das técnicas de análise dos resultados é de grande importância quer do ponto de vista da significância estatística dos resultados fornecidos pelo modelo quer do ponto de vista da sua eficiência entendida em termos do compromisso eficiência computacional/precisão dos resultados fornecidos.

Este trabalho está centrado na aplicação de algumas técnicas de redução da variância (TRV) e no estudo da sua eficiência relativa no contexto da simulação de Monte-Carlo de um sistema estocástico de serviço de tipo particular (sistema digital de comutação por circuitos, para tráfego telefónico). Pensamos que o estudo da aplicação das técnicas de redução da variância no domínio da simulação dos sistemas ou de redes de teletráfego é da maior relevância dado o facto de estarem muitas vezes em causa tempos de computação muito elevados, sobretudo em situações onde os acontecimentos a detectar são relativamente raros (caso do bloqueio de chamadas). Neste contexto as questões de análise do compromisso eficiência computacional/grau de precisão dos resultados têm obviamente o maior interesse. Este estudo insere-se na sequência de um trabalho anterior de aplicação de TRV a um sistema em cadeia de dois andares (andar de saída de um sistema de comutação espacial).

## 2 Análise dos resultados de uma Simulação

### 2.1 Método das variáveis de controlo

Uma variável de controlo é uma variável aleatória cuja média é conhecida e que está correlacionada com a estimativa estatística de interesse. A aplicação do método das variáveis de controlo conduz a um novo estimador, que é o anterior

estimador adicionado a uma combinação linear das variáveis de controlo. Os coeficientes desta combinação linear não são conhecidos à partida pelo que devem ser estimados. A estimativa destes coeficientes é apresentada dentro do contexto das replicações independentes, mas tudo o que aqui for dito pode ser extrapolado para o método da corrida única, desde que se considerem pacotes suficientemente longos de forma a garantir aproximadamente a independência estatística entre pacotes [8].

### 2.1.1 Formulação utilizada para uma variável de controlo

Seja  $\mu$  uma quantidade desconhecida a estimar e seja  $X$  uma estimativa não envezada de  $\mu$  (i.e.,  $E[X] = \mu$ ) obtida a partir de uma corrida de simulação. A variável de controlo  $C$  tem esperança matemática  $\mu_C$ , conhecida, e está correlacionada com  $X$ . Com o auxílio de  $C$  é possível construir um novo estimador para  $\mu$  com variância inferior à variância de  $X$ . Seja  $b$  uma constante qualquer:

$$X(b) = X - b(C - \mu_C) \quad (1)$$

Então  $X(b)$  é também uma estimativa não envezada para  $\mu$  cuja variância é dada por:

$$\text{var}[X(b)] = \text{var}[X] - 2bcov[X, C] + b^2\text{var}[C] \quad (2)$$

O valor de  $b$  que minimiza  $\text{var}[X(b)]$  pode ser determinado, calculando a derivada de  $\text{var}[X(b)]$  em ordem a  $b$ , e obtendo o valor de  $b$ , seja ele  $d$ , que anula essa derivada:

$$d = \frac{\text{cov}[X, C]}{\text{var}[C]} \quad (3)$$

O respectivo valor mínimo para a variância é

$$\text{var}[X(d)] = (1 - \text{corr}^2[X, C])\text{var}[X] \quad (4)$$

Desta expressão facilmente se conclui que quanto mais correlacionados forem  $X$  e  $C$ , maior será a redução da variância.

É possível obter indirectamente uma variável de controlo a partir de duas variáveis de controlo cujas médias são desconhecidas, mas que se sabe serem iguais entre si. A diferença destas duas variáveis não é mais do que uma variável de controlo de média nula [7].

O valor do parâmetro óptimo  $d$  é geralmente desconhecido, uma vez que raramente se conhece o valor de  $\text{var}[C]$  e de  $\text{cov}[X, C]$ . Supondo que se dispõe de  $n$  observações para as variáveis  $X$  e  $C$ , obtidas em  $n$  corridas de simulação, pode obter-se uma estimativa para  $d$ , utilizando as habituais estimativas para  $\text{cov}[X, C]$  e  $\text{var}[C]$ ,

$$\hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \underline{X})(C_i - \underline{C})}{\sum_{i=1}^n (C_i - \underline{C})^2} \quad (5)$$

em que  $\underline{X}$  e  $\underline{C}$  são as médias aritméticas das observações  $X_i$  e  $C_i$ , respectivamente.

A estimativa de  $d$  por  $\hat{d}$ , levanta alguns problemas, pois  $X_i(\hat{d})$  é um estimador enviesado e a média dos  $n$  estimadores também o é [5].

Existem várias formas de ultrapassar este problema. Uma delas baseia-se no pressuposto de que a distribuição conjunta de  $X$  e  $C$  é normal, o que é habitual quando a distribuição quer de  $X$  quer de  $C$  é normal [3]. Considerando que as os valores de  $X$  e  $C$  são estimativas para as respectivas médias das amostras, construídas a partir das observações em cada corrida, pelo teorema do limite central, a distribuição conjunta de  $X$  e  $C$  é pelo menos assintoticamente normal [9]. Uma outra forma de resolver o problema levantado pela estimativa de  $d$ , baseia-se na técnica de "jackknifing".

### Intervalo de confiança obtido da teoria da regressão linear

Considere-se que  $X$  e  $C$  têm uma distribuição conjunta normal. Pode mostrar-se que a distribuição condicional de  $X$  dado  $C$  é também normal [9]:

$$X|C = c \approx N[\mu + d(c - \mu_C); \sigma^2] \quad (6)$$

em que ' $C = c$ ' significa "para  $C$  com determinado valor  $c$ ", e onde  $\sigma^2$  é dado por:

$$\sigma^2 = \sigma_X^2(1 - R_{XC}^2) \quad (7)$$

sendo  $\sigma_X^2$  a variância de  $X$  e  $R_{XC}^2$  o coeficiente de correlação entre  $X$  e  $C$ . Então existe uma regressão linear de  $X$  em  $C$ , e

$$\begin{array}{l} \text{dados os} \quad C_i = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \text{tem-se} \quad X_i = \mu + d(c_i - \mu_C) + e_i \end{array} \quad (8)$$

em que os resíduos  $e_i$  são variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas,  $e_i \approx N(0, \sigma^2)$ .

Para estimar os parâmetros desconhecidos  $\mu$  e  $d$  recorre-se ao método do erro quadrático mínimo obtendo as estimativas  $\hat{\mu}(\hat{d})$  e  $\hat{d}$  [9]:

$$\hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(c_i - \bar{c})}{\sum_{i=1}^n (c_i - \bar{c})^2} \quad (9)$$

$$\hat{\mu}(\hat{d}) = \bar{X} - \hat{d}(\bar{c} - \mu_C) \quad (10)$$

Uma estimativa para o erro, ou seja para a variância  $\sigma^2$  de  $e_i$  é dada por [3]:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (X_i - X_i^*)^2 \quad (11)$$

em que  $X_i^* = \hat{\mu}(\hat{d}) + \hat{d}(c_i - \mu_C)$  com  $(1 \leq i \leq n)$ . A variância de  $\hat{\mu}(\hat{d})$  é dada pela teoria da regressão [9]:

$$\text{var}[\hat{\mu}(\hat{d})|C_i = c_i, 1 \leq i \leq n] = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^n (c_i - \mu_C)^2}{n \sum_{i=1}^n (c_i - \bar{c})^2}$$

e embora  $\sigma^2$ , seja desconhecido dispõe-se de uma estimativa para  $\sigma^2$ , dada pela equação 11, donde:

$$\text{vâr}[\hat{\mu}(\hat{d})|C_i = c_i, 1 \leq i \leq n] = \hat{\sigma}^2 \frac{\sum_{i=1}^n (c_i - \mu_C)^2}{n \sum_{i=1}^n n(c_i - \underline{c})^2}$$

Um intervalo de confiança para  $\mu$  é dado por :

$$\text{Prob}\{\hat{\mu}(\hat{d}) - \sqrt{\text{vâr}[\hat{\mu}(\hat{d})]}t_{n-2;\alpha/2} \leq \mu \leq \hat{\mu}(\hat{d}) + \sqrt{\text{vâr}[\hat{\mu}(\hat{d})]}t_{n-2;\alpha/2}\} = 1 - \alpha$$

i.e. perdem-se dois graus de liberdade, um mais do que o habitual devido a  $d$  ser estimado por  $\hat{d}$ .

### Intervalo de confiança obtido da teoria de "jackknifing"

Kleijnen [5] propõe a utilização de um estimador enviesado para  $\mu = E[\underline{X}]$ , tendo em vista a obtenção de um estimador com menor variância.

Dividindo as observações na amostra de  $X$  e na amostra de  $C$  em  $k$  grupos, com  $n/k$  observações, toma-se o estimador  $\hat{\mu}_j$ , de forma semelhante a  $\hat{\mu}$  na equação 10, após a supressão das observações no grupo  $j$ :

$$\hat{\mu}_j = \underline{X}_j + \hat{d}_j(\underline{C}_j - \mu_C) \quad (12)$$

em que  $\underline{X}_j$  é a média das  $n - n/k$  observações para  $X$ , após a supressão do grupo  $j$ . Análogamente para  $\underline{C}_j$  e  $\hat{d}_j$ , estimativa para  $d$  calculada com essas mesmas  $n - n/k$  observações. Note-se que o estimador  $\hat{\mu}_j$  é um estimador enviesado.

Os pseudo-valores da estatística de "jackknifing" são:

$$J_j = k\hat{\mu} - (k-1)\hat{\mu}_j \quad (13)$$

e o estimador obtido por este processo é

$$\underline{J} = k\hat{\mu} - \frac{k-1}{k} \sum_{j=1}^k \hat{\mu}_j \quad (14)$$

Tukey [11] sugeriu que os  $J_j$  poderiam ser tratados como variáveis aleatórias identicamente distribuídas e que poderiam ser obtidos intervalos de confiança para  $J$  a partir da distribuição  $t$  de Student com  $k-1$  graus de liberdade:

$$t_{k-1} = \frac{(\underline{J} - \mu)\sqrt{k(k-1)}}{\sqrt{\sum_{j=1}^k (J_j - \underline{J})^2}} \quad (15)$$

Gray e Schucany [4] provaram a normalidade assintótica do segundo membro de 15 em condições muito gerais. Pode-se assim construir um intervalo de confiança para  $\mu$  de grau de confiança  $1 - \alpha$  [4]:

$$\underline{J} - t_{k-1;\alpha/2} \frac{S_J}{\sqrt{k}} \leq \mu \leq \underline{J} + t_{k-1;\alpha/2} \frac{S_J}{\sqrt{k}} \quad (16)$$

sendo  $S_J$  dado por,

$$S_J^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k (J_j - \underline{J})^2 \quad (17)$$

## 2.2 Método das variáveis antitéticas

Este método é baseado na indução de correlação negativa de forma a reduzir a variância da estimativa desejada.

Uma forma simples de implementar este método, independentemente do sistema a simular, será utilizar numa corrida a sequência de números aleatórios  $R_1, R_2, \dots$ , e na corrida antitética, parceira da primeira, a sequência de números aleatórios  $1 - R_1, 1 - R_2, \dots$ , com  $R_i \in [0, 1]$ . Este processo é válido porque se  $\mathbf{R}$  é um vector de números aleatórios, o vector  $\mathbf{1} - \mathbf{R}$  também o é.

Seja  $X_d$  a estimativa para a média obtida a partir de uma simulação de um sistema e seja  $X_a$  outra estimativa, a antitética. Uma estimativa para a média baseada nesse par antitético será

$$\underline{X} = \frac{1}{2}(X_d + X_a) \quad (18)$$

e a variância de  $\underline{X}$  é dada por

$$\text{var}[\underline{X}] = \frac{1}{4}(\text{var}[X_d] + \text{var}[X_a] + 2\text{cov}[X_d, X_a]) \quad (19)$$

Conclui-se imediatamente que a variância de  $\underline{X}$  diminui se  $X_d$  e  $X_a$  estiverem negativamente correlacionadas. Na simulação de sistemas complexos é praticamente impossível mostrar analiticamente que a utilização de variáveis antitéticas conduz a uma correlação negativa entre corridas. Pode no entanto enunciar-se o seguinte teorema [1], pressupondo que na corrida  $i$  se utilizou a sequência de números aleatórios  $U_i$  e que a saída na corrida  $i$  é  $X_i = g(U_i)$ :

**Teorema 2.1** *Suponha-se que  $g$  não é constante no interior do seu domínio e que é uma função limitada monótona de  $U_i(k)$  para todo o  $k$ .*

*Se  $U_j(k) = 1 - U_i(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  então  $\text{cov}[X_i, X_j] < 0$ .*

Na simulação de um sistema é frequente que o valor de saída seja uma estimativa de um parâmetro que depende de um conjunto de variáveis aleatórias de entrada geradas, cada uma delas, a partir de uma sequência de números aleatórios. Estas sequências de números aleatórios deverão ser independentes entre si.

Uma forma de implementar o método das variáveis antitéticas será, utilizar numa corrida  $k$  vectores de números aleatórios  $\mathbf{R}_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, k$ , (em que  $\mathbf{R}_i$  vai gerar a variável de ordem  $i$  e tem  $n_i$  elementos) e na corrida antitética usar  $k$  vectores antitéticos da corrida anterior, ou seja  $\mathbf{I}_i - \mathbf{R}_i$ , em que  $\mathbf{I}_i$  representa um vector com  $n_i$  uns.

Até aqui considerou-se  $n_i$  constante. Em alguns casos  $n_i$  poderá ser aleatório, necessitando a corrida antitética de mais ou menos números que a sua antecessora. Em princípio este facto não se reveste de grande importância, embora tenda a enfraquecer a correlação, e por isso a diminuir a eficácia do método.

A apresentação do método da variável antitética foi feita tomando como referência o método das replicações independentes. A aplicação deste método de redução da variância ao método da corrida única não se reveste de qualquer dificuldade: o que foi dito para cada corrida é extrapolado para cada pacote.

O cálculo do intervalo de confiança é feito a partir de uma amostra constituída por observações da forma  $X_i$ ,

$$X_i = \frac{X_{id} + X_{ia}}{2}, i = 1, 2, \dots, n$$

Os  $X_{id}$  e  $X_{ia}$  são as médias das observações nos pacotes  $i$  na simulação directa e na sua antitética, respectivamente.

### 2.3 Estimativa do bloqueio de chamadas

A estimativa da congestão de chamadas (medida da eficácia do sistema de teletráfego) por simulação, vai ser feita no caso em estudo, pelo método da corrida única sub-dividida em sequências de observações, também aqui designado como o 'método dos pacotes sequenciais'.

No método da corrida única, a execução do programa é dividida em  $n$  'pacotes', depois de ignorados os resultados da fase inicial da execução do programa. Sejam os valores do estimador calculados nesses  $n$  pacotes,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (médias das observações em cada pacote). Admita-se que a correlação série diminui quando mais afastadas forem as observações individuais  $X$ . Sendo assim apenas algumas, poucas, observações iniciais do pacote  $i$  mostrarão correlação com as últimas observações do pacote  $i - 1$  portanto os valores  $X_i$  e  $X_{i-1}$  apresentarão apenas pequena correlação. Se os pacotes forem suficientemente longos, as correlações entre as médias nos diferentes pacotes podem ser desprezadas [5]. O cálculo de intervalos de confiança baseados na distribuição  $t$  de Student pode ser efectuado desde que se considerem os  $X_1, X_2, \dots, X_n$  aproximadamente independentes e aproximadamente normais.

O cálculo da congestão levanta, no entanto, problemas em termos de custo computacional quando o seu valor é pequeno, da ordem dos 5% ou inferior, com um grau de confiança de 95%. Nesta situação, os programas de simulação necessitam geralmente de grandes tempos de processamento até atingirem o intervalo de confiança desejado e, é precisamente por essa razão que se procura reduzir a variância da amostra, constituída pelo valor do bloqueio em cada pacote. Se o objectivo de redução da variância da amostra for conseguido, obter-se-á o mesmo intervalo de confiança com um menor número de pacotes e, se o custo adicional de introdução da técnica de redução da variância não for muito elevado, obtém-se um menor custo em termos de tempo de processamento.

Pelo teorema do limite central da análise estatística pode considerar-se que a distribuição da média das amostras,  $\underline{X}$ , segue assintoticamente a distribuição normal de média  $\mu$  e variância  $\frac{\sigma^2}{n}$ ,  $(N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}))$ , para amostras de dimensão,  $n$ , elevada, independentemente da distribuição dos  $X_i$  desde que a média e a variância desta população sejam finitas. O intervalo de confiança de  $\underline{X}$ , com um grau de confiança de  $1 - \alpha$  será:

$$\text{Prob}\left[\underline{X} - t_{n-1;\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \underline{X} + t_{n-1;\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha \quad (20)$$

onde  $s^2$  é uma estimativa para a variância  $\sigma^2$  e  $t_{n-1;\alpha/2}$  o ponto correspondente a  $1 - \alpha/2$  na distribuição de Student com  $n - 1$  graus de liberdade.

### 3 Aplicação no caso em estudo

Neste estudo é utilizado um simulador de uma estação de trânsito digital (ETD), com um sistema de comutação TT [10]. Segue-se uma curta descrição dessa ETD, que constitui um resumo de algumas secções de [10].

#### 3.1 A estação de trânsito digital

Nesta estação existem vários processadores de controlo com segmentação de funções; cada processador executa todas as funções mas serve unicamente uma parte da estação. Os processadores comunicam entre si através das próprias estruturas de comutação da estação.

A estação é constituída por uma ou mais unidades, os módulos, que são capazes de executar todas as funções de uma estação. A estação é descrita pela forma como se interligam os módulos.

Um módulo é constituído pelas seguintes unidades: duas unidades de comutação temporal (uma de entrada e a outra de saída), 15 periféricos de interface (PIFs, um dos quais está inactivo, para imediata substituição em caso de avaria) e uma unidade de controlo. Cada PIF recebe do lado exterior 2 barramentos, cada um dos quais com tramas PCM de 32 canais segundo o protocolo HDB3 (30 canais de voz, um de sinalização, o 16, e ainda um outro de sincronização, o 0). Designem-se estes barramentos por "PCM30".

Cada unidade de comutação temporal pode comutar  $16 \times 60 = 960$  canais PCM, 900 canais de voz e 60 canais para comunicação entre as unidades de controlo. Designe-se cada um destes barramentos por "PCM60". A frequência nestes canais é dupla dos PCM30.

Cada PIF suporta  $30 \times 2 = 60$  junções bidireccionais, e cada módulo suporta  $14 \times 60 = 840$  junções a "quatro fios".

Designe-se o conjunto de ligações de uma estação a outra estação por feixe. Cada feixe divide-se em duas partes: a de entrada e a de saída. Um feixe poderá ocupar vários barramentos, vários canais de vários barramentos ou estar ligado a vários módulos.

Uma unidade de controlo é constituída por um processador e pelas respectivas memórias. Tem como principal função a programação das memórias de comando das unidades T, de forma a encaminhar devidamente as chamadas em curso. Em sistemas com vários módulos as unidades de controlo têm de comunicar entre si. Fazem-no, como já foi referido, através da rede de comutação e de acordo com o protocolo HDLC.

A interligação entre os vários módulos da estação faz-se através da ligação das respectivas unidades T.

A figura 1 representa esquematicamente um módulo.



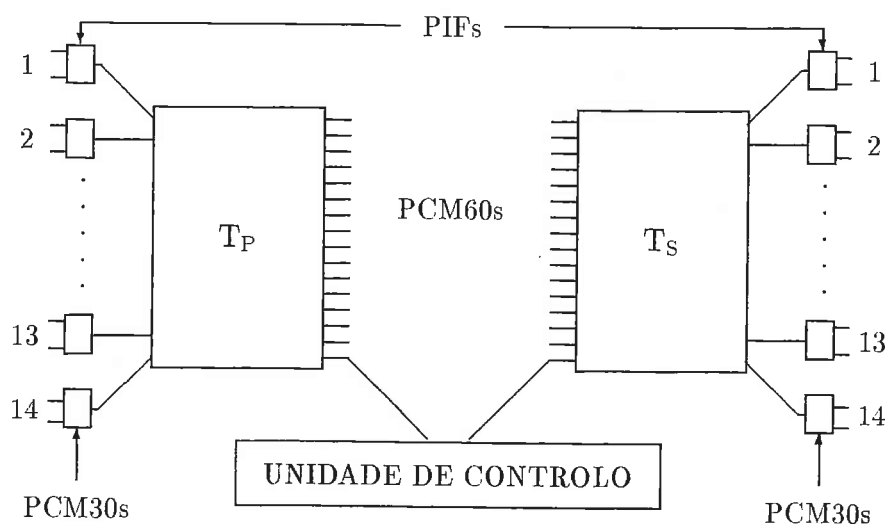


Figura 1: Um módulo

### 3.2 O simulador

Um processo de tráfego pode, em muitos casos, ser encarado como um processo de Markov; logo pode, mediante algumas aproximações, ser simulado pelo método de Monte-Carlo. Foi este o método de simulação escolhido.

No método de Monte-Carlo são em geral necessários números pseudo-aleatórios. No simulador em causa, os números pseudo-aleatórios utilizados são números inteiros. Faz-se corresponder à probabilidade  $p_i^{(j)}$  (probabilidade do sistema transitar para o estado  $i$ , sabendo que se encontra no estado  $j$ , com  $\sum_i p_i^{(j)} = 1$ ) um número inteiro  $N_i^{(j)}$  obtido através dela. Os geradores de números aleatórios utilizados geram números entre  $[0, \text{MAX}]$  (em que MAX é, na implementação para o  $\mu\text{Vax } 2000$ ,  $7\text{EFFFFFFFH } (2^{*31} - 1)$ ).

O simulador utilizado está orientado ao feixe e ao tráfego inter-feixes, isto é para cada chamada gerada é escolhido um feixe origem, um feixe terminal e um módulo origem; Estas três escolhas são probabilísticas, sendo determinística a do módulo terminal. A escolha do módulo terminal é feita de forma a dar prioridade ao módulo onde o feixe tem menor número de ocupações.

Os dados de entrada de cada simulação são os tráfegos oferecidos aos feixes e não os oferecidos aos módulos. Considera-se que os tráfegos originados nos feixes estão nas mesmas proporções que os respectivos tráfegos terminados; dado que as suas somas têm de ser sempre iguais, isto implica que os tráfegos originados são iguais aos tráfegos terminados.

Um diagrama de blocos representativo do sistema é o que dado pelo diagrama da figura 2 [10].

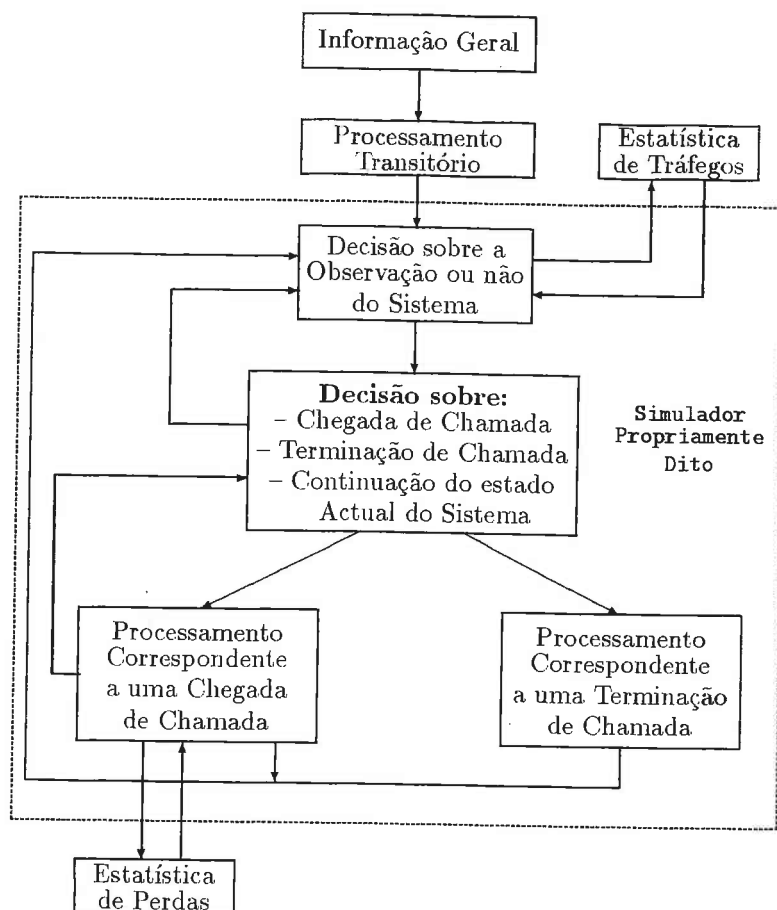


Figura 2: Diagrama de blocos do simulador

### 3.2.1 Descrição sumária de alguns blocos

#### Bloco 1

No bloco 1, procede-se à decisão acerca da observação ou não do sistema, de forma a construir estimativas para os tráfegos transportados no sistema. Para poder proceder a essas estimativas é necessário ter registos permanentes das ocupações nas várias unidades do sistema.

Um vector regista o número de chamadas a decorrer originadas num dado módulo, outro vector regista o número de chamadas a decorrer terminadas num dado módulo e finalmente uma matriz  $A$ , em que cada elemento  $a_{ij}$  descreve o segundo andar do sistema, ou seja qual o número de chamadas originadas no módulo  $i$  que terminam no módulo  $j$ .

Para calcular uma estimativa, procede-se da seguinte forma:

- (i) Fazem-se seqüências de observações dos estados das estruturas pertinentes a essa estimativa.
- (ii) Tiram-se as médias observadas nas várias seqüências.

(iii) A estimativa final é a média das médias tiradas em (ii).

Se as sequências forem suficientemente grandes a correlação existente entre as médias obtidas em (ii) é desprezável, pelo que se podem estimar intervalos de confiança como já foi descrito na secção 2. Este programa não calcula intervalos de confiança para os tráfegos, mas somente para as perdas. A razão fundamental reside no facto, que se verificou experimentalmente, das estimativas para os tráfegos estabilizarem rapidamente em torno de certos valores. Além disso as estimativas para as perdas são feitas à custa de amostras menores, pelo que a estimativas destes intervalos de confiança são bastante mais críticas.

Do que foi dito no parágrafo anterior rapidamente se concluiu que o método escolhido foi o método da corrida única. O simulador, que tem vindo a ser descrito, corre na sua versão original em anel infinito. Nessa versão o utilizador pode analisar a evolução dos resultados, sempre que o deseje (chama-se a atenção para ao facto de que nalguns pares feixe-módulo a congestão poder ser muito baixa), e fazer abortar o programa quando considera que a qualidade dos resultados obtidos o satisfaz. Para o fim em causa, a comparação da eficácia de algumas técnicas de redução da variância, foi necessário alterar esse aspecto do programa. Selecionou-se um par feixe-feixe (XORIG, YDEST), e para sucessivos semi-intervalos relativos de confiança (SMICs de 25%, 20%, 15%, 10% e 5%) fizeram-se leituras do tempo de CPU utilizado, parando a simulação quando o menor intervalo relativo de confiança (5%) é atingido.

Os resultados das observações feitas durante uma sequência (amostras) vão sendo acumuladas em vectores ou matrizes. Um vector contém as somas dos tráfegos originados e outro a soma dos tráfegos terminados em cada módulo. Uma matriz  $B$  contém, em cada elemento  $b_{ij}$  as somas dos tráfegos originados no módulo  $i$  e terminado no módulo  $j$ . Estes totais são utilizados no fim de cada sequência e reinicializados a zero.

As observações do sistema não são feitas periodicamente ao fim de um determinado número de chamadas, mas sim de acordo com o método de amostragem aleatório, com um probabilidade que é dada. O gerador de números pseudo-aleatórios utilizado para este fim é independente dos restantes (gerador 0).

## Bloco 2

Neste bloco decide-se acerca da chegada de uma nova chamada, da terminação de uma chamada em curso ou da não alteração do estado actual do sistema.

As probabilidades determinantes são:

- chegada de uma chamada: probabilidade proporcional ao tráfego oferecido ao sistema, ou seja aos feixes; considera-se que os feixes estão sujeitos a tráfego de Erlang-B (entradas de Poisson e duração das ocupações exponencial negativa)
- terminação de uma chamada: probabilidade proporcional ao número de chamadas a decorrer
- não alteração do sistema: probabilidade restante

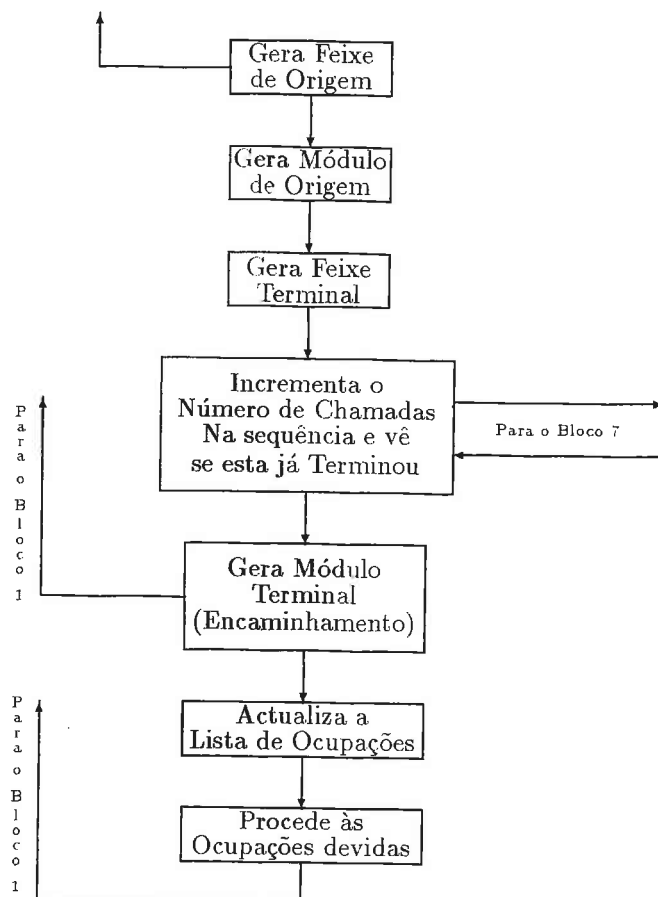


Figura 3: Diagrama do Bloco 3

O gerador utilizado é o gerador 1.

No caso de não haver alteração do estado do sistema volta-se ao bloco 1 para uma possível observação do sistema.

### Bloco 3

Este bloco é solicitado se no bloco anterior as probabilidades em jogo conduziram à situação em que se deseja gerar uma nova chamada. Observe-se o diagrama de blocos da figura 3

É seleccionado o feixe origem da nova chamada (gerador 2). As probabilidades em questão são proporcionais ao tráfego oferecido a cada feixe (dados de entrada).

Caso o feixe origem escolhido esteja em congestão o controlo volta ao bloco 2. Trata-se de uma chamada inexistente do ponto de vista do sistema.

Seleccionado o feixe origem da chamada, passa-se a a escolher aleatoriamente (gerador 3) o módulo origem da mesma (caso haja mais do que um módulo). As eventuais probabilidades em jogo são proporcionais ao número de canais livres que o feixe origem tem nos vários módulos com eles conectados.

Seguidamente selecciona-se o feixe terminal para a chamada (gerador 4),

de forma idêntica á utilizada para seleccionar o feixe origem da mesma, embora agora o feixe seleccionado possa estar em congestão. O feixe terminal tem de ser diferente do feixe origem (trata-se de uma estação de trânsito).

No caso da chamada não poder ser encaminhada então passa a contabilizar-se a congestão no sistema. São contabilizados dois tipos de perda: perdas módulo-feixe e perdas feixe-feixe. No primeiro caso o simulador "vê" quantas chamadas não conseguiu encaminhar de um módulo origem para um feixe terminal, no segundo caso quantas chamadas não conseguiu encaminhar de um feixe origem para um feixe terminal. O número de chamadas perdidas em cada um dos casos vai sendo acumulada até se obter uma sequência de observações com a dimensão desejada (1024 chamadas por cada par de unidades). Uma vez terminada uma sequência são chamadas as rotinas de tratamento estatístico dos dados e que procedem à actualização dos intervalos de confiança (com nível de confiança de 95%).

Caso o feixe terminal seleccionado não esteja congestionado, é agora seleccionado de forma determinística o módulo terminal. Entre os módulos conectados ao feixe terminal é escolhido o módulo terminal com menor número de ocupações, e com acesso ao feixe.

Uma vez conhecido o percurso da chamada, que conseguiu ser bem sucedida, é simulada a ocupação dos recursos necessários ao seu estabelecimento.

#### **Bloco 4**

Aqui é feito o procesamento correspondente à terminação de uma chamada. Selecciona-se aleatoriamente, de entre as chamadas em curso, a chamada que vai ser terminada. Para garantir uma boa aleatoriedade na selecção da chamada a terminar, são utilizados aqui dois geradores (os geradores 5 e 6).

#### **Bloco 5**

Este bloco trata a inicialização geral do simulador, de acordo com os dados de entrada fornecidos pelo utilizador. Esses dados de entrada são fornecidos a partir de um ficheiro de texto previamente editado. Os parâmetros do sistema e da simulação são os seguintes:

- Número de módulos
- Número de feixes
- Número de canais por PIF
- Número de canais dos vários feixes nos diferentes módulos.
- Tráfegos oferecidos aos feixes
- Probabilidade com que as observações ao sistema são feitas
- Avanços a dar às sequências de números pseudo-aleatórios.

#### **Bloco 6**

As estimativas feitas pelo simulador só são válidas se o sistema se encontrar em equilíbrio estatístico.

O sistema é inicializado a “zero”, e seguidamente são lançadas chamadas até que o sistema se encontre em regime de estacionaridade. Esta fase é executada por um subprograma, em tudo semelhante ao simulador propriamente dito mas que não faz chamadas de rotinas de processamento estatístico.

### **Blocos 7 e 8**

Estes blocos encontram-se no mesmo módulo de programa e dizem respeito à análise estatística dos dados recolhidos. São estimadas:

- As perdas módulo feixe e calculados os respectivos intervalos de confiança (todos eles com nível de verosimellhança de 95%)
- Os tráfegos transportados nos grupos de “links” inter-modulares, bem como nos vários módulos
- As perdas nos módulos aqui definidas como sendo a relação entre o número de chamadas originadas nesse módulo que não que não foi possível encaminhar, e o número total de chamadas nele originadas. Faz também a atribuição de intervalos de confiança às referidas perdas.

### **3.2.2 Os geradores**

Este simulador necessita de mais do que um gerador de números pseudo-aleatórios. Os geradores a utilizar devem apresentar um período suficientemente grande para permitir a geração de chamadas na ordem dos milhões.

O gerador utilizado é um gerador “Fibonacci com Shuffling”, cujo método vem descrito em [6]. Os estudos efectuados sobre este tipo de geradores ( $\chi^2$ , correlação e período) revelam bom comportamento para certas “sementes”.

As rotinas relacionadas com a geração de números pseudo-aleatórios encontram-se num módulo separado, sendo chamadas pelo simulador como rotinas externas.

## **4 Aplicação das TRV ao Simulador da ETD**

O sistema de experimentação, simulador de uma estação de trânsito digital TT, tem variados dados de saída. Deseja-se estabelecer uma comparação entre a simulação directa e a simulação com inclusão de TRV. Seleccionado um par de feixes (feixe origem, feixe destino), tem-se como saída uma estimativa para a congestão entre esses feixes e o respectivo intervalo de confiança. Apenas por alteração da rotina de tratamento estatístico e chamada oportuna da rotina de lançamento dos resultados, é possível registar os tempos de CPU cada vez que o semi-intervalo de confiança (SMIC) relativo passa pelos valores 25%, 20%, 15%, 10% e 5%. Atingido o SMIC de 5% a simulação é interrompida, pois desejamos apenas comparar o efeito da aplicação das TRV no par de feixes escolhido.

Ao introduzir uma TRV calculam-se os SMIC, e guardam-se os tempos de CPU, para o novo estimador do bloqueio nesse feixe. O novo estimador é como é lógico aquele que se obtém do estimador anterior, à custa da aplicação das técnicas experimentadas.

Escolheu-se uma configuração constituída por 4 feixes de entrada e dois módulos. O número de canais por PIF e o número de canais dos vários feixes, nos diferentes módulos mantiveram-se constantes, apenas se variou o tráfego oferecido aos feixes, de forma a obter valores para a congestão na gama da alta e baixa congestão (7-8%, 4-5%, 1% e 0.5%). Não se optou por uma configuração com mais feixes e módulos porque isso aumentaria muito os custos da simulação.

#### 4.1 Aplicação do método das variáveis de controlo

O método das variáveis de controlo implica a existência de alguma ou algumas variáveis cuja esperança matemática seja conhecida e que se encontrem de alguma forma correlacionadas com a saída de interesse. No caso vertente, entre as variáveis de entrada encontra-se o tráfego oferecido aos feixes de entrada. A estimativa obtida em cada pacote (definido por  $k$  chamadas efectivamente oferecidas ao par de feixes em estudo) para o tráfego total oferecido a todos os feixes é dado por:

$$A_i = \frac{N_{ch}}{N_{al}}(A_0 + n)$$

sendo  $N_{ch}$  o número total de chamadas oferecidas aos feixes de entrada,  $N_{al}$  o número de *números pseudo-aleatórios* utilizados na sequência "1" (que define se o evento é uma tentativa de libertação ou uma ocupação),  $A_0$  é um dado de entrada da simulação, o tráfego total oferecido aos feixes (soma do tráfego oferecido a cada feixe) e  $n$  é o número de canais nos feixes a dividir por dois.

A estimativa actualizada para o tráfego total oferecido é:

$$\underline{A} = \frac{\sum_{i=1}^m A_i}{m}$$

Fizeram-se algumas experiências acerca da qualidade deste estimador, cuja esperança matemática deve ser  $A_0$ , e estas revelaram-se satisfatórias.

No cálculo dos SMIC pela teoria da regressão linear, tudo se passa como foi descrito na secção 2.1, em que a variável de controlo é o tráfego oferecido aos feixes.

Se o método escolhido para o cálculo do intervalo de confiança for o método de "jackknifing", há que decidir acerca do grau de sub-divisão da amostra final constituída pelos valores obtidos a partir de cada pacote. Optou-se pela sub-divisão total por ser aquela que deverá em princípio [5] conduzir a menor variância para o estimador enviesado  $\hat{\mu}_j$ . No entanto como se verá na análise de resultados, as vantagens da aplicação desta técnica mostraram-se desencorajadoras pelo que foram experimentadas outras sub-divisões. A discussão dos resultados obtidos recorrendo à técnica de "jackknifing" dependendo da sub-divisão da amostra será apresentada na secção de análise dos resultados.

Ambos os métodos de cálculo do intervalo de confiança implicam que ao fim de cada pacote se proceda à actualização total de algumas das variáveis estatísticas de interesse. Isto provoca um custo adicional, em termos de tempo de CPU, na aplicação do método das variáveis de controlo, custo esse mais acentuado na implementação VCJacl.

## 4.2 Aplicação do método das variáveis antitéticas

A forma de aplicação do método das variáveis antitéticas descrita na secção 2.2 foi aqui directamente utilizada.

Sendo o método de análise dos dados de saída o método da corrida única, dividido em pacotes sequenciais, é pouco eficiente recorrer a duas simulações independentes. Este problema foi resolvido recorrendo a dois programas (diferentes apenas no facto de alguma(s) da(s) sua(s) sequência(s) de números pseudo-aleatórios serem antitética(s)). Estes programas comunicam entre si através de uma zona de memória comum. Optou-se assim por duplicar a representação do sistema. Esta solução aponta para um meio ambiente que disponha de multiprogramação sendo imperativo que ambos os programas estejam a correr simultaneamente (o desfasamento máximo permitido nesta implementação é de 100 pacotes).

Considerando que se garantiu a obtenção, mais ou menos sincronizada, pares de pacotes, um sobre cada representação do sistema. As médias aritméticas das estimativas obtidas em cada par de pacotes constituem as novas estimativas parciais, as quais vão ser utilizadas para calcular a estimativa final para a congestão de chamadas e respectivo intervalo de confiança. O cálculo do intervalo de confiança é feito iterativamente, sempre que termina o par de pacotes corrente.

## 5 Análise de Resultados

O sistema em estudo foi simulado para quatro conjuntos de valores de entrada conduzindo a valores da congestão de aproximadamente 8-7%, 4-5%, 1% e 0.5%, no par de feixes seleccionados. Para verificar a eficácia dos métodos de redução da variância procedeu-se à leitura dos tempos de CPU sempre que eram atingidos os seguintes SMIC: 25%, 20%, 15%, 10% e 5%.

As implementações consideradas para efeitos de análise de resultados foram as seguintes:

- Dir: Simulação simples, estima o bloqueio directamente à medida que são obtidas estimativas para o bloqueio em cada pacote.
- VCReg: Método das variáveis de controlo, com uma variável de controlo, o tráfego total oferecido aos feixes. O SMIC é calculado recorrendo à teoria da regressão linear.
- VCJac1: Método das variáveis de controlo, com uma variável de controlo, o tráfego total oferecido aos feixes. O SMIC é calculado com base na teoria de "jackknifing", com sub-divisão máxima ( $M$  pacotes, há  $M$  grupos de estimativas parciais com  $M - 1$  pacotes)
- VCJac30: Método das variáveis de controlo, com uma variável de controlo, o tráfego total oferecido aos feixes. O SMIC é calculado com base na teoria de "jackknifing", com sub-divisão de 30 em 30 pacotes (para  $M$  pacotes, há  $M/30$  grupos de estimativas parciais cada uma para  $M - 30$  pacotes).



- Ant1S: Método das variáveis antitéticas. Entre a simulação directa e a sua antitética há apenas uma sequência antitética, a que determina se se trata de uma tentativa de libertação ou de ocupação.
- Ant2S: Método das variáveis antitéticas. Entre a simulação directa e a sua antitética há duas sequências antitéticas, a que determina se se trata de uma tentativa de libertação ou de ocupação e a que distribui o tráfego de entrada pelos feixes.
- Ant6S: Método das variáveis antitéticas. Entre a simulação directa e a sua antitética há seis sequências antitéticas.

Nos gráficos do apêndice sob a forma de diagramas de barras dos tempos de CPU, para cada gama da congestão e diferentes semi-intervalos de confiança, apresenta-se o comportamento destas implementações. Nos apêndices C e D estão gráficos comparativos do método directo e das diferentes versões do método das variáveis antitéticas. Nos apêndices A e B aparecem apenas as implementações Dir, Ant6S, VCReg e VCJac1, para mais fácil leitura dos resultados. De notar que VCJac1 só aparece na gama de alta congestão e que a implementação VCJac30 não surge nos gráficos apresentados, o que será justificado mais à frente.

A implementação mais eficiente, nas gamas de bloqueio experimentadas, para o sistema ao qual os dados recolhidos se reportam, é a implementação VCReg. O custo computacional de uma variável de controlo é pequeno e, no sistema em estudo, verificou-se existir uma forte correlação entre a variável de saída e a variável de controlo (congestão num dado par de feixes e o tráfego total oferecido), pelo que este método apresenta neste sistema particular óptimos resultados tanto na zona da alta como da baixa congestão. A implementação deste método não apresenta dependência do conjunto de sementes utilizadas. A qualidade dos resultados obtidos, não seria provavelmente tão boa se existisse um maior número de feixes e de módulos, porque a correlação entre o tráfego total oferecido e a congestão num dado par de feixes seria enfraquecida.

A implementação VCReg apresenta na zona da baixa congestão o seu melhor comportamento, especialmente quando os SMIC são pequenos (menores do que 15%) e que corresponde às maiores economias de tempo de CPU. Ainda na zona da baixa congestão e para semi-intervalos de confiança maiores do que 15%, a implementação revela-se vantajosa, mas a economia relativa em tempo de CPU já não é tão marcante.

Quanto ao método das variáveis antitéticas (apêndices C e D), verificou-se que Ant6S é geralmente superior a Ant1S, na gama da baixa congestão e para os SMICs  $\leq 15\%$  (existe uma excepção: bloqueio de 0.5%, conjunto de sementes 2). Comparando Ant2s e Ant1S, verifica-se que na zona de congestão elevada, o comportamento relativo não é estável, no entanto na zona de baixa congestão Ant2S é geralmente mais eficiente do que Ant1S. Finalmente entre Ant6S e Ant1S, a decisão acerca da melhor implementação não é fácil, uma vez que num número significativos de casos o seu comportamento é semelhante e que o comportamento relativo varia do conjunto de sementes 1 para o conjunto de sementes 2. No entanto, para o conjunto de resultados experimentais de

que se dispõe a implementação com melhor comportamento na globalidade dos casos é Ant6S. Assim nos apêndices **A** e **B** apenas surge Ant6S, para tornar mais fácil a comparação das implementações para os diferentes métodos.

A aplicação do método das variáveis antitéticas não apresenta resultados satisfatórios, apesar de ser induzida correlação negativa entre pacotes. Se tomarmos como exemplo o caso em que a congestão é da gama 0.5%, o método directo necessita de 1417 pacotes para atingir o SMIC de 5%, e o método das variáveis antitéticas (Ant6S) necessita apenas de 752 estimativas (o que em pacotes se traduz em  $2 \times 752 = 1504$ ). Ou seja, para que este método seja eficiente não basta induzir *alguma* correlação negativa entre pacotes, é necessário que a correlação negativa induzida seja tal que baste ao método das variáveis antitéticas menos de metade das estimativas de que o método directo necessita para atingir o mesmo SMIC.

O método das variáveis antitéticas, ao ser experimentado neste sistema de comutação digital, raramente se mostrou eficiente. Neste sistema, devido à sua complexidade torna-se difícil garantir uma forte correlação negativa entre estimativas para o bloqueio de chamadas entre pacotes "antitéticos". No sistema de comutação espacial (andar de saída SASC-2) em que anteriormente se aplicou este método os resultados foram mais encorajadores [2]. O andar de saída SASC-2 pode ser descrito sumariamente com um sistema com dois andares: existem 16 grupos de 12 assinantes cada, em que cada um destes assinantes tem acesso a 3 "links" simples e um duplo, "links" esses que têm acesso a um conjunto de  $4 \times q$  verticais de saída ( $q = 1, 2, 3, 4, 5$ ). Neste sistema, mais simples, tudo se passa como se existisse apenas um feixe de entrada e um feixe de saída, pelo que foi possível garantir uma mais forte correlação negativa entre as estimativas para o bloqueio de chamadas entre pacotes "antitéticos" do que no sistema de comutação em estudo em que existem vários feixes de entrada e vários feixes de saída e onde o sistema de controlo que define a escolha dos circuitos de saída dos feixes é qualitativamente diferente (ver 3.2).

As implementações Ant1S Ant2S e Ant6s mostraram ser sensíveis às sequências de números pseudo-aleatórios, principalmente na zona de alta congestão. Nesta zona da congestão, devido à flutuabilidade de comportamento das implementações não parece ser aconselhável a sua utilização. Na zona de baixa congestão, em que Ant6S é *quase* sempre eficiente, o ganho em termos de tempo de CPU é relativamente pequeno.

Tudo isto torna o método das variáveis antitéticas pouco convidativo pelo facto de existir sempre um risco, embora pequeno, de pior desempenho do que o método directo.

O método das variáveis de controlo em que o intervalo de confiança é calculado da teoria de "jackknifing", apresenta resultados nada atractivos. A sub-divisão unitária (cada grupo exclui um pacote) conduz a um estimador  $\hat{\mu}_j$  de menor variância, mas apesar disso são necessários muitos pseudo-valores de "jackknifing" para conseguir uma estimativa controlada de qualidade. Na gama de alta congestão os custos em termos de tempo de CPU são maiores do que os do método directo, embora da mesma ordem de grandeza, mas na zona de baixa congestão são de tal forma elevados que não se faz a sua inclusão nos gráficos.

Dados os maus resultados obtidos com VCJac1, optou-se então por diminuir a sub-divisão, tomando-se grupos com a exclusão de 5, 10 e 30 pacotes. Os resultados melhoraram comparativamente, para os semi-intervalos de confiança maiores do que 15%, com a diminuição de número de pseudo-valores de “jackknifing” para um mesmo número de pacotes. Para os semi-intervalos de confiança mais pequenos, e gama de congestão baixa, as implementações continuaram a manifestar-se muito piores do que o método directo. Observando a forma como é calculado o SMIC verifica-se, para um dado número de pacotes “ $k$ ”, um aumento do número de pseudo-valores de “jackknifing” (subdivisão máxima,  $k$  pacotes,  $k$  pseudo-valores de “jackknifing”) não implica necessariamente uma diminuição da variância  $S_j^2$ , pois esta variância é proporcional  $(k - 1)^2$  em que  $k$  é o número de pseudo-valores de “jackknifing”. Por outro lado o aumento do número de pseudo-valores de “jackknifing” conduz a estimadores  $\hat{\mu}_j$  de menor variância em torno da sua média, o que contribui para uma diminuição de  $S_j^2$ . Não é por isso possível garantir que este método conduza a um aumento de eficiência, mesmo escolhendo vários níveis de sub-divisão.

Na gama de alta congestão, a simulação efectuada pela implementação VCJac30, termina apenas com três pseudo-valores de “jackknifing”, pois o SMIC de 5% é atingido. A qualidade estatística deste SMIC é fraca pois na gama da baixa congestão e SMICs até 15%, basta  $k = 3$  mas para obter um SMIC de 10% já são necessários  $k = 1200/30 = 40$  pseudo-valores de “jackknifing”. Por este motivo não são apresentados os valores de tempo de CPU de VCJac30 nesta gama da congestão. A implementação VCJac30, na zona de baixa congestão, calcula os semi-intervalos de confiança maiores ou iguais a 15% apenas com 3 pseudo-valores de “jackknifing”. Por outro lado, para os SMICs pequenos, o custo em termos de tempo de CPU é bastante superior à implementação Dir e nalguns casos superior a VCJac1. Fica assim esclarecida a razão pela qual não aparecem os resultados desta implementação nos apêndices A e B.

## 6 Conclusões

A análise realizada na secção anterior permite concluir que, independentemente da gama de congestão, o método das variáveis de controlo, em que o intervalo de confiança é calculado pela teoria da regressão linear, e desde que a variável de controlo esteja fortemente correlacionada com a saída de interesse, deverá ser utilizado sempre que os custos de CPU sejam elevados. Verificou-se que quanto menor o SMIC melhor comportamento relativo apresenta este método, o que parece indicar que sempre que se desejarem estimativas com boa qualidade estatística este método é aconselhável. Comparando com o estudo anteriormente feito sobre um sistema de comutação telefónica, confirma-se o bom desempenho do método das variáveis de controlo, quando o intervalo de confiança é calculado pela teoria da regressão linear.

Ainda relativamente ao método das variáveis de controlo, quando o intervalo de confiança é calculado da teoria de “jackknifing” verifica-se que o método é muito pouco eficiente ou mesmo ineficiente face ao método directo, isto mesmo experimentando diferentes sub-divisões das estimativas parciais. Os resultados

obtidos para este método no sistema mais simples, anteriormente experimentado, também não foram muito encorajadores, mas no sistema de comutação digital os resultados foram comparativamente piores sendo quase sempre inferiores aos da simulação pelo método directo. Como conclusão final deste dois estudos podemos afirmar que este método de cálculo do SMIC, é desaconselhável neste tipo de simuladores.

Quanto ao método das variáveis antitéticas, na gama de baixa congestão, a escolha das sequências que deverão ter antitética deve ser feita tendo em conta a sua possível influência na variável de saída de interesse (semelhança de comportamento entre Ant2S e Ant6S). Nesta gama de congestão otêm-se resultados positivos na maior parte dos casos, e quando o desempenho é desfavorável, raramente o é significativamente pior do que o da implementação Dir. Por outro lado, os ganhos relativos obtidos com a aplicação deste método apenas esporadicamente se apresentam como realmente convidativos. Para a gama de alta congestão e SMIC elevados (maiores do que 15%) não vale a pena a utilização do método das variáveis antitéticas, pois a economia em tempo de CPU é rara e pequena.

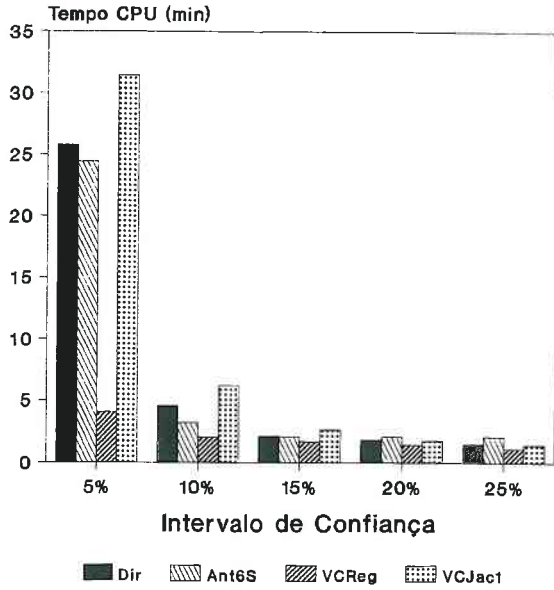
Resumindo, o método das variáveis de controlo (em que o intervalo de confiança é calculado da teoria da regressão linear) é muito convidativo uma vez que se escolha uma variável de controlo fortemente correlacionada com a saída de interesse. Nos sistemas do tipo dos analisados (neste trabalho e em [2]) esta escolha recai naturalmente no valor do tráfego oferecido, ou noutra com ele intimamente associado como é o caso do tráfego por fonte livre, quando o tráfego de entrada é do tipo Engset [2]. O método das variáveis de controlo em que o intervalo de confiança é calculado da teoria de "jackknifing", apresentou em geral maus resultados, além da dificuldade em decidirmos acerca da subdivisão dos pacotes mais conveniente. Parece-nos portanto não ser aconselhável a utilização deste método, em simulações do tipo experimentado. O método das variáveis antitéticas tem um comportamento pouco estável para simulações curtas e para simulações mais longas (pequena congestão) deverão pesar-se os custos associados às implementações adoptadas (representação do estado do sistema e gestão de comunicação entre a simulação directa e antitética) sendo esta problemática diferente do que se passa no método das replicações independentes.

## Referências Bibliográficas

- [1] Bratley, P.; Fox, L. B. e Scrage, E. L., *Guide to Simulation*, 2ª ed., Springer-Verlag, New York, 1987.
- [2] Craveirinha, J. e Gomes, T., "Application of Variance Reduction Techniques to a Monte Carlo Teletraffic Simulation", aceite para publicação no "ITC 13 Discussion Circles", ITC 13, Copenhaga, Junho de 1991.
- [3] Dunn, O. J. e Clark, A. V., *Applied Statistics: Analysis of Variance and Regression*, John Wiley, New York, 1974.

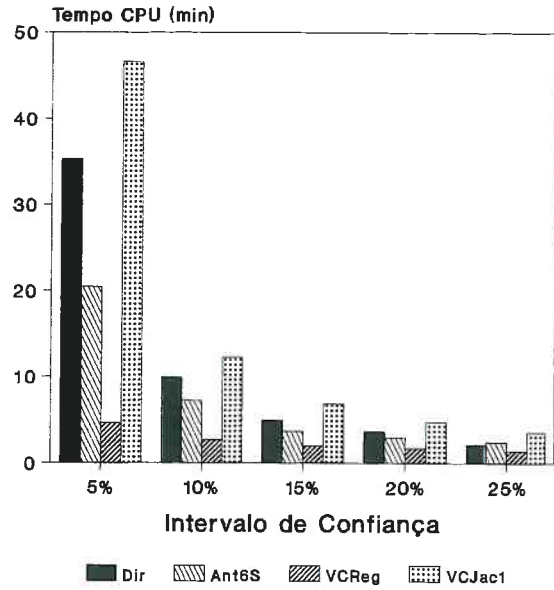
- [4] Gray, H. L., e Schucany, W. R., *The generalized Jackknife Statistics*, Marcel Dekker, New York, 1972.
- [5] Kleijnen, J. P. C., *Statistical Techniques in Simulation*, Part I, Marcel Dekker, New York, 1974.
- [6] Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol 2, Addison-Wesley, 2ªed, 1981.
- [7] Lavenberg, S. S. e Welch, P. D., "A Perspective on the Use of Control Variables to Increase Efficiency of Monte Carlo Simulations", *Management Science*, Vol. 27, Nº3, pp 323-335, 1981.
- [8] Lavenberg, S. S.; Moeller, T. L. e Welch, P. D., "Statistical Results on Control Variables With Application to Queueing Network Simulation", *Operations Research*, Vol. 30, Nº1, pp 182-202, 1982.
- [9] Porta Nova, A. M., "A Generalized Approach to Variance Reduction in Discrete-event Simulation Using Control Variables", Dissertação de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade do Texas, Austin, 1985.
- [10] Tralhão, L. M. L. e Craveirinha, J. M. F., "Simulador/Configurador para a Estação de Trânsito Digital (ETD) - Projecto CET", 1986
- [11] Tuckey, J. W., "Bias and Confidence in Not Quite Large Samples", *Ann. Math. Statist.*, Vol. 29, 1958.

**A** Bloqueio 7-8%  
Sementes 1



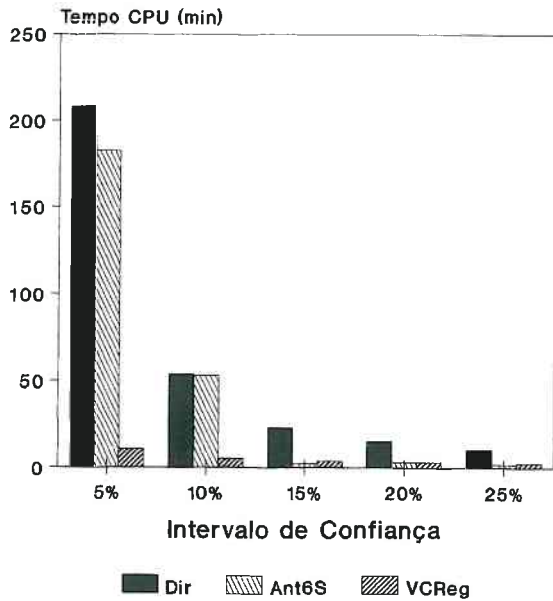
Dimensao: 1024

Bloqueio 4-5%  
Sementes 1



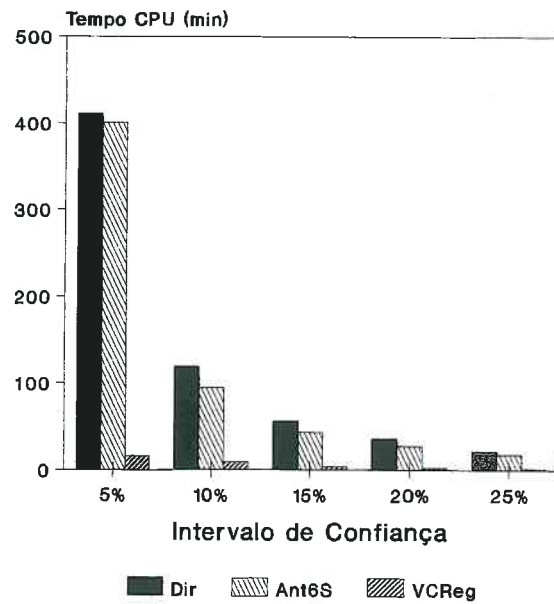
Dimensao: 1024

Bloqueio 1%  
Sementes 1



Dimensao: 1024

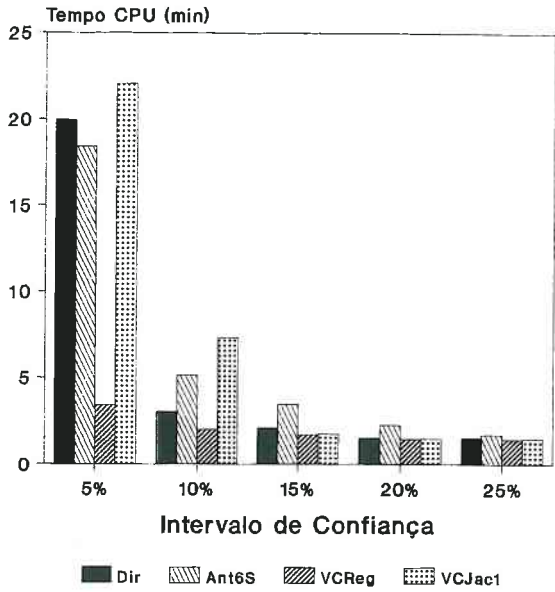
Bloqueio 0.5%  
Sementes 1



Dimensao: 1024

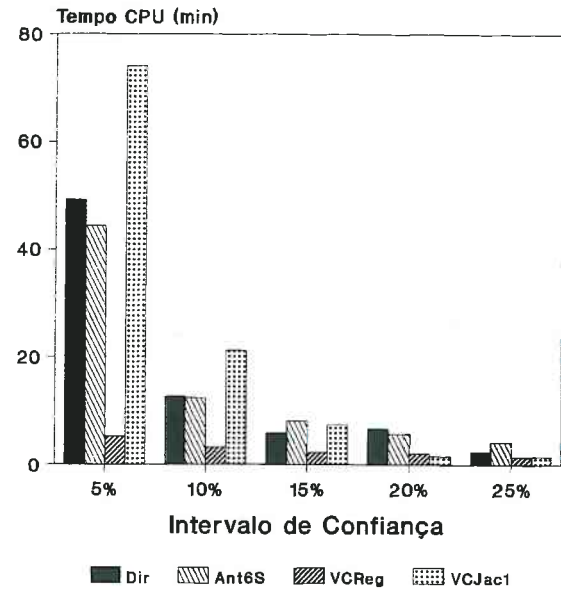
Figura A

### B Bloqueio 7-8% Sementes 2



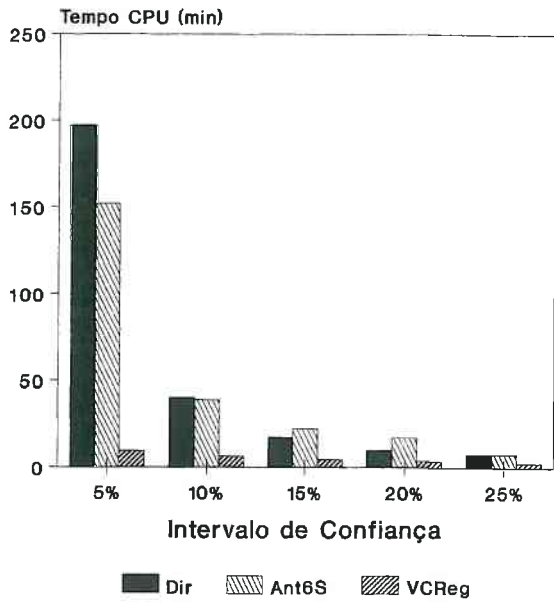
Dimensao: 1024

### Bloqueio 4-5% Sementes 2



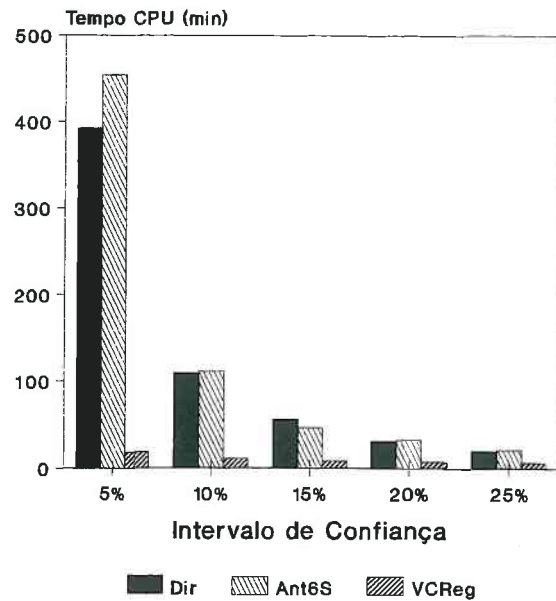
Dimensao: 1024

### Bloqueio 1% Sementes 2



Dimensao: 1024

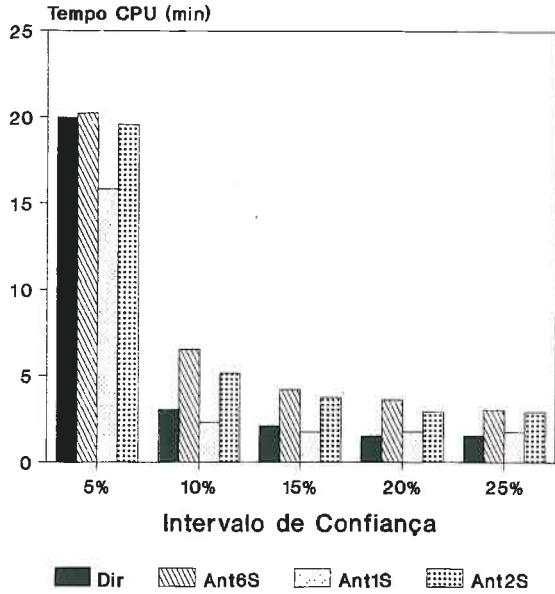
### Bloqueio 0.5% Sementes 2



Dimensao: 1024

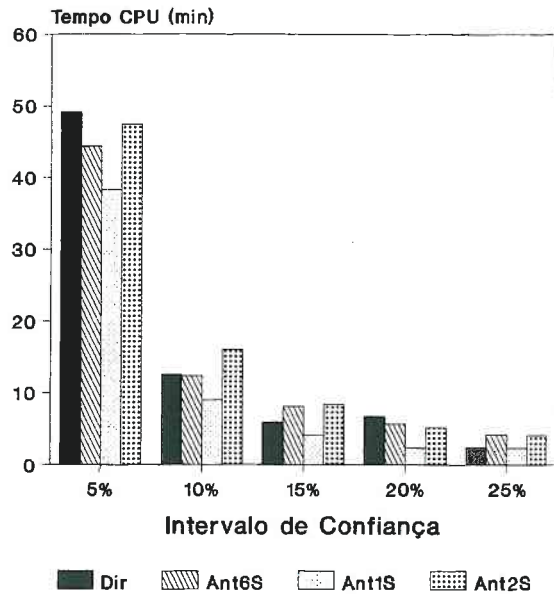
Figura B

**D** Bloqueio 7-8%  
Sementes 2



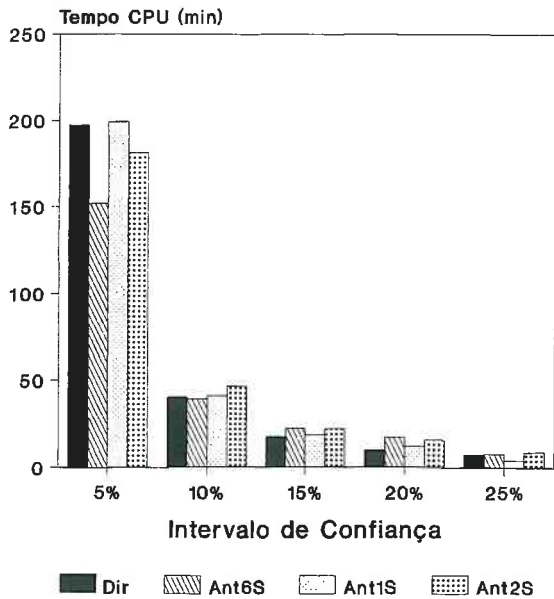
Dimensao: 1024

Bloqueio 4-5%  
Sementes 2



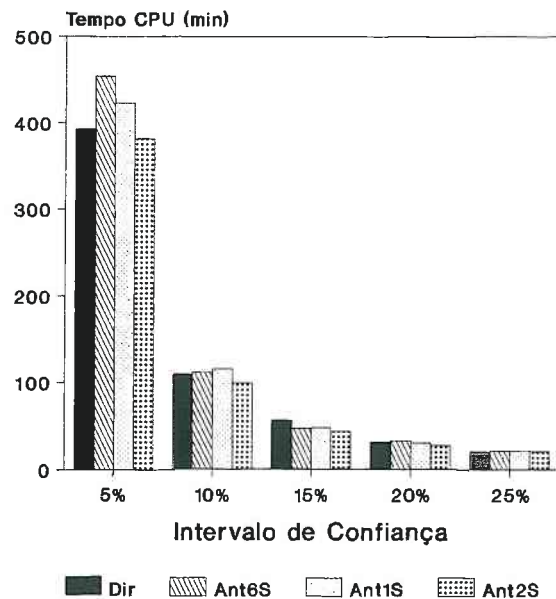
Dimensao: 1024

Bloqueio 1%  
Sementes 2



Dimensao: 1024

Bloqueio 0.5%  
Sementes 2



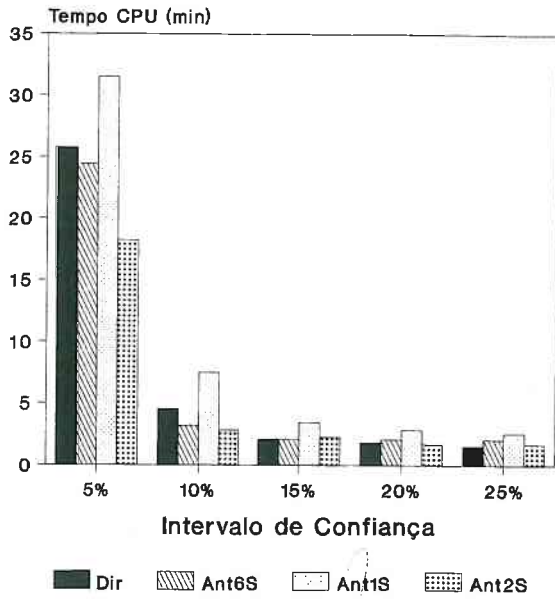
Dimensao: 1024

Figura D



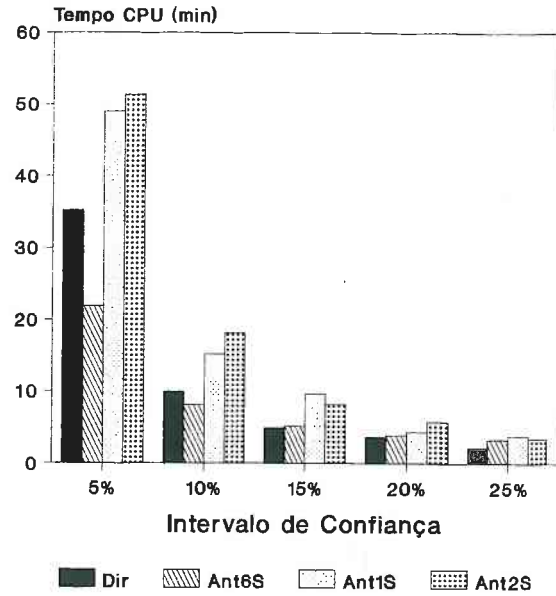
C

### Bloqueio 7-8% Sementes 1



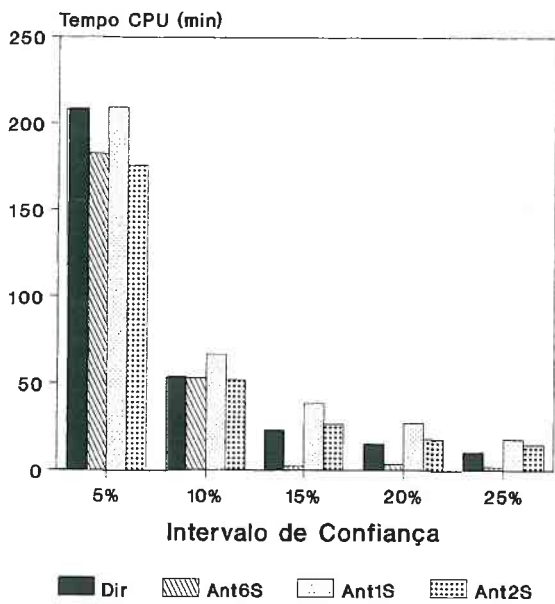
Dimensao: 1024

### Bloqueio 4-5% Sementes 1



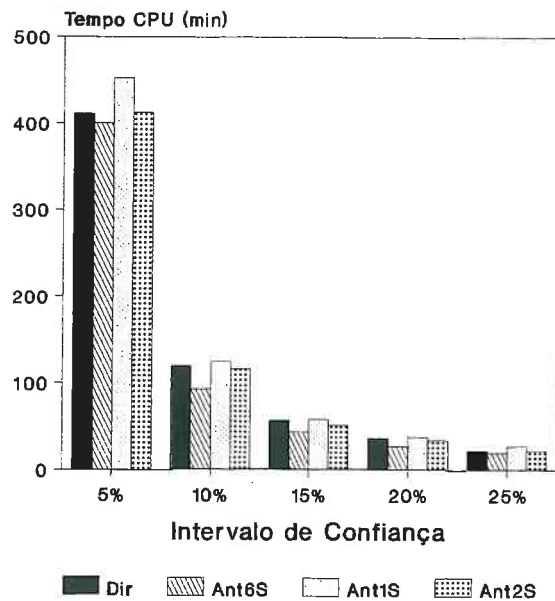
Dimensao: 1024

### Bloqueio 1% Sementes 1



Dimensao: 1024

### Bloqueio 0.5% Sementes 1



Dimensao: 1024

Figura C