Algoritmos de Cálculo de Bloqueios Ponto a Ponto em Redes com Encaminhamento Alternativo Sujeitas a Avarias

por

José Fernandes Craveirinha

Jorge Sá Esteves

Teresa Martínez Gomes

INESC – Núcleo de Coimbra

Relatório de Investigação ET-T2

Junho de 1994

Algoritmos de Cálculo de Bloqueios Ponto a Ponto em Redes com Encaminhamento Alternativo Sujeitas a Avarias

José Craveirinha
Jorge Sá Esteves
Teresa Martínez Gomes

Resumo

O cálculo de bloqueios ponto a ponto em redes de teletráfego com encaminhamento alternativo, usando modelos bi-paramétricos de tráfego (ou outros), põe problemas a nível da especificação de algoritmos iterarivos globais e de sub-modelos de cálculo dos tráfegos marginais nos feixes, de natureza delicada, sobretudo quando se consideram redes de grande dimensão e a existência de avarias em feixes e/ou nós da rede. Neste trabalho é proposta, de forma sistematizada uma abordagem algoritmica desses problemas tomando como base a função de Wan Chan no que concerne ao cálculo dos bloqueios ponto a ponto em função dos bloqueios marginais e focando por outro lado os vários algoritmos de cálculo numérico desenvolvidos e/ou utilizados e a sua interligação no modelo global. Admite-se que cada avaria (ou avarias) na rede física correspondem a outras tantas configurações de rede funcionalmente diferentes, como é típico nos modelos de análise de fiabilidade-qualidade de serviço de redes (ver relatório [8]) .

1 Introdução

O cálculo de bloqueios ponto a ponto em redes de teletráfego com encaminhamento alternativo, usando modelos bi-paramétricos de tráfego (ou outros), põe problemas a nível da especificação de algoritmos iterarivos globais e de sub-modelos de cálculo dos tráfegos marginais nos feixes, de natureza delicada, sobretudo quando se consideram redes de grande dimensão e a existência de avarias em feixes e/ou nós da rede.

Este problema geral, para uma dada rede definida pela sua estrutura (topologia, e capacidades dos feixes), regras de encaminhamento e pelos tráfegos oferecidos entre nós (centros de comutação) conduz a vários problemas e questões particulares a saber:

i) A obtenção de um algoritmo numérico eficiente, necessariamente iterativo, para cálculo dos bloqueios marginais (experimentados pelos fluxos de tráfego nó a nó nos arcos da rede que podem utilizar em função do encaminhamento). Este algoritmo é utilizado para resolver um número por vezes muito elevado de equações não lineares, implícitas, que será de dimensão proporcional ao produto do número de fluxos de tráfego origem-destino pelo número de arcos utilizados em média por cada um deles, nos caminhos definidos na rede, pelas regras de encaminhamento.

ii) A escolha de um modelo biparamétrico de tráfego (por ser o tipo de aproximação mais simples e computacionalmente eficiente numa rede de dimensão significativa) que garanta um compromisso razoável entre eficiência e erros (inerentes à aproximação ao modelo estocástico), para cálculo dos bloqueios marginais em função dos tráfegos e variâncias marginais nos feixes da rede.

iii) O cálculo das médias e variâncias marginais em função dos valores correntes dos bloqueios marginais.

iv) Cálculo dos bloqueios ponto a ponto em função dos bloqueios marginais.

v) A forma de interacção entre os algoritmos correspondentes aos pontos i), ii), iii) e iv).

Iremos neste trabalho abordar de forma sistematizada toda esta problemática focando em detalhe os pontos i), iv) e v) dado que iii) (cálculo das médias e variâncias marginais já foi tratado no relatório [3] - onde se propôs um novo algorimo para o efeito). Quanto ao ponto ii) (modelo aproximativo bi-paramétrico do tráfego de transbordo) as suas bases estão revistas em [3] e a análise detalhada de alguns modelos em [5], fazendo-se no presente relatório apenas uma breve referência a esta questão de modelação de tráfego.

Começaremos por apresentar a representação matemática da rede e por definir a respectiva notação (secção 2). O modelo de cálculo dos bloqueios ponto a ponto será sistematizado e decomposto em vários algoritmos, articulados, na secção 3. Na secção 4 discute-se e apresenta-se uma iteradora de Gauss-Seidel para resolução das equações não lineares que permitem calcular os bloqueios marginais. A descrição da teoria subjacente aos algoritmos de cálculo do bloqueio ponto a ponto em função dos bloqueios marginais e a formulação desses algoritmos, são apresentados na secção 5.

2 Representação da Rede

2.1 Rede de Teletráfego

Iremos representar matematicamente uma rede de teletráfego (inter-centrais) com comutação por circuitos através do 6-uplo ordenado:

$$\mathcal{R} = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{C}, \mathcal{R}_a)$$

onde cada elemento representa as entidades seguintes:

- $\mathcal{V}$ é o conjunto (finito) de nodos (centros de comutação) da rede e $\mathcal{L}$ é o conjnto dos arcos (pares ordenados de nodos) de tal forma que $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ é um grafo conexo que define a topologia da rede.

- O conjunto $\mathcal{F}$ é o conjunto de fluxos de tráfego em $\mathcal{G}$:

  $$\mathcal{F} = \{(v_i, v_j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : v_i \neq v_j\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_{|\mathcal{F}|}\}$$

  Definiremos para cada fluxo $f \in \mathcal{F}$ um conjunto ordenado $\mathcal{P}(f)$ de caminhos para o fluxo f, designado por plano de encaminhamento:

  $$\mathcal{P}(f) = \left[p^1(f), p^2(f), \ldots, p^k(f)\right]$$

  onde $k = |\mathcal{P}(f)|$ depende de f.

Ao conjunto: $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(f) : f \in \mathcal{F}\}$ chamamos conjunto dos planos de encaminhamento. Em geral cada caminho $p(f)$ é definido por uma sequência de arcos contíguos de rede:

$$p(f) = \{l'_1, l'_2, \ldots, l'_{k-1}\}$$

tal que:

$$l'_j = \left(v'_j, v'_{j+1}\right) \in \mathcal{L}, \quad j = 1(1)k-1$$

Notar que no caso mais geral (redes com avaria e sem cranckback) além dos chamados caminhos completos, (para os quais o último arco é $l'_{r-1} = (v'_{r-1}, v'_r \equiv v_t)$ sendo v_t o nó destino do fluxo $f \equiv (v_s, v_t)$ – ou seja caminhos que permitem alcançar o nó destino – também podem ocorrer caminhos de perda que não permitem alcançar o nó destino; é o caso de certos caminhos nas redes sem cranckback e dos caminhos interrompidos por corte dos feixes, por avarias nos suportes físicos.

- ε é o conjunto de relações cujos elementos são pares (fluxo, arco):

$$\varepsilon = \{(f, l) \in \mathcal{F} \times \mathcal{L} : \exists p \in \mathcal{P}(f) \quad \text{com} \quad l \in p\}$$

- $\mathcal{C}$ é uma função que define de forma genérica as capacidades $\mathcal{C}(l)$ dos arcos (feixes funcionais):

$$\begin{aligned} \mathcal{C}: \ & \mathcal{L} \to \mathcal{Z}^+ \\ & l \mapsto \mathcal{C}(l) \end{aligned}$$

- $\mathcal{R}_a$ é o conjunto de regras que juntamente com $\mathcal{P}$ definem totalmente o algoritmo de encaminhamento para todos os fluxos. Por exemplo definirá se existe ou não cranckback, ou situações intermédias (cranckback só em certos nós de trânsito) e depende do sistema de sinalização da rede física e das funções de encaminhamento implementadas no software de controlo nos centros de comutação.

Adicionalmente admitiremos que os bloqueios internos nos centros de comutação são nulos ou desprezáveis.

2.2 Caracterizaçao do Tráfego na Rede

2.2.1 Hipótese Gerais

i) Admitiremos que os fluxos de tráfego exógeno, oferecidos entre pares de nós são processos de Poisson, independentes entre si e que as durações das chamadas e portanto os tempos de ocupação têm uma distribuição exponencial negativa.

ii) Considera-se a hipótese simplificativa, usual nas redes deste tipo, da independência estatística das ocupações nos diferentes arcos da rede.

iii) Como já referido iremos usar na modelação estocástica aproximada dos fluxos de tráfego, de tipo bi-paramétrico, baseada na especificação dos dois primeiros momentos, média e variância dos fluxos de tráfego.

iv) Adicionalmente admitiremos que os bloqueios internos nos centros de comutação são nulos ou desprezáveis.

2.2.2 Parâmetros Caracterizadores dos Tráfegos

Dada a rede $\mathcal{R}$ iremos considerar o seguinte conjunto de parâmetros para efeitos de análise do tráfego na rede, tendo em conta as hipóteses e objectivos do modelo de tráfego na rede:

- $AT : \mathcal{F} \to \mathbf{R}_0^+,\ f \mapsto AT(f)$

  $AT(f) \doteq$ Média do tráfego exógeno do fluxo f.

- $EEB : \mathcal{F} \to [0,1] \subset \mathbf{R},\ f \mapsto EEB(f)$

  $EEB(f) \doteq$ Bloqueio ponto a ponto do fluxo f.

  Define a probabilidade de uma chamada do fluxo f ser perdida.

- $A : \mathcal{L} \to \mathbf{R}_0^+,\ l \mapsto A(l)$

  $A(l) \doteq$ Média do tráfego (global) oferecido ao ramo l.

- $\check{A} : \mathcal{L}(l) \to \mathbf{R}_0^+,\ l \mapsto \check{A}(l)$

  $\check{A}(l) \doteq$ Média do tráfego de transbordo (global) do ramo l.

- $\hat{A} : \mathcal{L} \to \mathbf{R}_0^+,\ l \mapsto \hat{A}(l)$

  $\hat{A}(l) \doteq$ Média do tráfego transportado (global) pelo ramo l.

- $A_m : \mathcal{F} \times \mathcal{L} \to \mathbf{R}_0^+,\ (f,l) \mapsto A_m(f,l)$

  $A_m(f,l) \doteq$ Média do tráfego marginal oferecido pelo fluxo f ao ramo l (Se $(f,l) \notin \varepsilon$, tem-se, $A_m(f,l) = 0$).

- $\check{A}_m : \mathcal{F} \times \mathcal{L} \to \mathbf{R}_0^+,\ (f,l) \mapsto \check{A}_m(f,l)$

  $\check{A}_m(f,l) \doteq$ Média do tráfego marginal de transbordo do fluxo f no ramo l (Se $(f,l) \notin \varepsilon$, tem-se, $\check{A}_m(f,l) = 0$).

- $\hat{A}_m : \mathcal{F} \times \mathcal{L} \to \mathbf{R}_0^+,\ (f,l) \mapsto \hat{A}_m(f,l)$

  $\hat{A}_m(f,l) \doteq$ Média do tráfego marginal do fluxo f transportado pelo ramo l (Se $(f,l) \notin \varepsilon$, tem-se, $\hat{A}_m(f,l) = 0$).

- $B_m : \mathcal{F} \times \mathcal{L} \to [0,1] \subset \mathbf{R},\ (f,l) \mapsto B_m(f,l)$

$$B_m(f,l) = \begin{cases} \check{A}_m(f,l)/A_m(f,l) & \text{se } (f,l) \in \varepsilon \\ 0 & \text{se } (f,l) \notin \varepsilon \end{cases}$$

  $B_m(f,l) \doteq$ Bloqueio marginal de chamadas do fluxo f no ramo l.

3 Cálculo dos Bloqueios Ponto a Ponto – Sistematização Algoritmica

3.1 Algoritmos interactuantes para o cálculo da matriz de bloqueios ponto a ponto

Numa perspectiva algorítmica, vamos abordar de forma sistematizada o problema $PEEB$[1] (problema do cálculo dos bloqueios ponto a ponto), ou seja, vamos definir o conjunto de

[1] da expressão inglesa "end-to-end blocking".

procedimenttos algoritmicos que permitem calcular os bloqueios ponto a ponto, quando conhecemos a matriz de tráfego exógeno para a rede. Seguiremos a abordagem e notação propostas em [5] e [6].

Vamos utilizar a seguinte notação:

- V, $\breve{V}$ e $\hat{V}$ para representar, respectivamente, a variância do tráfego (global), a variância do tráfego de transbordo (global) do ramo l e a variância do tráfego transportado (global) pelo ramo l.

- V_m, $\breve{V}_m$ e $\hat{V}_m$ para representar, respectivamente, a variância do tráfego marginal oferecido pelo fluxo f ao ramo l, a variância do tráfego marginal de transbordo do fluxo f no ramo l e a variância do tráfego marginal do fluxo f transportado pelo ramo l.

- Z, $\breve{Z}$ e $\hat{Z}$ para representar, respectivamente, o factor de pico do tráfego (global), o factor de pico do tráfego de transbordo (global) do ramo l e o factor de pico do tráfego transportado (global) pelo ramo l.

- Z_m, $\breve{Z}_m$ e $\hat{Z}_m$ para representar, respectivamente, o factor de pico do tráfego marginal oferecido pelo fluxo f ao ramo l, factor de pico do tráfego marginal de transbordo do fluxo f no ramo l e o factor de pico do tráfego marginal do fluxo f transportado pelo ramo l.

- $B(l)$ bloqueio global de chamadas no ramo l.

Vamos agora definir as matrizes e vectores que intervêm na descrição dos algoritmos envolvidos no problema PEEB.

Nas definições que se seguem supõe-se fixada uma ordenação para os elementos dos conjuntos $\mathcal{V}, \mathcal{L}, \mathcal{F}$ e $\mathcal{E}$.

- Matriz do tráfego exógeno: $\overline{AT} = [AT_{ij}],\ i,j = 1(1)|\mathcal{V}|$

$$AT_{ij} = \begin{cases} AT(v_i, v_j) & \text{se } f = (v_i, v_j) \in \mathcal{F} \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

- Matriz de bloqueios ponto a ponto: $\overline{EEB} = [EEB_{ij}],\ i,j = 1(1)|\mathcal{V}|$

$$EEB_{ij} = \begin{cases} EEB(v_i, v_j) & \text{se } f = (v_i, v_j) \in \mathcal{F} \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

- Matriz parametrizadora do tráfego oferecido a um ramo $l \in \mathcal{L}$:
$\overline{AL}(l) = [AL(l)_{ij}],\ i = 1,2;\ j = 1(1)|\mathcal{F}|$

$$AL(l)_{ij} = \begin{cases} A_m(f_j, l) & \text{se } i = 1 \\ V_m(f_j, l) & \text{se } i = 2 \end{cases}$$

Ou seja:

$$\overline{AL}(l) = \begin{bmatrix} A_m(f_1,l) & A_m(f_2,l) & A_m(f_3,l) & \cdots & A_m(f_{|\mathcal{F}|},l) \\ V_m(f_1,l) & V_m(f_2,l) & V_m(f_3,l) & \cdots & V_m(f_{|\mathcal{F}|},l) \end{bmatrix}$$

- Matriz parametrizadora do tráfego de transbordo num ramo $l \in \mathcal{L}$:
  $\widetilde{\widetilde{AL}}(l) = [\widetilde{AL}(l)_{ij}], \ i = 1,2; \ j = 1(1)|\mathcal{F}|$

$$\widetilde{AL}(l)_{ij} = \begin{cases} \breve{A}_m(f_j, l) & \text{se } i = 1 \\ \breve{V}_m(f_j, l) & \text{se } i = 2 \end{cases}$$

  Ou seja:

$$\widetilde{\widetilde{AL}}(l) = \begin{bmatrix} \breve{A}_m(f_1, l) & \breve{A}_m(f_2, l) & \breve{A}_m(f_3, l) & \cdots & \breve{A}_m(f_{|\mathcal{F}|}, l) \\ \breve{V}_m(f_1, l) & \breve{V}_m(f_2, l) & \breve{V}_m(f_3, l) & \cdots & \breve{V}_m(f_{|\mathcal{F}|}, l) \end{bmatrix}$$

- Matriz parametrizadora do tráfego transportado pelo ramo $l \in \mathcal{L}$:
  $\widehat{\widehat{AL}}(l) = [\widehat{AL}(l)_{ij}], \ i = 1,2; \ j = 1(1)|\mathcal{F}|$

$$\widehat{AL}(l)_{ij} = \begin{cases} \hat{A}_m(f_j, l) & \text{se } i = 1 \\ \hat{V}_m(f_j, l) & \text{se } i = 2 \end{cases}$$

  Ou seja:

$$\widehat{\widehat{AL}}(l) = \begin{bmatrix} \hat{A}_m(f_1, l) & \hat{A}_m(f_2, l) & \hat{A}_m(f_3, l) & \cdots & \hat{A}_m(f_{|\mathcal{F}|}, l) \\ \hat{V}_m(f_1, l) & \hat{V}_m(f_2, l) & \hat{V}_m(f_3, l) & \cdots & \hat{V}_m(f_{|\mathcal{F}|}, l) \end{bmatrix}$$

- Matriz de bloqueios marginais, $\overline{\overline{BM}}$, tal que:

$$\overline{\overline{BM}} = [BM_{ij}], \ BM_{ij} = B_m(f_i, l_j), \ i = 1(1)|\mathcal{F}|, \ j = 1(1)|\mathcal{L}|$$

  Ou seja:

$$\overline{\overline{BM}} = \begin{bmatrix} B_m(f_1, l_1) & B_m(f_1, l_2) & B_m(f_1, l_3) & \cdots & B_m(f_1, l_{|\mathcal{L}|}) \\ B_m(f_2, l_1) & B_m(f_2, l_2) & B_m(f_2, l_3) & \cdots & B_m(f_2, l_{|\mathcal{L}|}) \\ B_m(f_3, l_1) & B_m(f_3, l_2) & B_m(f_3, l_3) & \cdots & B_m(f_3, l_{|\mathcal{L}|}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_m(f_{|\mathcal{F}|}, l_1) & B_m(f_{|\mathcal{F}|}, l_2) & B_m(f_{|\mathcal{F}|}, l_3) & \cdots & B_m(f_{|\mathcal{F}|}, l_{|\mathcal{L}|}) \end{bmatrix}$$

- Ao vector correspondente à coluna j da matriz $\overline{\overline{BM}}$ chamamos vector de bloqueios marginais para o ramo l_j, denotado como:
  $\overline{BL}(l_j) = [\ B_m(f_1, l_j), B_m(f_2, l_j), B_m(f_3, l_j), \ldots, B_m(f_{|\mathcal{F}|}, l_j)\ ]^T$

- Ao transposto do vector correspondente à linha i da matriz $\overline{\overline{BM}}$ chamamos vector de bloqueios marginais para o fluxo f_i, denotado como:
  $\overline{BF}(f_i) = \ [\ B_m(f_i, l_1), B_m(f_i, l_2), B_m(f_i, l_3), \ldots, B_m(f_i, l_{|\mathcal{L}|})\ ]^T$

- Ao vector:
  $\overline{BE} = [\ B_m(e_1), B_m(e_2), B_m(e_3), \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})\ ]^T$
  chamamos simplesmente vector de bloqueios marginais.

Iremos agora definir funcionalmente os algoritmos envolvidos no problema PEEB.

3.2 Algoritmos AMC e AMT:

Estes algoritmos a seguir definidos permitem calcular a matriz de bloqueios marginais $\overline{BM}$.

3.2.1 AMC: Algoritmo do Modelo de Carga

Envolve os algoritmos que permitem calcular a matriz parametrizadora do tráfego oferecido, $\overline{AL}(l)$, para todo o ramo $l \in \mathcal{L}$, a partir da matriz de bloqueios marginais, $\overline{BM}$, algoritmos esses já descritos no relatório [3]. Com estes algoritmos consegue-se implementar computacionalmente a função Θ_l, tal que:

$$\overline{AL}(l) = \Theta_l\ (\overline{BM}),\ \forall l \in \mathcal{L}$$

3.2.2 AMT: Algoritmo do Modelo de Transbordo

É o algoritmo que permite calcular o vector de bloqueios marginais $\overline{BL}(l)$ num ramo $l \in \mathcal{L}$, a partir da matriz de tráfego oferecido $\overline{AL}(l)$. Com estes algoritmos implementam-se computacionalmente as funções Υ_l tais que:

$$\overline{BL}(l) = \Upsilon_l\ (\ \overline{AL}(l)\ ),\ \forall l \in \mathcal{L}$$

Como $\overline{BL}(l)$ é apenas uma coluna da matriz de bloqueios marginais, então para definir esta temos que definir outra função Υ:

$$\overline{BM} = \Upsilon\ \left(\overline{AL}(l_1), \overline{AL}(l_2), \overline{AL}(l_3), \ldots, \overline{AL}(l_{|\mathcal{L}|}\ \right)$$

Em relação aos modelos aproximados biparamétricos de tráfego de transbordo que permitem calcular os bloqueios marginais existem numerosas abordagens/aproximações, desenvolvidas desde as décadas de 50, até muito recentemente.

Sem pretender uma análise exaustiva dum tema, certamente de grande vastidão bibliográfica, poderiamos referenciar no quadro seguinte de forma muito sintética as aproximações talvez mais importantes:

- Aproximações clássicas
  - Aprox. Katz
  - Aprox Lindberger
  - Aprox Sanders/Haemers
- Modelo BPP de Delbrouck
- Aprox. tipo Fredericks. baseadas na Relação de Congestão
  - Aprox. de Fredericks
  - Aprox. de Delbrouck
  - Aprox. derivada do método IPP
  - Aprox. Sanders/Doorn
  - Aprox. Jagerman
  - Aprox. Metha/Doorn

Se a aproximação escolhida for uma das do tipo Fredericks, temos ainda que fazer outra aproximação para o modelo do fluxo de tráfego global oferecido a feixe (B), sendo os seguintes os mais utilizados:

- ERT de Wilkinson
- Aproximação de Hayward/Fredericks
- Aproximação Decomposição de Sanders/Haemers/Wilcke

Para mais detalhes sobre as diferentes abordagens e consulta bibliográfica remetenos para as resenhas sobre esta matéria incluidas em [2] e [5].

O modelo utilizado é uma aproximação do tipo Fredericks [7], que exprime o bloqueio marginal $B_j \equiv B_m$ num feixe em função do bloqueio médio de chamadas, $B \equiv B(l)$, da congestão no tempo, E, no feixe, e do factor de pico $Z_j \equiv Z_m$ associado a esse tráfego marginal oferecido:

$$B_j = E + \frac{Z_j - 1}{Z - 1}(B - E) \tag{1}$$

A congestão média de chamadas no sistema (probabilidade de bloqueio global de chamadas nesse ramo) será cálculada pelo método ERT envolvendo o cálculo de x^* e A^* (cf. [3]), que definem o grupo de azar equivalente.

$$B = \breve{M}/M = E_B(x^* + N, A^*)/E_B(N, A^*)$$

sendo $M = \sum_{j=1}^{S} M_j$, $V = \sum_{j=1}^{S} V_j$ e $Z = V/M$, sendo S o número de fluxos oferecidos ao feixe e N o número de circuitos do feixe (de transbordo). Foi esta a aproximação implementada.

Resta o problema do cálculo da congestão no tempo E (probabilidade dos circuitos estarem todos ocupados) E.

Sendo a relação de congestão definida por:

$$R = \frac{B}{E}$$

se conhecermos o seu valor podemos facilmente calcular E.

Em [11] é feita uma análise circunstanciada do problema do cálculo da relação de congestão. O método de cálculo proposto por este autores e que foi adoptado no nosso modelo é considerado o que fornece melhores resultados numa maior variedade de situações estudadas:

$$R^{MVL} = \frac{2A^*N(x^* - 1)}{Mx^*\left(x^* + N - 1 - A^* - \frac{2N}{x^*} + \sqrt{(x^* + N - 1 - A^*)^2 + 4A^*N}\right)} \tag{2}$$

A aproximação adoptada – aproximação tipo Fredericks com fórmula de Metha-Doorn e tomando para o tráfego global o modelo ERT de Wilkinson – foi escolhida por se considerar que no presente contexto era um bom compromisso entre a precisão e a eficiência computacional, sendo este último factor de grande peso no nosso modelo do problema PEEB. Tal conclusão deriva da experiência e conhecimento dos autores, no âmbito de estudos anteriores e do próprio estudo em causa.

3.2.3 Algoritmo AEEB: Cálculo dos Bloqueios Ponto a Ponto

É o algoritmo que permite calcular a matriz de bloqueios ponto a ponto $\overline{EEB}$ quando está calculada a matriz de bloqueios marginais $\overline{BM}$; está descrito na secção 5 deste relatório.

Este algoritmo é especificado em termos das funções de Wan Chan e permite calcular o bloqueio ponto a ponto relativo a um certo fluxo $f \in \mathcal{F}$ partindo do vector de bloqueios marginais para o fluxo f, $\overline{BF}(f)$. Este algoritmo permite implementar computacionalmente as funções Φ_f, tal que :

$$EEB(f) = \Phi_f\left(\overline{BF}(f)\right),\ \forall f \in \mathcal{F}$$

Para calcular $\overline{EEB}$ temos que calcular $EEB(f)$ para todos os fluxos, o que corresponde a definir uma função Φ:

$$\overline{EEB} = \Phi(\overline{BM})$$

Com os dois primeiros algoritmos conseguimos calcular a matriz de bloqueios marginais $\overline{BM}$. Depois desse cálculo ter sido efectuado podemos então aplicar o algoritmo AEEB para determinar a matriz de bloqueios ponto a ponto.

4 Equações de Carga

A partir dos algoritmos AMC e AMT temos uma matriz de bloqueios marginais definida implicitamente.

$$\overline{BM} = \Upsilon\left(\Theta_{l1}\,(\overline{BM})\ ,\Theta_{l2}\,(\overline{BM})\ ,\Theta_{l3}\,(\overline{BM})\ ,\ldots,\ \Theta_{l|\mathcal{L}|}\,(\overline{BM}) \right)$$

Definamos a função ψ_M

$$\overline{BM} = \psi_M\,(\overline{BM})$$

Se escrevermos a equação anterior em termos dos componentes do vector $\overline{BE}$ temos:

$$\begin{cases} B_m(e_1) = & \psi_1\ (\ B_m(e_1), B_m(e_2), B_m(e_3), \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})\ ) \\ B_m(e_2) = & \psi_2\ (\ B_m(e_1), B_m(e_2), B_m(e_3), \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})\ ) \\ B_m(e_3) = & \psi_3\ (\ B_m(e_1), B_m(e_2), B_m(e_3), \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})\ ) \\ \vdots & \vdots \\ B_m(e_{|\mathcal{E}|}) = & \psi_{|\mathcal{E}|}\ (\ B_m(e_1), B_m(e_2), B_m(e_3), \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})\ ) \end{cases}$$

designado por sistema de equações de carga - SEC [5]. Defina-se a equação anterior em termos de uma função Ψ_V, associada a ψ_V, de modo que:

$$\Psi_V\ (\ \overline{BE}\ ) = \psi_V\ (\ \overline{BE}\ ) - \overline{BE} = \vec{0} \tag{3}$$

A raiz desta equação é o zero da função Ψ_V, o ponto fixo de ψ_V, e a matriz solução das probabilidades de bloqueio marginais.

Conclui-se que, partindo dos algoritmos AMC e AMT, somos conduzidos a um sistema de equações não lineares (tanto o modelo de carga como o modelo de transbordo são não lineares), sistema esse que tem como solução as probabilidades de bloqueio marginais.

4.1 A solução numérica de sistemas de equações de carga

Temos de encontrar a solução númerica do sistema de equações de carga, que é um sistema de equações implícitas, não lineares, de grande número de equações e variáveis.

Então, para determinar a raiz $\overline{BE}^* = [B^*_m(e_1), B^*_m(e_2), \ldots, B^*_m(e_3)]^T$ da equação (3), podiamos usar o método de iteração de ponto fixo.

$$\overline{BE}^{(p+1)} = \vec{\psi}(\overline{BE}^{(p)})\quad p = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Onde a aproximação inicial $\overline{BE}^{(0)}$ é uma estimativa inicial da solução da equação (3). O processo iterativo (4) pode também ser escrito do seguinte modo:

$$\begin{cases} B_m(e_1)^{(p+1)} = & \psi_1(\ B_m(e_1)^{(p)}, B_m(e_2)^{(p)}, B_m(e_3)^{(p)}, B_m(e_4)^{(p)}, \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})^{(p)}) \\ B_m(e_2)^{(p+1)} = & \psi_2(\ B_m(e_1)^{(p)}, B_m(e_2)^{(p)}, B_m(e_3)^{(p)}, B_m(e_4)^{(p)}, \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})^{(p)}) \\ B_m(e_3)^{(p+1)} = & \psi_3(\ B_m(e_1)^{(p)}, B_m(e_2)^{(p)}, B_m(e_3)^{(p)}, B_m(e_4)^{(p)}, \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})^{(p)}) \\ B_m(e_4)^{(p+1)} = & \psi_4(\ B_m(e_1)^{(p)}, B_m(e_2)^{(p)}, B_m(e_3)^{(p)}, B_m(e_4)^{(p)}, \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})^{(p)}) \\ \vdots & \vdots \\ B_m(e_i)^{(p+1)} = & \psi_i(\ B_m(e_1)^{(p)}, \ldots, B_m(e_{i-1})^{(p)}, B_m(e_i)^{(p)}, \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})^{(p)}) \\ \vdots & \vdots \\ B_m(e_{|\mathcal{E}|})^{(p+1)} = & \psi_n(\ B_m(e_1)^{(p)}, B_m(e_2)^{(p)}, B_m(e_3)^{(p)}, B_m(e_4)^{(p)}, \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})^{(p)}) \end{cases}$$

Quando iteramos $\psi_i, i = 2(1)n$ podemos notar que já foram calculadas aproximações das variáveis $B_m(e_j), j = 1(1)i-1$ correspondentes à iteração corrente $(p+1)$, ou seja, já dispomos das quantidades $B_m(e_j)^{(p+1)}, j = 1(1)i-1$ e continuamos a usar as quantidades $B_m(e_j)^{(p)}$ nos cálculos, isto é, as quantidades da iteração anterior. Podiamos então usar o procedimento seguinte:

$$\begin{cases} B_m(e_1)^{(p+1)} = & \psi_1(\ B_m(e_1)^{(p)}, B_m(e_2)^{(p)}, B_m(e_3)^{(p)}, B_m(e_4)^{(p)}, \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})^{(p)}) \\ B_m(e_2)^{(p+1)} = & \psi_2(\ B_m(e_1)^{(p+1)}, B_m(e_2)^{(p)}, B_m(e_3)^{(p)}, \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})^{(p)}) \\ B_m(e_3)^{(p+1)} = & \psi_3(\ B_m(e_1)^{(p+1)}, B_m(e_2)^{(p+1)}, B_m(e_3)^{(p)}, \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})^{(p)}) \\ B_m(e_4)^{(p+1)} = & \psi_4(\ B_m(e_1)^{(p+1)}, \ldots, B_m(e_3)^{(p+1)}, B_m(e_4)^{(p)}, \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})^{(p)}) \\ \vdots & \vdots \\ B_m(e_i)^{(p+1)} = & \psi_i(\ B_m(e_1)^{(p+1)}, \ldots, B_m(e_{i-1})^{(p+1)}, B_m(e_i)^{(p)}, \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})^{(p)}) \\ \vdots & \vdots \\ B_m(e_{|\mathcal{E}|})^{(p+1)} = & \psi_n(\ B_m(e_1)^{(p+1)}, B_m(e_2)^{(p+1)}, B_m(e_3)^{(p+1)}, \ldots, B_m(e_{|\mathcal{E}|})^{(p)}) \end{cases}$$

Para o cálculo de $B_m(e_i)^{(p+1)}$ são assim usadas as aproximações, de cada componente do vector solução, mais recentemente calculadas. Esta é a iteradora de Gauss-Seidel, que foi a adoptada no presente modelo por se ter revelado computacionalmente mais eficiente para o tipo de redes da rede-estudo.

Para resolver numericamente o SEC, qualquer que seja o método iterativo, é necessário uma estimativa inicial da solução.

Optou-se como estimativa inicial que se baseia na aplicação do modelo de Erlang-B, para o qual foi necessário estimar a média global de tráfego oferecido a cada ramo da rede. Isso conseguiu-se através de uma simplificação do modelo que representa o sistema cf [5].

Algoritmo 4.1 (Aproximação Inicial)

Entrada: *Parâmetros definidores de uma rede* $\mathcal{R} = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{C}, \mathcal{R}_a)$ *e uma matriz de tráfego exógeno* $\overline{AT}$.

Saída: *A aproximação inicial para a matriz de bloqueios marginais* $\overline{BM}^{(0)}$.

Processamento:

1. $\forall l \in \mathcal{L}$ *identifica uma equação* $e_1 = (f_1, l) \in \mathcal{E}$
   (a) $B_m(f_1, l) \leftarrow E_B(C(l), A(f_1))$
   (b) $\forall e = (f, l) \in \mathcal{E} : B_m(f, l) \leftarrow B_m(f_1, l)$

4.2 Iteradora de Gauss-Seidel

Para cada ramo da rede obtem-se a matriz $\overline{AL}(l)^k$ a partir da matriz $\overline{BM}^k$, (usando um modelo de carga) e calcula-se $\overline{BL}(l)^{(k+1)}$ (por um modelo de transbordo) a partir de $\overline{AL}(l)^k$.

Isto corresponde a calcular a carga num ramo da rede e seguidamente calcular os bloqueios marginais. A carga nos sucessivos ramos da rede é calculada por um modelo de carga, usando as aproximações mais recentemente calculadas para o valor das probabilidades de bloqueio marginais, pois este é sucessivamente actualizado, daí também a designação de processo iterativo de deslocamentos sucessivos.

Algoritmo 4.2 (Iteradora de Relaxação)

Entrada: *Parâmetros definidores de uma rede* $\mathcal{R} = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{E}, \mathcal{C}, \mathcal{R}_a)$ *e uma matriz de tráfego exógeno* $\overline{AT}$.

Saída: *Uma aproximação para a matriz de probabilidades de bloqueio ponto a ponto* $\overline{EEB}$.

Processamento:

1. *Obter a aproximação inicial* $\overline{BM}^{(0)}$ *(algoritmo 4.1)*
2. *Repetir com* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *até satisfazer critério de paragem:*
   - *Repetir para* $l = 1(1)|\mathcal{L}|$*:*
     - *Obter pelo AMC a aproximação* $\overline{AL}(l)^{(k)}$ *a partir de* $\overline{BM}^{(k)}$*;*
     - *Obter pelo AMT a aproximação* $\overline{BL}(l)^{(k+1)}$*, a partir de* $\overline{AL}(l)^{(k)}$*;*
3. *Repetir para* $f = 1(1)|\mathcal{F}|$*:*
   - *Calcular* $EEB(f)$ *pelo algoritmo de Wan Chan.*
4. *Termina.*

Com este processo iterativo vão-se fazendo sucessivas actualizações das colunas da matriz $\overline{BM}$. O modelo de carga calcula o tráfego oferecido a cada ramo fluxo a fluxo, ou seja, a partir de valores das probabilidades de bloqueio marginais que se encontram numa mesma linha da matriz $\overline{BM}$. O modelo de carga lê linhas da matriz $\overline{BM}$ com os seus valores sucessivamente actualizados.

Utilizaremos a norma seguinte

$$\|\vec{X}\| = \sqrt{\sum_i x_i^2} \qquad \forall\, \vec{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

necessária no teste da condição de paragem, do processo iterativo.

Considerando a definição de condição de contracção [5], podemos escrever:

$$\|\vec{\psi}(\overline{BE}_1) - \vec{\psi}(\overline{BE}_2)\| \leq L\ \|\overline{BE}_1 - \overline{BE}_2\|$$

para $0 \leq L < 1$, em que L é a constante de Lipschitz.

O que nos permite escrever o seguinte:

$$\|\vec{\psi}(\overline{BE}^{(p)}) - \vec{\psi}(\overline{BE}^{(p-1)})\| \leq L\ \|\overline{BE}^{(p)} - \overline{BE}^{(p-1)}\|$$

e então:

$$\|\overline{BE}^{(p+1)} - \overline{BE}^{(p)}\| \leq L\ \|\overline{BE}^{(p)} - \overline{BE}^{(p-1)}\|$$

$$\|\overline{BE}^{(p+2)} - \overline{BE}^{(p+1)}\| \leq L^2 \|\overline{BE}^{(p)} - \overline{BE}^{(p-1)}\|$$
$$\|\overline{BE}^{(p+3)} - \overline{BE}^{(p+2)}\| \leq L^3 \|\overline{BE}^{(p)} - \overline{BE}^{(p-1)}\|$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Resultado que será utilizado seguidamente. Notando a validade da seguinte igualdade

$$\|\overline{BE}^{(p+k)} - \overline{BE}^{(p)}\| = \|(\overline{BE}^{(p+1)} - \overline{BE}^{(p)}) + (\overline{BE}^{(p+2)} - \overline{BE}^{(p+1)}) + \cdots$$
$$\cdots + (\overline{BE}^{(p+k)} - \overline{BE}^{(p+k-1)})\|$$

e aplicando a desigualdade triangular, temos que:

$$\|\overline{BE}^{(p+k)} - \overline{BE}^{(p)}\| \leq \| (\overline{BE}^{(p+1)} - \overline{BE}^{(p)}) \| + \| (\overline{BE}^{(p+2)} - \overline{BE}^{(p+1)}) \| + \cdots$$
$$\cdots + \| (\overline{BE}^{(p+k)} - \overline{BE}^{(p+k-1)}) \|$$

e então:

$$\|\overline{BE}^{(p+k)} - \overline{BE}^{(p)}\| \leq L\| \overline{BE}^{(p)} - \overline{BE}^{(p-1)} \| + L^2\| \overline{BE}^{(p)} - \overline{BE}^{(p-1)} \| +$$
$$+ \ldots + L^k\| \overline{BE}^{(p)} - \overline{BE}^{(p-1)} \| \leq \frac{L}{1-L}\| \overline{BE}^{(p)} - \overline{BE}^{(p-1)} \|$$

quando $k \to \infty$, obtemos:

$$\| \overline{BE}^{*} - \overline{BE}^{(p)} \| \leq \frac{L}{1-L}\| \overline{BE}^{(p)} - \overline{BE}^{(p-1)} \| \tag{5}$$

se $0 \leq L \leq \frac{1}{2}$ e se $\| \overline{BE}^{(p)} - \overline{BE}^{(p-1)} \| \leq \epsilon$ (a norma da diferença entre duas iterações sucessivas é inferior a uma certa quantidade ϵ) então a partir da desigualdade (5), obtemos:

$$\| \overline{BE}^{*} - \overline{BE}^{(p)} \| \leq \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$$

que pode ser utilizado como condição de paragem para o processo de iteração de ponto fixo. Então, em todas as iterações calculamos a norma $\| \vec{X}^{(p)} - \vec{X}^{(p-1)} \|$, até que esta seja menor que uma certa precisão absoluta pré-fixada ϵ.

Ou então, o cálculo da sucessão vectorial $\overline{BE}^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ termina na iteração k que verifique a condição:

$$\frac{\| \overline{BE}^{(k)} - \overline{BE}^{(k-1)} \|}{\| \overline{BE}^{(k)} \|} \leq \rho$$

Este critério garante um erro relativo para a aproximação calculada inferior a ρ.

Em ambos os critérios de paragem (precisão relativa ou absoluta) a constante de Lipschitz L deve ser inferior a $1/2$, pois caso contrário a condição de paragem pode verificar-se numa iteração em que o erro é muito superior ao aceitável.

Em [6] mostra-se que para redes com um grau de encaminhamento alternativo e de transbordo mútuo muito elevado se poderia utilizar com vantagens potenciais uma tecnica de aceleração de convergência pelo algoritmo epsilon de *Wynn*, cf se discute em [5]

5 Cálculo do Bloqueio Ponto a Ponto em Função do Bloqueio Marginal

Iremos aqui descrever a teoria e o algoritmo de Wan Chan [1], utilizados para o cálculo do bloqueio ponto a ponto $EEB(f)$ em função dos bloqueios marginais, supostos conhecidos. Seguiremos aqui a abordagem descritiva sitematizada feita em [5].

O cálculo dos bloqueios ponto a ponto na rede, faz-se separando a análise por fluxos, ou seja, calculando $EEB(f)$ a partir do vector de bloqueios marginais $\overline{BF}(f)$, para cada fluxo $f \in \mathcal{F}$.

Fixamos então f como um desses fluxos, tendo-se:

$$\overline{BF}(f) = \left[B_m(f, l_1), B_m(f, l_2), \ldots, B_m(f, l_{|\mathcal{L}|})\right]^T$$

representando $B_m(f, l_i)$, $i = 1(1)|\mathcal{L}|$ a probabilidade de um ramo l_i estar bloqueado, quando uma chamada do fluxo f é oferecida à rede, desde que $(f, l_i) \in \varepsilon$.

Com esse sentido escrevemos:

$$B_m(f, l_i) = Pr\{l_i \text{ ocupado para } f\}, \qquad \forall (f, l_i) \in \varepsilon$$

Seguidamente, apresenta-se o algoritmo de Wan Chan [1] para redes com plano de encaminhamento do tipo arbitrário, mostrando-se a simplificação deste algoritmo para o caso de redes com plano de encaminhamento do tipo único caminho de perdas.

Os algoritmos de Wan Chan são baseados em operações sobre conjuntos de ramos, que geralmente não representam caminhos. As definições que se seguem estão relacionadas com conjuntos de ramos e não caminhos.

Um ramo está livre se e só se tem pelo menos um circuito livre. Um conjunto U de ramos está livre se e só se todos os ramos do conjunto U estão livres no instante em que é oferecida uma chamada do fluxo em questão. Quando U não está livre diz-se que está ocupado.

Sendo $U_1, \ldots, U_m$ uma sequência ordenada de conjuntos de ramos. U_i está em uso se e só se todos os conjuntos que precedem U_i na sequência, nomeadamente, $U_1, \ldots, U_{i-1}$ estão ocupados e U_i está livre.

Definindo o conjunto $U_{j(i)}$ como sendo:

$$U_{j(i)} = U_j - U_i, \qquad U_i, U_j \subset \mathcal{L}$$

isto é:

$$U_{j(i)} = \{l \in \mathcal{L} : l \in U_j \land l \notin U_i\}$$

O conjunto $U_{j(i)}$ (resultado de uma das operações nos algoritmos) não representa em geral um caminho, mesmo sendo U_i e U_j caminhos para um mesmo fluxo $f \in \mathcal{F}$ na rede $\mathcal{R}$, pois os caminhos podem não ser disjuntos.

Generalizando o conceito de plano de encaminhamento para um fluxo, temos então:

$$\mathcal{P}'(f) = [U_1, U_2, \ldots, U_i], \qquad f = (o, d)$$

onde U_j, $j = 1(1)i$ são caminhos em $\mathcal{R}$, com origem no nodo $o \in \mathcal{V}$, mas não necessariamente com destino no nodo $d \in \mathcal{V}$. Aos caminhos de $\mathcal{P}'(f)$ que terminam em d, chamaremos caminhos completos (para o fluxo f).

Os acontecimentos $\{U_i \text{ em uso }\}$ e $\{U_j \text{ em uso }\}$ são mutuamente exclusivos, para $i \neq j$, pois há quando muito um conjunto de ramos na sequência em uso.

Lema 5.1 *Seja* $S = [U_1, U_2, \ldots, U_i] : U_j \subset \mathcal{L}, \quad j = 1(1)i$ *então:*

$$Pr\left\{\exists^1 U_j \in S : U_j \text{ em uso}\right\} = \sum_{k=1}^{i} Pr\{U_k \text{ em uso }\}$$

Como os acontecimentos $Pr\{\exists^1 U_j \in S \text{ em uso}\}$ e $Pr\{\exists U_j \in S \text{ em uso}\}$ são equivalentes vem:

Lema 5.2 *Seja* $S = [U_1, U_2, \ldots, U_i] : U_j \subset \mathcal{L}, \quad j = 1(1)i$ *então:*

$$Pr\{\exists U_j \in S : U_j \text{ em uso}\} = Pr\left\{\exists^1 U_j \in S : U_j \text{ em uso}\right\}$$

A probabilidade de um conjunto estar livre é o produto das probabilidades de cada ramo desse conjunto estar livre, conclusão obtida a partir da hipótese **2.2.1** ii).

Lema 5.3 $Pr\{U_i \text{ livre}\} = \prod_{l \in U_i} [1 - B_m(f, l)]$

Pela aplicação do teorema de Bayes e também pela hipótese **2.2.1** resulta:

Lema 5.4

$$\begin{aligned} &Pr\{U_1, U_2, \ldots, U_{i-1} \text{ ocupados} \mid U_i \text{ livre }\} \\ &= Pr\left\{U_{1(i)}, U_{2(i)}, \ldots, U_{i-1(i)} \text{ ocupados}\right\} \end{aligned}$$

Sendo $U_1, \ldots, U_m$ a sequência de caminhos de um dado fluxo (o, d), uma chamada será bloqueada se e só se usar um dos caminhos de perda, ou equivalentemente, não usar qualquer um dos caminhos completos. Noutras palavras

$$EEB(o, d) = 1 - Pr\{\text{Um dos caminhos completos em uso}\}$$

Pelo lema 5.1, temos:

$$EEB(o, d) = 1 - \sum Pr\{U_i \text{ ser usado}\} \tag{6}$$

onde a soma se estende a todos os caminhos completos U_i. Facilmente se vê que se o plano de encaminhamento for constituído apenas pelo caminho vazio então $EEB(o, d) = 1$ pois como não existe nenhum caminho completo o somatório é nulo.

Note que $\prod_{l \in \{\}} [1 - B_m(f, l)] = 1$ (por convenção), pois um caminho que não tem ramos para causarem bloqueio, está sempre livre, quer com isto dizer-se que quando o caminho seleccionado para uso for o caminho vazio então esse caminho passa a estar em *uso* para esse fluxo, contudo essa chamada sofreu bloqueio no sentido em que não se conseguiu a ligação entre o nodo origem e o nodo destino, uma vez que, caminho vazio é um caminho livre mas não completo.

5.1 Plano de Encaminhamento do Tipo Arbitrário

Pretende-se calcular EEB para um dado fluxo f no qual a sequência de caminhos é arbitrária, isto é, não restringida de qualquer modo. Precisamos para isso calcular $Pr\{U_i \text{ em uso}\}$.

Se $i = 1$

Como U_i é o primeiro caminho da sequência

$$Pr\{U_1 \text{ em uso}\} = Pr\{U_1 \text{ livre}\}$$

pela aplicação do lema 5.3:

$$Pr\{U_1 \text{ em uso}\} = \prod_{l \in U_1} [1 - B_m(f, l)] \tag{7}$$

Se $i > 1$

Por definição de caminho em uso:

$$\begin{aligned} Pr\{U_i \text{ em uso}\} &= Pr\{U_1, \ldots, U_{i-1} \text{ ocupados}, U_i \text{ livre}\} \\ &= Pr\{U_i \text{ livre}\} \times Pr\{U_1, \ldots, U_{i-1} \text{ ocupados} \,|U_i \text{ livre}\} \end{aligned}$$

pela aplicação dos lemas 5.3 e 5.4, vem:

$$Pr\{U_i \text{ em uso}\} = \left(\prod_{l \in U_i} [1 - B_m(f, l)] \right) \times Pr\left\{U_{1(i)}, \ldots, U_{i-1(i)} \text{ ocupados}\right\}$$

Considerando $S = \{U_{1(i)}, U_{2(i)}, \ldots, U_{i-1(i)}\}$, temos:

$$Pr\{U_i \text{ em uso}\} = \left(\prod_{l \in U_i} [1 - B_m(f, l)] \right) \times (1 - Pr\{\exists U_j \in S : U_j \text{ em uso}\})$$

Aplicando também o lema 5.2, temos que:

$$Pr\{U_i \text{ em uso}\} = \left(\prod_{l \in U_i} [1 - B_m(f, l)] \right) \times \left(1 - Pr\left\{\exists^1 U_j \in S : U_j \text{ em uso}\right\}\right)$$

E por último, aplicando o lema 5.1, vem:

$$Pr\{U_i \text{ em uso}\} = \left(\prod_{l \in U_i} [1 - B_m(f, l)] \right) \times \left(1 - \sum_{k=1}^{i-1} Pr\left\{U_{k(i)} \text{ em uso}\right\}\right) \tag{8}$$

Temos então a fórmula recursiva para calcular a probabilidade de um conjunto de ramos em uso.

Definição 5.1 (Função Q de Wan Chan) $Q(U_1,\ldots,U_i) \doteq Pr\{U_i \text{ em uso}\}$

Combinando as equações (6), (7) e (8) temos o seguinte teorema:

Teorema 5.1 *Sendo $P'(f) = [U_1, U_2, \ldots, U_k]$ o plano de encaminhamento para um fluxo na rede $\mathcal{R} = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \mathcal{F}, \mathcal{P}', \mathcal{E}, \mathcal{C}, \mathcal{R}_a)$, então:*

$$EEB(f) = 1 - \sum_i Q(U_1, U_2, \ldots, U_i)$$

onde o somatório se estende a todo o i tal que U_i seja um caminho completo para o fluxo f. Para o cálculo das funções Q de Wan Chan usa-se a seguinte relação recursiva:

$$Q(U_1,\ldots,U_i) = \begin{cases} \prod_{l\in U_1}[1 - B_m(f,l)] & \text{se } i = 1 \\ \left(\prod_{l\in U_i}[1 - B_m(f,l)]\right) \times \left[1 - \sum_{k=1}^{i-1} Q(U_{1(i)},\ldots,U_{k(i)})\right] & \text{se } i > 1 \end{cases} \tag{9}$$

Avaliemos a quantidade de computação envolvida no cálculo de $Q(U_1,\ldots,U_i)$ usando (9), e seja n_i=número de chamadas recursivas feitas no cálculo de $Q(U_1,\ldots,U_i)$ no pior caso.

Para $i = 1$ é claro de (9) que $n_1 = 0$.

Para $i > 1$, para calcular $Q(U_1,\ldots,U_i)$ são feitas $i-1$ chamadas recursivas, nomeadamente uma para cada $Q(U_{1(i)}), Q(U_{1(i)}, U_{2(i)}), \ldots, Q(U_{1(i)},\ldots,U_{i-1(i)})$ (ou seja, para todas as parcelas da soma) e cada um delas por sua vez faz $n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}$ chamadas recursivas no pior dos casos. Por isso

$$n_i = (i-1) + \sum_{k=1}^{i-1} n_k \quad \text{para } i > 1.$$

Resolvendo esta equação diferença com $n_1 = 0$ temos $n_i = 2^{i-1} - 1$.

Então no pior caso, o número de chamadas recursivas feitas no cálculo de $Q(U_1,\ldots,U_i)$ é uma função exponencial de i, mas para $i \leq 11$, $(2^{i-1} - 1) < i^3$, ou seja, o cálculo necessário para os valores de i encontrados na prática, não é tão grande quanto pode parecer à primeira vista.

O cálculo necessário pode ainda ser reduzido através da análise seguinte.

Relembrando a definição 5.1 temos :

$$Q(U_1,\ldots,U_i) = Pr\{U_i \text{ em uso}\} = Pr\{U_1,\ldots,U_{i-1} \text{ ocupados, } U_i \text{ livre}\}$$

Daqui facilmente se verifica que a ordem por que estão indicados os conjuntos U_k, $k = 1(1)i-1$ é irrelevante.

Lema 5.5 *$Q(U_1, U_2, \ldots, U_i)$ é irrelevante perante qualquer permutação dos conjuntos U_k, $k = 1(1)i-1$, desde que U_i mantenha a última posição da sequência.*

Supondo que para algum $j < i$, $U_j \subset U_i$. Então U_j ocupado implica que pelo menos um dos seus ramos, o qual deve também ser um ramo de U_i, não esteja livre e então U_i está ocupado. Novamente usando a definição 5.1 temos o seguinte:

Lema 5.6 *Se para algum $j < i$, $U_j \subset U_i$ então $Q(U_1, \ldots, U_i) = 0$.*

Supondo que para algum $j, h < i$, $U_j \subset U_h$. Então U_j ocupado implica que U_h não esteja livre. Como $U_j \subset U_h \Rightarrow U_{j(i)} \subset U_{h(i)}$, então pelo lema 5.6 :

$$Q(U_{1(i)}, U_{2(i)}, \ldots, U_{j(i)}, U_{h(i)}) = 0$$

Sem perda da generalidade, considerando $h = i - 1$ e $j = i - 2$ e de (9) vem

$$Q(U_1, U_2, \ldots, U_j, U_h, U_i) = \left(\prod_{l \in U_i} [1 - B_m(f, l)] \right) \times$$

$$[1 - \underbrace{Q(U_{1(i)}, \ldots, U_{j(i)}, U_{h(i)})}_{=0} - \sum_{k=1}^{i-2} Q(U_{1(i)}, \ldots, U_{k(i)})]$$

Daqui concluímos que podemos eliminar o conjunto U_h da lista de argumentos de $Q(U_1, \ldots, U_i)$. Segue-se então o lema 5.7.

Lema 5.7 *Se para algum $j, h < i$, $U_j \subset U_h$ então*

$$Q(U_1, \ldots, U_i) = Q(U_1, \ldots, U_{h-1}, U_{h+1}, \ldots, U_i).$$

Supondo que $U_1, \ldots, U_i$ são disjuntos dois a dois, isto é, $U_j \bigcap U_h = \emptyset$ para todo o $j \neq h$ então

$$Pr\,\{U_1, \ldots, U_{i-1} \text{ ocupados}, U_i \text{ livre}\} = Pr\,\{U_i \text{ livre}\} \times \prod_{k=1}^{i-1} Pr\,\{U_k \text{ ocupado}\}$$

Isto junto com a definição 5.1 e o lema 5.3 conduz ao seguinte:

Lema 5.8 *Se $U_1, \ldots, U_i$ são disjuntos dois a dois então :*

$$Q(U_1, \ldots, U_i) = \left(\prod_{l \in U_i} [1 - B_m(f, l)] \right) \times \prod_{k=1}^{i-1} \left(1 - \prod_{l \in U_k} [1 - B_m(f, l)] \right)$$

É fácil de ver que as economias no número de chamadas recursivas com a aplicação dos lemas 5.6, 5.7 e 5.8 são n_i, $n_i - n_{i-1}$ e n_i, respectivamente. Vamos considerar agora para cada lema uma comparação entre a economia oferecida versus computação adicional requerida.

Para usar o lema 5.6 temos que testar se há um $j < i$ tal que $U_j \subset U_i$, ou equivalentemente, $U_{j(i)} = \{\}$. Como $U_{1(i)}, \ldots, U_{i-1(i)}$ têm que ser calculados na aplicação da fórmula recursiva (9), a introdução do lema 5.6 não necessita computação adicional. Então o lema 5.6 é implementado no algoritmo para calcular $Q(U_1, \ldots, U_i)$.

Considerando o lema 5.5 é possível tornar o lema 5.6 aplicável um maior número de vezes no cálculo de $Q(U_{1(i)}), Q(U_{1(i)}, U_{2(i)}), \ldots, Q(U_{1(i)}, \ldots, U_{i-1(i)})$. Para fazer com que essa situação (aplicação do lema 5.6) ocorra mais frequentemente, rearranjamos $U_1, \ldots, U_{i-1}$ em

$U_{i'}, \ldots, U_{(i-1)'}$ operação que ordena os conjuntos $U_{1'(i)}, \ldots, U_{(i-1)'(i)}$ por ordem não decrescente do seu cardinal, isto é $|U_{1'(i)}| \leq |U_{2'(i)} \leq \cdots \leq |U_{(i-1)'(i)}|$.

Para usar a lema 5.7 temos que testar se existe $j, h < i$ tal que $U_j \subset U_h$, ou equivalentemente, $U_{j(h)} = \{\}$. Como $U_{j(h)}$ não é necessário no algoritmo para calcular $Q(U_1, \ldots, U_i)$, para usar essa simplificação era então necessário computação adicional. Além disso, o uso do lema 5.6 e o rearranjo dos argumentos conseguirá parte ou toda a economia oferecida pelo lema 5.7. Então o lema 5.7 não foi implementado no algoritmo para o cálculo de $Q(U_1, \ldots, U_i)$.

Para usar o lema 5.8, temos que testar se para todos $1 \leq j < k \leq i$, $U_j \bigcap U_k = \{\}$. Dado $U_j \bigcap U_k$ não ser usado no algoritmo para calcular $Q(U_1, \ldots, U_i)$, o uso do lema 5.8 requer uma quantidade substancial de computação. Além disso, o lema 5.8 não resultará em qualquer economia se para qualquer par de j, k, $U_j \bigcap U_k \neq \{\}$. De facto o lema 5.8 é satisfeito sobretudo quando o número de ramos envolvido é pequeno e por isso a economia resultante é também pequena. Portanto o lema não foi implementado no algoritmo.

5.2 O Algoritmo Q de Wan Chan

Entradas: O plano de encaminhamento $\mathcal{P}'(f) = [U_1, U_2, \ldots, U_m]$ e o vector $\overline{BF}(f)$.
Saída: A probabilidade de bloqueio ponto a ponto para o fluxo f:

$$EEB(f) = 1 - \sum_i Q(U_1, U_2, \ldots, U_i)$$

onde o somatório se estende a todo o i tal que U_i seja um caminho completo para esse fluxo e as funções Q de Wan Chan são calculada como segue:

Função $Q(U_1, U_2, \ldots, U_i)$:

▷ Se $i = 1$ então $Q \leftarrow \prod_{l \in U_1}[1 - B_m(f, l)]$ e termina.

▷ Se $i > 1$ então

- Para $k = 1(1)i - 1$ fazer $V_k \leftarrow U_k - U_i$;
- Se $\prod_{k=1}^{i-1} |V_k| = 0$ então $Q \leftarrow 0$ e termina.
- Se $\prod_{k=1}^{i-1} |V_k| \neq 0$ continua:
  * Reordenar as sequências $V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}$ por ordem não decrescente do cardinal dos seus elementos;
  * Calcular por recursão:

$$Q \leftarrow \left(\prod_{l \in U_i}[1 - B_m(f, l)]\right) \times \left(1 - \sum_{k-1}^{i-1} Q(V_1, V_2, \ldots, V_k)\right)$$

e termina.

Esta variante do algoritmo de Wan Chan, numa rede com cranckback, só é utilizada no contexto do cálculo do tráfego e variâncias marginais, para efeito da determinação de probabilidades de usar um caminho arbitrário.

5.3 Plano de Encaminhamento do tipo Único Caminho de Perdas

Iremos aqui utilizar a descrição feita em [10] de acordo com [1]. Pretendendo-se calcular o bloqueio ponto a ponto para um fluxo no qual o plano de encaminhamento contém só um caminho de perdas o qual é sempre o último caminho da sequência. Esta é a situação que corre numa rede com cranckback no estado totalmente operacional. Notar que na rede com cranckback, caso ocorram avarias, os caminhos cortados (por falha de nó ou de arco) correspondentes são eliminados do plano de encaminhamento, pois na prática funcionam com transbordo total, pelo que se utiliza a função E de Wan Chan, a seguir definida. Tomando partido da falta de caminhos de perda misturados com os outros caminhos no plano de encaminhamento podemos simplificar a fórmula recursiva anterior conseguindo-se minimizar a computação envolvida.

Tomemos $U_1, \ldots, U_m$ como sendo a sequência de encaminhamentos de (o, d) onde U_m é o único caminho de perdas. De (6) temos:

$$EEB(o,d) = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 1 \\ 1 - \sum_{i=1}^{m-1} Pr\{U_i \text{ em uso}\} & \text{se } m > 1 \end{cases} \tag{10}$$

Definição 5.2 (Função E de Wan Chan)

$$E(U_1, \ldots, U_j) \doteq 1 - \sum_{i=1}^{j} Pr\{U_i \text{ em uso}\}$$

Pela aplicação da definição (5.1), temos:

$$E(U_1, \ldots, U_j) = 1 - \sum_{i=1}^{j} Q(U_1, \ldots, U_i) \tag{11}$$

Para $j = 1$

$$E(U_1) = 1 - Q(U_1)$$

Aplicando a fórmula recursiva (9), vem:

$$E(U_1) = 1 - \prod_{l \in U_1} [1 - B_m(f, l)] \tag{12}$$

Para $j > 1$

$$E(U_1, \ldots, U_j) = 1 - \sum_{i=1}^{j} Q(U_1, \ldots, U_i) = 1 - Q(U_1) - \sum_{i=2}^{j} Q(U_1, \ldots, U_i)$$

Também pela fórmula recursiva (9), temos:

$$E(U_1, U_2, \ldots, U_j) = 1 - \prod_{l \in U_1} [1 - B_m(f, l)] -$$
$$\sum_{i=2}^{j} \left(\prod_{l \in U_i} [1 - B_m(f, l)] \right) \times \left[1 - \sum_{k=1}^{i-1} Q(U_{1(i)}, \ldots, U_{k(i)}) \right]$$

Aplicando agora (11) chegamos à relação:

$$\begin{aligned} E(U_1, U_2, \dots, U_j) = \ & 1 - \prod_{l \in U_1} [1 - B_m(f,l)] - \\ & \sum_{i=2}^{j} \left(\prod_{l \in U_i} [1 - B_m(f,l)] \right) \times E(U_{1(i)}, \dots, U_{i-1(i)}) \end{aligned} \tag{13}$$

As equações (12) e (13) juntas formam a fórmula recursiva para calcular o bloqueio ponto-a-ponto $E(U_1, \dots, U_{m-1})$ de (o, d) para o caso de $m > 1$. Considerando também (6), fica demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 5.2 *Sendo $\mathcal{P}'(f) = [U_1, U_2, \dots, U_k]$ o plano de encaminhamento para um fluxo na rede $R = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \mathcal{F}, \mathcal{P}', \varepsilon, \mathcal{C})$, então:*

$$EEB(f) = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 1 \\ E(U_1, U_2, \dots, U_{m-1}) & \text{se } m > 1 \end{cases}$$

Para o cálculo da função E de Wan Chan usa-se a seguinte relação recursiva:

$$E(U_1, U_2, \dots, U_j) = \begin{cases} 1 \ - \ \prod_{l \in U_1} [1 - B_m(f,l)] & \text{se } j = 1 \\ 1 \ - \ \prod_{l \in U_1} [1 - B_m(f,l)] - \\ \quad \sum_{i=2}^{j} \left(\prod_{l \in U_i} [1 - B_m(f,l)] \right) \times \\ \quad E(U_{1(i)}, \dots, U_{i-1(i)}) & \text{se } j > 1 \end{cases} \tag{14}$$

Para avaliar a quantidade de cálculo necessário para obter $E(U_1, \dots, U_j)$ consideramos o número de chamadas recursivas n'_j feitas no pior dos casos. Seguindo as mesmas razões que para $Q(U_1, \dots, U_j)$ é fácil ver que n'_j é dado pela mesma equação diferença; também $n'_1 = 0$ e por isso $n'_j = n_j = 2^{j-1} - 1$. Então o número máximo de chamadas recursivas requeridas para calcular $EEB(o, d)$ com $(m-1)$ caminhos completos é $n'_{m-1} = 2^{m-2} - 1$.

Considerando $S = \{U_1, U_2, \dots, U_i\}$, e pelo lema 5.1 e definição 5.2 temos:

$$E(U_1, \dots, U_j) = 1 - Pr\left\{\exists^1 U_j \in S : U_j \text{ livre}\right\}$$

E pelo lema 5.2, vem:

$$E(U_1, \dots, U_j) = 1 - Pr\{\exists U_j \in S : U_j \text{ livre}\} = Pr\{U_1, \dots, U_j \text{ ocupados}\} \tag{15}$$

Noutras palavras, numa sequência do tipo único caminho de perdas uma chamada é bloqueada se e só se todos os seus caminhos completos estão ocupados. Dado que $U_i = \{\}$ está sempre livre, temos o seguinte:

Lema 5.9 *Se para algum $i \leq j$, $U_i = \{\}$ então $E(U_1, \dots, U_j) = 0$.*

Suponha-se que para algum $i, h \leq j$, $U_i \subset U_h$. Então U_i ocupado implica que U_h esteja ocupado. De (15) vemos que podemos retirar U_h da lista de argumentos de $E(U_1, \dots, U_j)$ sem alterar o seu valor.

Lema 5.10 *Se para algum $i, h \leq j$, $U_i \subset U_h$ então*

$$E(U_1, \ldots, U_j) = E(U_1, \ldots, U_{h-1}, U_{h+1}, \ldots, U_j)$$

Supondo que $U_1, \ldots, U_j$ são disjuntos dois a dois, então :

$$Pr\{U_1, \ldots, U_j \text{ ocupados}\} = \prod_{i=1}^{j} Pr\{U_i \text{ ocupado}\}$$

Juntamente com a equação (15) e o lema 5.1 conduz ao seguinte:

Lema 5.11 *Se $U_1, \ldots, U_j$ são disjuntos dois a dois então*

$$E(U_1, \ldots, U_i) = \left(\prod_{l \in U_i} [1 - B_m(f, l)]\right) * \prod_{k=1}^{i-1} \left(1 - \prod_{l \in U_k} [1 - B_m(f, l)]\right)$$

É de notar a semelhança entre os lemas 5.9, 5.10 e 5.11 e os lemas 5.6, 5.7 e 5.8, respectivamente. Seguindo o mesmo raciocínio, usado anteriormente para $Q(U_1, \ldots, U_i)$ analisando a economia conseguida versus computação adicional requerida, em [1] conclui-se que só o lema 5.9 deverá ser implementado no algoritmo de cálculo de $E(U_1, \ldots, U_j)$. Observou-se também que todos os argumentos de E podem ser rearranjados sem alterar o seu valor que em cada recursão, $U_{1(i)}, \ldots, U_{i-1(i)}$ deverão ser rearranjados pela ordem crescente do seu tamanho.

Temos então o seguinte algoritmo recursivo para calcular EEB de um dado fluxo com um plano de encaminhamento com um único caminho de perdas.

5.4 Algoritmo E de Wan Chan

Entradas: O plano de encaminhamento $\mathcal{P}'(f) = [U_1, U_2, \ldots, U_m]$ (onde U_m é o único caminho de perdas) e o vector $\overline{BF}(f)$.

Saída: A probabilidade de bloqueio ponto a ponto para o fluxo f:

$$EEB(f) = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 1 \\ E(U_1, \ldots, U_{m-1}) & \text{se } m > 1 \end{cases}$$

a função $E(U_1, U_2, \ldots, U_{m-1})$ de Wan Chan é calculada como segue.

Função $E(U_1, U_2, \ldots, U_j)$:

$\triangleright$ $E \leftarrow 1 - \prod_{l \in U_1} [1 - B_m(f, l)]$

$\triangleright$ Se $j > 1$ então Para $i = 2(1)j$ fazer:

- Para $k = 1(1)i - 1$ fazer $V_k \leftarrow U_k - U_i$
- Se $\prod_{k=1}^{i-1} |V_k| \neq 0$ então:
  * Reordenar a sequência $V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}$ por ordem não decrescente do cardinal dos seus elementos;
  * Calcular por recursão:

$$E \leftarrow E - \left(\prod_{l \in U_i} [1 - B_m(f, l)]\right) \times E(V_1, V_2, \ldots, V_{i-1})$$

e termina

Referências Bibliográficas

[1] W.S. Chan, "Recursive Algorithms for Computing End-To-End Blocking in a Network with Arbitrary Routing Plan", *IEEE Transactions on Communications*, Vol.28, N$^{\underline{o}}$ 2, pp.153-164, Fevereiro de 1980.

[2] J. Craveirinha, Ph.D. Thesis, University of Essex, U.K., 1984.

[3] J. Craveirinha, T. M. Gomes e J. S. Esteves, "Calculo das Variâncias Marginais em Redes de Teletráfego com Transbordos Múltiplos", INESC-Coimbra, Research Report ET-T1, Fevereiro de 1993.

[4] L.E.N. Delbrouk, "The uses of Kosten's Systems in the Provisioning of alternate trunk groups carrying heterogeneous traffic", *IEEE Transactions on Communications*, Vol.Com-31, pp.741–749, 1983.

[5] J.S. Esteves, *Metodologias de Análise e Cálculo Numérico em Redes de Teletráfego com Encaminhamento Alternativo*, Dissertação de Mestrado em Ciências de Computação, FCTUC, Coimbra, 1991.

[6] J. S. Esteves and J. Craveirinha, "An Efficient Algorithm for Computing Node Node Blocking Probabilities in Teletraffic Networks with Arbitrary Routing", *Proc. of the 6th International Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis*, Crete, Maio de 1993 publicado pela editora World Scientific.

[7] A. A. Fredericks,"Approximation Parcel Blocking Via State Dependent Birth Rates", *Proc. 10th Int. Teletraffic Congress*, Montreal, June 1982.

[8] T. Gomes e J. Craveirinha, "Algoritmo de Geração de Sequencial de Estados", INESC-Coimbra, Research Report ET-N1, Versão 2, Dezembro de 1993.

[9] A.A. Jagers e E. A. Doorn, "On the Continued Erlang Loss Function", *Operations Research Letters*, Vol.5, N$^{\underline{o}}$ 1, pp.43-46, Junho 1986.

[10] L. G. Jorge, "Algoritmos de Cálculo de Bloqueio Ponto a Ponto em Redes Metropolitanas de Comutação por Circuitos", Dissertação no âmbito da disciplina de Projecto e Dissertação da Licenciatura em Engenharia Informática, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, 1992.

[11] B. Sanders e E. A. Doorn, "Estimating Time congestion from Traffic Parameters", *IEEE, Transactions on Communications*, Vol COM-35, N$^{\underline{o}}$ 8, pp.856-862, Agosto 1989.

[12] B. Walström, "Congestion Studies in Telephone Systems with Overflow Facilities", *Ericksson Technics*, Vol.22, N$^{\underline{o}}$ 3, 1966.

[13] R. I. Wilkinson, "Theories for Toll Traffic Engeneering in the U.S.A.", *The Bell System Technical Journal*, Vol.35, pp.421–514, 1956.