Redução Funcional do Espaço de Estados numa Rede Sujeita a Avarias

por

Teresa Martínez Gomes

José Fernandes Craveirinha

INESC – Núcleo de Coimbra

Relatório de Investigação ET-N2 : Versão 2
Março de 1994

Redução Funcional do Espaço de Estados numa Rede Sujeita a Avarias

Teresa Martínez Gomes
e
José M. F. Craveirinha

3 de Março de 1994

Resumo

Iremos considerar o problema da redução funcional do espaço de estados de componentes, no contexto dum modelo de análise da fiabilidade–desempenho de uma rede de telecomunicações, representada em dois níveis: o estrato de transporte (correspondente à rede de componentes sujeitos a avarias) e o estrato funcional (correspondente à rede funcional). O cálculo das medidas de desempenho da rede será mais eficiente se não for efectuado para cada um dos estados seleccionados da rede de componentes, mas apenas para os estados relevantes da rede funcional, sem repetições.

1 Introdução

Iremos considerar o problema da redução funcional do espaço de estados de componentes, no contexto dum modelo de análise da fiabilidade–desempenho de uma rede de telecomunicações, representada em dois níveis: o estrato de transporte (correspondente à rede de componentes sujeitos a avarias) e o estrato funcional (correspondente à rede funcional).

O modelo em causa está baseado num algoritmo de geração e selecção de estados da rede de componentes a considerar num dado estudo deste tipo, descrito e discutido em [1].

O estrato de transporte é representado por uma rede de n componentes sujeitos a avarias. Cada estado da rede de componentes tem um estado correspondente no estrato funcional. Cada estado funcional apresentará um determinado desempenho para a rede de telecomunicações.

Se, no estrato da rede de transporte, existirem componentes que, quando avariam, conduzem do ponto de vista da rede funcional a estados idênticos, isso significa que a dimensão do espaço de estados funcional é menor que a dimensão do espaço de estados da rede de componentes.

Assim, o cálculo das medidas de desempenho da rede será mais eficiente se não for efectuado para cada um dos estados seleccionados da rede de componentes, mas apenas para os estados relevantes da rede funcional, sem repetições.

O trabalho que aqui se apresenta, pretende apresentar um método sistemático para obter, a partir dos estados da rede de componentes, os estados funcionais *distintos* que lhe correspondem.

2 Definições auxiliares

Os efeitos de cada componente, pertencente ao estrato da rede de transporte, reflectem-se sobre a configuração funcional de duas formas:

- através das unidades funcionais que possam ficar operacionais
- através dos feixes que ficam com capacidades reduzidas, de acordo com os caminhos da rede de transporte que são afectados.

Considere-se que os estados funcionais, causados pela falha isolada de componentes, se distinguem de acordo com as unidades funcionais que ficam inoperacionais (caso haja alguma) e de acordo com o conjunto de feixes/capacidades afectadas (caso haja algum).

Definição 2.1 (Estados funcionalmente idênticos) *Dois estados funcionais são idênticos se cortarem os mesmos fluxos de tráfego, e se apresentarem as mesmas reduções de capacidade nos mesmos feixes, para feixes que não são utilizados apenas por fluxos cortados.*

Esta definição faz depender a redução funcional não só dos componentes que avariam, mas também da configuração funcional da rede em termos de encaminhamento.

Definição 2.2 (Igualdade funcional de componentes) *Sejam $\{i\}$ e $\{j\}$ dois estados da rede de componentes. Se estes estados têm exactamente o mesmo mapeamento funcional, ou seja se o conjunto de unidades funcionais afectadas por um e outro são iguais, e se apresentam o mesmo conjunto de feixes/capacidade afectada, exactamente nos mesmos caminhos do estrato de transporte, então diz-se que o componente i é funcionalmente igual ao componente j.*

Com base nesta definição:

Facto 2.1

1. *Um componente i é sempre funcionalmente igual a si próprio.*
2. *Se o componente i é funcionalmente igual a j então o componente j é funcionalmente igual ao componente i.*
3. *Se o componente i é funcionalmente igual ao componente j e o componente j é funcionalmente igual ao componente k então o componente i é funcionalmente igual ao componente k.*

Das afirmações atrás efectuadas, verifica-se que a relação *igualdade funcional de componentes* define classes de equivalência no conjunto dos elementos da rede de componentes.

Definição 2.3 (menor dos iguais) *Seja g um componente e $A_I(g)$ o conjunto de todos os componentes funcionalmente iguais a g. Define-se o menor dos iguais a g, i, como sendo :*

$$i = \min\{i_0 : i_0 \in A_I(g)\}$$

admitindo que a etiquetagem dos componentes, é feita por ordem decrescente de $R[i] = q(i)/p(i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, em que $p(i)$ é a probabilidade de um componente estar ligado e $q(i)$ é a probabilidade de um componente estar desligado [1].

Definição 2.4 (menor igual) *Seja g um componente e seja i o menor dos iguais a g. Se g e i são iguais então diz-se que g goza da propriedade de ser menor igual.*

Facto 2.2 *Seja g um componente e $A_I(g)$ o conjunto de todos os componentes funcionalmente iguais a g. Se $\#A_I(g) = 1$ (ou seja $A_I(g) = \{g\}$) então g goza da propriedade de ser menor igual.*

Definição 2.5 (menor doutro) *Seja g um componente, $A_I(g)$ o conjunto de todos os componentes funcionalmente iguais a g e i o menor dos iguais a g.*

Se $\#A_I(g) > 1$ então i e goza da propriedade de ser menor doutro.

3 Redução Funcional dos Estados

Dados os estados da rede de componentes e o respectivo mapeamento na rede funcional, pretende-se detectar quais são os estados funcionalmente idênticos. Considere-se que foram detectados v conjuntos $(C_i, i = 1, 2, \cdots, v)$ de estados funcionalmente idênticos:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{S_a, S_b, \cdots, S_u\} \\ &\vdots \\ C_v &= \{S_x, S_y, \cdots, S_z\} \end{aligned}$$

tal que $\forall S_\alpha, S_\beta \in C_i$ é equivalente a dizer que S_α, S_β são estados funcionalmente idênticos e

$$\begin{aligned} \sum_v \#C_i &= 2^n \\ \wedge \quad \cap_{i=1}^v C_i &= \emptyset \\ \wedge \quad \cup_{i=1}^v C_i &= \{S_1, S_2, \ldots, S_{2^n}\} \end{aligned}$$

em que os S_k são os estados da rede de componentes, tal que $P(S_k) \geq P(S_{k+1})$.

Em [1], $E^{(w)}$ é definida como uma família de conjuntos ordenados pela ordem crescente dos seus elementos, números compreendidos entre 1 e n. Cada estado S_k pode ser representado por um e um só elemento dessa família, cujos elementos são os componentes avariados no estado S_k.

Em [1], refere-se que os $E_j^{(w)}$, são etiquetados de forma única, mesmo quando $P(E_j^{(w)}) = P(E_{j+1}^{(w)})$. Cada estado S_k, uma vez conhecidos os componentes que o constituem, está biunivocamente relacionado com um $E_{j+1}^{(w)}$. No entanto nada garante a unicidade da etiquetagem dos S_k, quando $P(S_j) = P(S_{j+1})$.

Exemplo: n=2, com p(1) = p(2), vem:

$$\begin{aligned} &E_1^{(0)} = \emptyset \\ &E_1^{(1)} = \{1\} \qquad E_2^{(1)} = \{2\} \\ &E_1^{(2)} = \{1,2\} \end{aligned}$$

com $P(E_1^{(1)}) = P(E_2^{(1)})$ e os estados serão:

$$\begin{aligned} &S_1 = E_1^{(0)} \\ &S_2 = E_1^{(1)} \quad S_3 = E_2^{(1)} \\ &S_4 = E_1^{(2)} \end{aligned}$$

ou

$$S_1 = E_1^{(0)}$$
$$S_2 = E_2^{(1)} \quad S_3 = E_1^{(1)}$$
$$S_4 = E_1^{(2)}$$

Como se pode ver, se a ordenação dos estados depender apenas da sua probabilidade de ocorrência, a sua etiquetagem não é única. É possível, no entanto garantir a unicidade de etiquetagem dos estados. Considere-se que existem os estados $S_1, S_2, \cdots, S_{2^n}$ da rede de componentes tal que:

$$S_1 = \emptyset$$
$$P(S_1) \geq P(S_2) \geq \cdots \geq P(S_{2^n})$$

e tal que

$$P(S_i) = P(S_{i+1}) \wedge \#S_i \neq \#S_{i+1} \Longrightarrow \#S_i < \#S_{i+1}$$

ou

$$P(S_i) = P(S_{i+1}) \wedge \#S_i = \#S_{i+1} \Longrightarrow \exists^1 j : S_i = E_j^{(\#S_i)} \wedge S_{i+1} = E_{j+1}^{(\#S_i)}$$

Definição 3.1 (Estados mínimos) *Seja:*

$$s_i = min\{t : S_t \in C_i\}, \quad i = 1, 2, \cdots, v$$

então os estados S_{s_i} são os v estados mínimos da rede de componentes.

A etiquetagem dos conjuntos C_i, $i = 1, \cdots, v$, é única desde que se garanta que, se S_{s_i} e S_{s_j} são estados mínimos e $i < j$ então $s_i < s_j$.

Assim, os 2^n estados da rede de componentes podem ser reduzidos aos v estados mínimos. Se fosse pretendido cobrir todos os 2^n estados da rede de componentes, bastava considerar apenas os v estados mínimos, pois estes cobrem todos os estados funcionais, em número v, de probabilidade:

$$P(C_j) = \sum_{a=1,2,\cdots,2^n \wedge S_a \in C_j} P(S_a), \quad j = 1, 2, \cdots, v \tag{1}$$

3.1 Algumas definições auxiliares

Seja S_k um estado da rede de componentes e $i \in S_k$. Seja o componente g o menor dos iguais a i. Se $g \neq i$, então o componente i pode ser substituído em S_k por g tal que o estado obtido S'_k,

$$S'_k = (S_k \backslash \{i\}) \cup \{g\} \tag{2}$$

é funcionalmente idêntico a S_k. Não esquecer que $A \cup A = A$.

Definição 3.2 (S_k^I) *Seja:*

$$S_k = \{a_1, a_2, \cdots, a_u\}$$

um estado da rede de componentes. Chama-se S_k^I o conjunto que se obtem substituindo cada componente $a_i \in S_k$ pelo respectivo menor dos iguais a cada um deles. Seja α a função:

$$\alpha(S_k) = S_k^I$$

Facto 3.1 *Os estados S_k e S_k^I são funcionalmente idênticos.*

Facto 3.2 *Existe um estado $S_j = S_k^I$ tal que $j \leq k$.*

Se existir pelo menos um componente g tal o conjunto $A_I(g)$ tem cardinalidade superior a 1 então, com base na definição de componentes funcionalmente idênticos, é possível reduzir o espaço de estados funcional.

Seja n_I o número de componentes $i = 1, 2, \cdots, n$ que gozam da propriedade de ser menor igual. Então *do ponto de vista funcional*, existem apenas n_I componentes distintos sujeitos a avaria, pelo que o número de total de estados funcionais diferentes v:

$$v \leq 2^{n_I} \leq 2^n \tag{3}$$

Na equação (3) escrevemos $v \leq 2^{n_I}$ em vez de $v = 2^{n_I}$ porque poderão existir estados funcionais idênticos que não são identificados com base apenas na igualdade funcional de componentes.

3.2 Primeiro algoritmo para a redução funcional dos estados

Considerando que os estados da rede, S_k, com $k = 1, 2 \cdots, 2^n$, são conhecidos, a definição do conjunto S_k^I vai permitir efectuar alguma redução funcional, como o algoritmo seguinte exemplifica:

<u>Algoritmo Reduz</u> (Primeiro algoritmo de redução)

1. <u>Para</u> $j = 1, 2, \cdots, 2^n$ <u>Fazer</u>
   $D_{2^n+1}(j) = \emptyset$
   <u>FimPara</u>
2. <u>Para</u> cada S_k, com $k = 2^n, 2^n - 1, \cdots, 2, 1$ <u>Fazer</u>
   (a) <u>Se</u> $S_k \neq S_k^I$ <u>Então</u>
       i. $\exists^1 S_j : S_j = S_k^I \wedge j < k$
       <u>Senão</u>
       i. j = k
       <u>FimSe</u>
   (b) $D_k(j) = D_{k+1}(j) \cup \{S_k\}$
   (c) <u>Para</u> $t = 1, 2, \cdots, j-1, j+1, \cdots, 2^n$ <u>Fazer</u>
       $D_k(t) = D_{k+1}(t)$
   <u>FimPara</u>

Obtêm-se finalmente os conjuntos $D_1(j)$, $j = 1, 2, \cdots, 2^n$:

$$D_1(j) = \begin{cases} \emptyset & : \text{ o estado } S_j \text{ tem algum estado que lhe é funcionalmente idêntico} \\ \{S_j\} & : \text{ não foi encontrado, até ao momento, nenhum estado funcionalmente idêntico a } S_j \\ \text{restantes casos} & : \text{ o conjunto } D_1(j) \text{ contém } S_j, \text{ todos os estados funcionalmente idênticos a } S_j \text{ até agora encontrados e } j = \min\{i : S_i \in D_1(j)\} \end{cases}$$

e os $D_1(j)$ são disjuntos dois a dois e a sua união é o espaço de estados:

$$\cup_{j=1}^{2^n} D_1(j) = \{S_1, S_2, \cdots, S_{2^n}\}$$

Relembrando os conjuntos C_i atrás introduzidos, pode afirmar-se o seguinte:

- Seja u o número de conjuntos $D_1(j) \neq \emptyset$ então $u \geq v$
- $\exists C_i : D_1(j) \subseteq C_i$

Ou seja é possível que existam conjuntos $D_1(j)$ e $D_1(t)$ tal que os seus elementos são estados funcionalmente idênticos. Mas baseando-nos apenas nas propriedades dos componentes funcionalmente iguais não é possível detectar quais os $D_1(j)$ que estão contidos no mesmo C_i.

Se for pretendido detectar apenas os estado mínimos (ver definição 3.1) da rede, então é necessário obter os conjuntos C_i (etiquetados de forma única) a partir dos $D_1(j)$.

<u>Algoritmo de Geração dos conjuntos C_i</u>

1. i = 0 ;
2. <u>Para</u> $j = 1, 2, \cdots, 2^n$, <u>Fazer</u>
    (a) <u>Se</u> $D_1(j) \neq \emptyset$ <u>Então</u>
        i. incrementar i de uma unidade
        ii. $C_i = D_1(j)$
        iii. $s = \min\{s_i : S_{s_i} \in D_1(j)\}$
        iv. <u>Para</u> $h = j+1, j+2, \cdots, 2^n$ <u>Fazer</u>
            A. $t = \min\{t_h : S_{t_h} \in D_1(h)\}$
            B. <u>Se</u> S_s e S_t são estados funcionalmente idênticos <u>Então</u>
                $C_i \leftarrow C_i \cup D_1(h)$
                $D_1(h) = \emptyset$
                <u>FimSe</u>
            <u>FimPara</u>
        <u>FimSe</u>
    <u>FimPara</u>

em que o maior valor que i poderá tomar é v.

A implementação, deste algoritmo tem como ponto crítico *a verificação da igualdade funcional de dois estados*. A sua apresentação tem apenas a intenção de mostrar como é que se poderiam utilizar os conjuntos $D_1(j)$ (em vez de simplesmente os estados S_k) para obter os conjuntos C_i.

3.3 Número de estados conhecido $m \leq 2^n$

Caso apenas sejam conhecidos os m estados mais prováveis, tudo o que foi dito pode ser adaptado, e utilizado, considerando que se obtêm conjuntos $D_1^m(j) \subseteq D_1(j)$ e os conjuntos $C_i^m \subseteq C_i$.

3.4 Geração e Redução de Estados

O algoritmo de redução apresentado no ponto **3.2** (Algoritmo Reduz) necessita que sejam gerados os m estados antes de proceder à redução funcional em u conjuntos cujos elementos são estados funcionalmente idênticos.

Apresenta-se seguidamente um segundo algoritmo de redução que para cada estado gerado o insere no correspondente conjunto de estados que lhe são funcionalmente idênticos ou caso não encontre nehum nessas condições cria um novo conjunto em que ele é o primeiro elemento (a verificação da igualdade funcional dos estados é efectudada apenas com base nas propriedades dos componentes funcionalmente iguais). A geração de estados é interrompida quando é criado o m-ésimo conjunto de estados ($m \leq 2^n$).

<u>Algoritmo GeraReduz</u> (Segundo algoritmo de redução)

1. <u>Para</u> $r = 2, \cdots, m$ <u>Fazer</u>
   $F_1(r) = \emptyset$
   <u>FimPara</u>
2. $F_1(1) = \{S_1\}$
3. $u = 1$
4. $k = 1$
5. <u>Enquanto</u> $(u < m)$ <u>Fazer</u>
   (a) Incrementar k de uma unidade
   (b) Gerar[1] o estado S_k
   (c) <u>Se</u> $(S_k^I \neq S_k)$ <u>Então</u>
      i. $r = 1$
      ii. <u>Enquanto</u> $(r \leq u)$ e $(S_k^I \notin F_{k-1}(r))$ <u>Fazer</u>
         Incrementar r de uma unidade
         <u>FimEnquanto</u>
   <u>Senão</u>
      i. Incrementar u de uma unidade
      ii. r toma o valor de u
   <u>FimSe</u>
   (d) $F_k(r) = F_{k-1}(r) \cup \{S_k\}$
   (e) <u>Para</u> $t = 1, 2, \cdots, r-1, r+1, \cdots, m$ <u>Fazer</u>
      $F_k(t) = F_{k-1}(t)$
      <u>FimPara</u>

<u>FimEnquanto</u>

[1] Ver [1]

Finalmente obtêm-se m conjuntos $F_k(r = 1, 2, \cdots, m)$ diferentes de $\emptyset$. É claro que alguns destes conjuntos poderiam, eventualmente, ver aumentada a sua cardinalidade/probabilidade se fossem gerados mais estados.

A probabilidade de ocorrer o estado funcional $F_k(r)$ é:

$$P(F_k(r)) = \sum_{S_j \in F_k(r)} P(S_j) \tag{4}$$

4 Conclusões

Se numa rede existem componentes funcionalmente idênticos, então o algoritmo GeraReduz permite que sejam analizados m estados funcionais que podem eventualmente corresponder a um número k de estados físicos significativamente mais elevado. Num estudo de fiabilidade/qualidade de uma rede de comutação por circuitos em que para cada estado é necessário, entre outras medidas de desempenho, o cálculo dos bloqueios ponto a ponto, este cálculo será efectudao apenas m vezes embora os estados físicos em estudo sejam $k \geq m$.

Com a identificação dos conjuntos de estados funcionalmente identicos é possível obter uma dada probalilidade de cobertura do espaço de estados à custa de um esforço computacional menor do que aquele que seria necessário se cada estado físico fosse tratado individualmente.

Referências

[1] Teresa Gomes e José Craveirinha, *Um Algoritmo de Geração Sequencial de Estados, numa Rede Sujeita a Avarias*, Relatório de Investigação ET-N1, Versão 2, INESC-Coimbra, Dezembro de 1993.