Técnicas de Planeamento e Gestão

Folha nº 6 **Filas de espera** **2007/08**

1 - O balcão do sector de manutenção de uma empresa tem 1 funcionário que pode servir 12 pedidos por hora, em média. O tempo de serviço segue uma distribuição exponencial negativa. Os pedidos chegam ao balcão cada 6 minutos, em média (seguindo uma distribuição de Poisson).

(a) Quantos pedidos estarão em média na fila de espera? E no sistema?

(b) Qual o tempo médio que cada pedido estará na fila? E até ser atendido?

(c) Qual a percentagem de tempo que o funcionário estará inactivo?

(d) Qual a probabilidade de um pedido esperar mais de 30 minutos no sistema?

(e) Qual a probabilidade de haver mais de 3 pedidos no sistema?

2 - As chegadas a um balcão de atendimento com um funcionário seguem uma distribuição de Poisson com uma média de 2 clientes por minuto. O tempo de serviço segue uma distribuição exponencial negativa com uma taxa média de serviço de 3 clientes por minuto.

(a) Se visitarmos o balcão em instantes aleatórios, quantos clientes observaremos em média na fila de espera? E qual o número médio de clientes no sistema (fila+atendimento)?

(b) Qual o tempo médio que cada cliente esperará na fila? E qual o tempo médio até ser atendido?

(c) Qual a percentagem de tempo que o funcionário estará inactivo?

(d) Se fosse contratado mais um funcionário para atendimento, qual seria a probabilidade de ambos os funcionários estarem inactivos?

3 - Um restaurante de comida rápida está a considerar instalar um balcão *drive-through*. A análise de operações semelhantes mostrou que as chegadas seguem geralmente uma distribuição de Poisson, mas os tempos de serviço nem sempre seguem uma distribuição exponencial negativa (ou seja, nalguns dias tal parece acontecer e noutros não). Durante a hora de ponta do almoço, pensa-se que uma média de 15 clientes usará o *drive-through*. Os tempos de serviço têm uma média de 2.5 minutos com um desvio padrão de 1.5 minutos.

Compare as características de operação (nº de clientes na fila, nº de clientes no sistema, tempo médio na fila, tempo médio no sistema, percentagem de tempo que o funcionário do balcão *drive-through* estará inactivo) para os modelos:

(a) M/M/1.

(b) M/G/1.

4 - Considere um modelo de um self-service em que o cliente é também o servidor (o que corresponde a ter um número infinito de servidores disponíveis). Os clientes chegam seguindo um processo de Poisson com parâmetro λ e os tempos de serviço seguem uma distribuição exponencial negativa com parâmetro μ.

(a) Calcule Lq e Wq.

(b) Construa o diagrama do processo para este sistema.

(c) Use as equações de equilíbrio para achar a expressão de Pn em função de P_0.

(d) Calcule P_0.

(e) Calcule L e W.

5 - Considere uma variação do modelo M/M/1 onde os clientes deixam o sistema sem serem servidos se o tempo de espera na fila se tornar demasiado longo. O tempo que cada cliente está disposto a esperar na fila antes de a abandonar segue uma distribuição exponencial negativa com média $1/\theta$.

(a) Construa o diagrama do processo para este sistema.

(b) Desenvolva as respectivas equações de equilíbrio (para os estados 0, 1, 2 e n).

6 - Num sistema com 2 servidores, a distribuição do tempo entre chegadas é exponencial negativa com uma média de 2 horas e a distribuição do tempo de serviço é exponencial negativa com uma média de 2 horas para cada servidor. Um cliente acaba de chegar às 12:00h.

(a) Qual a probabilidade de a próxima chegada ser (i) antes das 13:00h, (ii) entre as 13:00 e as 14:00h?, e (iii) depois das 14:00h?

(b) Qual a probabilidade de a próxima chegada ser entre as 13:00 e as 14:00h, sabendo que não chegou qualquer cliente adicional antes das 13:00?

(c) Qual a probabilidade de o número de chegadas entre as 13:00 e as 14:00h, ser (i) 0, (ii) 1, e (iii) 2 ou mais?

(d) Sabendo que ambos os servidores estão ocupados às 13:00h, qual a probabilidade de nenhum cliente ter o serviço completo (i) antes das 14:00h, (ii) antes das 13:10h, e (iii) antes das 13:01?

7 - Uma estação de serviço tem uma bomba de gasolina. Os carros chegam para abastecer seguindo um processo de Poisson com uma média de 15 por hora. Contudo, se a bomba estiver já a ser usada, os potenciais clientes podem dirigir-se a outra estação de serviço. Se houver já n carros na estação de serviço, a probabilidade de um potencial cliente que chegue se dirigir a outra estação é n/3, para n=1,2,3. O tempo necessário para abastecer tem uma distribuição exponencial negativa com média 4 minutos.

(a) Construa o diagrama do processo para este sistema.

(b) Escreva as respectiva equações de equilíbrio.

8 - Uma agência bancária tem 3 caixas de atendimento aos clientes. Os clientes chegam de acordo com um processo de Poisson a uma taxa média de 1 por minuto. Se um cliente encontra as 3 caixas ocupadas, junta-se a uma fila única que é servida por todas as caixas. O tempo de cada transacção entre o funcionário da caixa e o cliente segue uma distribuição exponencial negativa com média 2 minutos.

(a) Qual o número médio de clientes na fila e o tempo médio de espera na fila?

(b) Qual a probabilidade os funcionários estarem todos desocupados?

9 - Uma agência bancária tem 2 caixas de atendimento aos clientes. Cada caixa é capaz de atender uma média de 60 clientes por hora, sendo os tempos de atendimento exponencialmente distribuídos. Os clientes chegam ao banco de acordo com um processo de Poisson a uma taxa média de 1.5 por minuto. Se um cliente encontra todas as caixas ocupadas, junta-se a uma fila única que é servida por todas as caixas.

(a) Qual a probabilidade que existam mais de 3 clientes no banco simultaneamente?

(b) Qual a probabilidade que um dado caixa esteja desocupado?

(c) Qual a probabilidade de um cliente permanecer no banco mais de 4 minutos?

10 - Considere um processo de nascimento e morte em que a taxa média de serviço (exponencial negativa) aumenta à medida que o tamanho da fila aumenta: $\mu_n = n^a \mu_1$. O parâmetro a é designado por taxa de pressão, indicando o grau em que a taxa de serviço do sistema é afectada pelo estado do sistema. Quando há 1 cliente no sistema, este é atendido em média em 12 minutos. As chegadas são de Poisson, com tempo médio entre chegadas constante igual a 3 minutos. Devido a limitaç\ões de espaço, o sistema pode ter no máximo 4 clientes.

(a) Construa o diagrama de estados para este sistema.

(b) A partir das equações de equilíbrio, derive uma expressão geral para p_n em função de a e de p_0 (n=1,...,4).

(c) Qual o valor do coeficiente de pressão a para o qual a probabilidade de o sistema ter 1 ou 2 clientes é igual?

(d) Para este valor de a qual a probabilidade de o sistema estar desocupado?

11 - Uma pequena mercearia tem apenas uma caixa de saída com um funcionário a tempo inteiro. Os clientes chegam à caixa de acordo com um processo de Poisson a uma taxa média de 30 clientes por hora. Quando está apenas um cliente na caixa, o funcionário faz todo o serviço com um tempo médio de serviço de 1.5 minutos. Contudo, quando está mais do que um cliente na caixa, o funcionário de reposição do stock vai ajudar a colocar as compras nos sacos. Assim, o tempo esperado requerido para processar cada cliente é reduzido para 1 minuto. Em ambos os casos a distribuição do tempo de serviço é exponencial negativa.

(a) Contrua o diagrama do processo para este sistema de fila de espera.

(b) Na situação de equilíbrio, qual a distribuição de probabilidade do número de clientes na caixa (p_0 e p_n)?

(c) Qual o número médio de clientes no sistema (L) e o tempo médio de espera na fila (W_q)?

12 - Um balcão de uma companhia aérea tem 2 funcionários que atendem chamadas telefónicas para reserva de bilhetes. Se os 2 funcionários estiverem ocupados um cliente pode ser colocado em espera até um dos funcionários estar livre para o atender. Se todas as 3 linhas (as dos 2 funcionários mais a linha de espera) estiverem ocupadas, o cliente obtém um sinal de ocupado e não é atendido, devendo então desligar. As chamadas chegam de acordo com um processo de Poisson com uma média de 15 por hora. A duração de uma chamada segue uma distribuição exponencial negativa, com uma média de 4 minutos.

(a) Construa o diagrama de estados para este sistema de fila de espera.

(b) A partir das equações de equílibrio calcule a probabilidade que um cliente:

(i) consiga falar imediatamente com um funcionário;

(ii) seja colocado em espera;

(iii) obtenha um sinal de ocupado.