Técnicas de Planeamento e Gestão

Folha nº. 1 **Introdução à Programação Linear** **2007/08**

1- A fábrica de gelados Derretem-se na Boca SARL fabrica duas qualidades de gelados: cassata de nozes (C) e pistachio de frutas (P). A loja encontra-se localizada numa animada área turística de modo que toda a produção é sempre vendida.

Um cone de C custa 1.5 euros enquanto um cone de P custa 1.2 euros.

Um cone de C necessita de 8 gr de mistura de frutas e de 4 gr de noz moída. Um cone de P requer 12 gr de mistura de frutas e 2 gr de noz moída. Contudo, apenas podem ser produzidas por hora 192 gr de mistura de frutas e 48 gr de noz moída.

Quantos cones de cada tipo devem ser fabricados de modo a maximizar a receita em cada hora?

Represente graficamente a solução do problema.

2- Uma empresa labora em dois processos produtivos fabricando dois produtos de grande consumo P1 e P2. No primeiro processo, 1 Kg de matéria-prima dá origem a 2 unidades de P1 e 1 de P2, resultando 20 gramas de um resíduo altamente poluente. No segundo processo, gastando a mesma quantidade de matéria-prima obtêm-se 1 unidade de P1 e 3 unidades de P2, gerando 10 gramas do mesmo resíduo.

A empresa dispõe de 3 toneladas de matéria-prima e deve satisfazer encomendas de 2000 unidades de P1 e 4000 unidades de P2.

A empresa pretende minimizar a quantidade produzida de resíduo poluente. Formule matematicamente o problema e resolva-o graficamente.

Quais as quantidades de P1 e P2 produzidas em cada processo ? Qual a quantidade de matéria-prima não utilizada ? Qual a quantidade total de resíduo poluente produzido ?

3- Um empresa de electrónica fabrica dois tipos de produto A e B. Os do tipo A são vendidos por 4 euros e os do tipo B por 5 euros.

No processo produtivo ambos os produtos passam por duas máquinas. Na primeira máquina os produtos são processados durante 4 horas os do tipo A e 5 horas os do tipo B. Na outra máquina os produtos passam 4 e 3 horas, respectivamente.

A primeira máquina pode funcionar durante um máximo de 32 horas, enquanto a outra máquina não pode exceder as 24 horas de funcionamento.

A empresa pretende maximizar a receita. Formule matematicamente o problema e resolva-o graficamente. Qual a receita máxima que a empresa pode obter ?

4- Devido a alterações de mercado os preços dos produtos A e B referidos no problema anterior caíram para 4 e 3 euros escudos respectivamente. Simultaneamente, modificações no processo produtivo, requeridas por um mais rigoroso controlo de qualidade, levaram à aquisição de uma nova máquina onde tanto o produto A como o produto B sofrem operações com a duração de 1 hora. No entanto, esta máquina não pode funcionar menos de 8 horas semanais.

Reformule o problema com as novas condições representando graficamente a região admissível.

5- Três produtos (1, 2, 3) são manufacturados passando por três operações diferentes (A, B, C). Os tempos (em minutos) requeridos por unidade de cada produto, a capacidade diária das operações de fabrico (em minutos/dia) e o lucro por unidade vendida de cada produto (numa dada unidade monetária) são os seguintes:

Operação	**Tempo por unidade**			**Capacidade Operativa** (min/dia)
	Produto 1	Produto 2	Produto 3	
A	1	2	1	430
B	3	0	2	460
C	1	4	0	420
Lucro unitário (u.m.)	3	2	5	*max*

Supondo que toda a produção é vendida, formule o problema como um de programação linear de modo a obter um lucro máximo.

6- Um agricultor pode usar dois tipos de cereais para alimentar as suas galinhas, de acordo com a tabela :

Cereal	**Unidades nutritivas** (Kg/cereal)			**Custo/Kg cereal** (esc.)
	Vitamina A	Vitamina B	Vitamina C	
1	5	4	2	60
2	7	2	1	350

O número mínimo de unidades nutritivas requeridas por dia é de 8, 15 e 3 para as vitaminas A, B e C, respectivamente.

Sabendo que se pretende minimizar o custo da alimentação das galinhas, formule o problema como um de programação linear.

7- Uma companhia produz dois tipos de fertilizante: fosfato-HI e fosfato-LO. Para a sua produção são usados 3 materiais de base, do modo indicado no quadro :

Material	**Ton. material requeridas para a produção de uma ton. de fosfato**		**Quantidade max. disponível/mês** (ton.)
	LO	HI	
A	2	1	1500
B	1	1	1200
C	1	0	200

Cada unidade (tonelada) dos fertilizantes é vendida por 15 u.m. (fosfato-HI) e 10 u.m. (fosfato-LO).

Apresente a formulação matemática deste problema por forma a maximizar a receita mensal.

8- Uma empresa deseja realizar um "show" na televisão para publicitar os seus produtos. O "show" durará exactamente 30 minutos e nele actuarão um actor cómico e um grupo musical.

A empresa deseja que sejam consagrados a anúncios pelo menos 4 minutos.

A estação de TV exige que o tempo dedicado aos anúncios não exceda 8 minutos, não podendo, além disso, em caso algum ser superior ao tempo atribuído ao actor cómico. Este, por sua vez, não está disposto a actuar durante mais de 15 minutos. Ao grupo musical caberá o tempo restante.

O custo de actuação do actor é de 200 u.m./minuto e o do grupo musical é 1000 u.m./minuto.

Sondagens recentes mostram que :

- por cada minuto em que o actor se exibe 4000 espectadores ligam o televisor para essa estação;
- por cada minuto de actuação do grupo musical esperam-se 2000 novos espectadores;
- por cada minuto de anúncios 1000 pessoas desligam o aparelho ou ligam para outra estação.

De modo a tomar uma decisão fundamentada a empresa pretende dispor de programas que:

a) maximizem o número de espectadores

b) minimizem o custo dos "shows".

Formule matematicamente ambos os problemas.

9- Uma empresa possui duas categorias de inspectores (I1 e I2), que devem ser afectos a uma inspecção de controlo de qualidade em que se requer que sejam inspeccionadas pelo menos 1800 peças por dia de trabalho (8 horas).

Os inspectores I1 ganham $4/hora e podem verificar 25 peças por hora com uma precisão de 98%. Os inspectores I2 ganham $3/hora e podem verificar 15 peças por hora com uma precisão de 95%. Cada vez que um inspector comete um erro o custo para a empresa é de $2. A companhia tem disponíveis para este trabalho 8 I1 e 10 I2. Qual a afectação óptima de inspectores que minimiza o custo total da inspecção ?

10- Pretende-se planear a produção, armazenamento e venda de um produto cuja procura e preço de venda variam ao longo do ano. A tabela seg. dá os custos de produção ($/ton), a capacidade de produção (ton.), a procura (ton.) e o preço de venda ($/ton):

Período	custos de produção ($/ton)	capacidade de produção (ton.)	procura (ton.)	preço de venda ($/ton)
1	20	1500	1100	180
2	25	2000	1500	180
3	30	2200	1800	250
4	40	3000	1600	270
5	50	2700	2300	300
6	60	2500	2500	320

O custo de armazenamento de um período para o seguinte é 2 $/ton.

As operações têm início no período 1 com um stock inicial de 500 ton. do produto em armazém. A empresa pretende ficar com a mesma quantidade em armazém no fim do período 6.

Construa um modelo de programação linear no qual a empresa se possa basear para planear a produção, as vendas e o stock ao longo dos 6 períodos, de modo a maximizar a receita total.

Explicite o significado das variáveis de decisão, restrições e função objectivo.

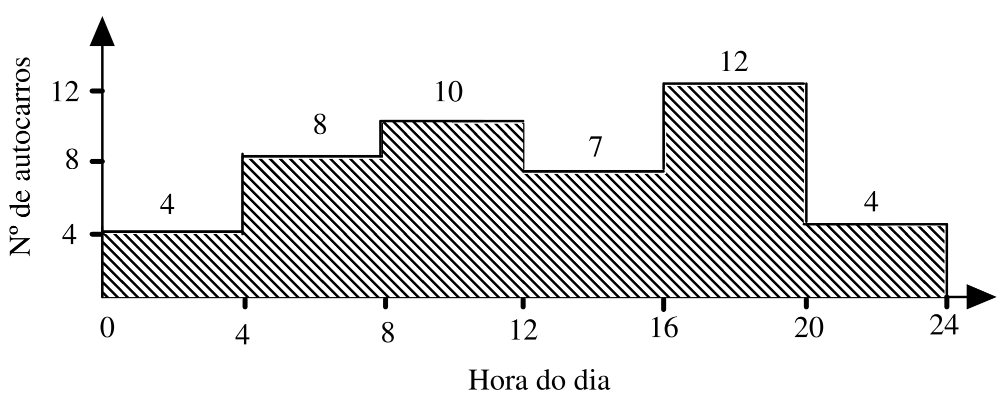
11- Uma empresa possui 3 fábricas onde existe capacidade de produção em excesso. Todas as fábricas estão aptas a produzir um novo produto e a direcção decidiu usar desta forma alguma da capacidade disponível. Este novo produto pode ser fabricado em 3 tamanhos (grande [G], médio [M] e pequeno [P]), que dão um lucro unitário de 42, 36 e 30 contos, respectivamente. As fábricas 1, 2 e 3 têm capacidade em excesso para produzir diariamente 750, 900 e 450 unidades deste produto, respectivamente, independentemente dos tamanhos ou combinação de tamanhos.

O espaço de armazenamento disponível impõe uma limitação na produção do novo produto. As fábricas 1, 2 e 3 têm 13000, 12000 e 5000 m^2 de espaço de armazenamento disponível, respectivamente, para um dia de produção. Cada unidade dos produtos G, M e P produzida por dia necessita de 20, 15 e 12 m^2, respectivamente.

As previsões de vendas indicam que podem ser vendidas diariamente 900, 1200 e 750 unidades dos produtos G, M e P, respectivamente. Para manter uma força de trabalho uniforme nas fábricas e dispor de alguma flexibilidade, a direcção decidiu que as fábricas devem usar a mesma percentagem da sua capacidade em excesso para produzir o novo produto. A direcção pretende saber quanto de cada tamanho deve ser produzido em cada fábrica, de modo a maximizar o lucro total.

Construa um modelo matemático de programação linear para o problema, explicitando o significado das variáveis de decisão, restrições e função objectivo.

12- Uma administração municipal está a estudar a possibilidade de introduzir um sistema de transportes colectivos para reduzir a circulação de automóveis na cidade. O objectivo do estudo é determinar o número mínimo de autocarros, de modo a satisfazer as necessidades de transporte da população. Após recolher a informação necessária, o engº responsável pelo estudo verificou que o número mínimo de autocarros necessário para satisfazer a procura variava ao longo do dia, mas o número requerido de autocarros podia ser considerado constante ao longo de períodos sucessivos de 4 horas cada (de acordo com a fig.). De modo a efectuar os trabalhos de manutenção necessários, cada autocarro pode funcionar por dia apenas 2 períodos sucessivos de 4 horas.



Construa um modelo de PL no qual a administração municipal se possa basear para determinar o número de autocarros em serviço em cada período, que satisfaça a procura, de modo a minimizar o número total de autocarros em serviço em cada dia.

13- Uma família possui 500 mil metros quadrados de terra e tem 5 mil contos em fundos disponíveis para investimento. Os membros da família podem produzir um total de 3500 pessoas-hora de trabalho durante os meses de inverno e 4000 pessoas-hora durante o verão. Se parte destas pessoas-hora não for necessária, os membros mais novos da família podem usá-la para trabalhar nas quintas vizinhas por 800 escudos/hora no inverno e 1000 escudos/hora no verão.

As receitas em dinheiro podem ser obtidas através de 3 colheitas e da criação de 2 tipos de animais: vacas leiteiras e galinhas. Para as colheitas não são necessários investimentos. Cada vaca requer um investimento de 200 mil escudos e cada galinha custa 1500 escudos. Cada vaca necessita de 6 mil metros quadrados de terra, 100 pessoas-hora de trabalho durante o inverno e 50 pessoas-hora durante o verão. Cada galinha necessita de 0.6 pessoas-hora de trabalho durante o inverno e 0.3 pessoas-hora durante o verão, e não é necessário o uso de terra. Cada vaca produz uma receita anual líquida para a família de 165 mil escudos, enquanto cada galinha gera 850 escudos. O galinheiro pode albergar um máximo de 3000 galinhas, enquanto o tamanho do estábulo limita o número de vacas a 32. Os valores estimados de pessoas-hora e de receita por metro quadrado de terra plantado em cada uma das 3 colheitas são:

	Soja	Milho	Aveia
Pessoas-hora no inverno	20	35	10
Pessoas-hora no verão	50	75	40
Receita anual líquida (escudos)	1000	1500	750

A família pretende determinar qual a superfície de terra que deve ser plantada em cada uma das colheitas, e quantas vacas e galinhas devem ser adquiridas para maximizar a receita líquida anual.

Construa um modelo matemático de programação linear para o problema, explicitando o significado das variáveis de decisão, restrições e função objectivo.

14- Suponha que lhe saíu um prémio de 6000 contos no Totoloto e que pretende investir este dinheiro na totalidade ou apenas uma parte. Sabendo disto dois amigos seus (o Alberto e o Belmiro) ofereceram-lhe sociedade em dois negócios diferentes que pretendem realizar no próximo verão. Em ambos os casos a sua participação envolve quer disponibilizar dinheiro, quer colaborar com trabalho.

Tornar-se sócio a parte inteira do Alberto implica um investimento de 5000 contos e 400 h de trabalho, e o lucro esperado é de 4500 contos (sem levar em conta o valor do seu tempo). Os valores correspondentes relativos à participação (a parte inteira) no negócio do Belmiro são 4000 contos e 500 h, e 4500 contos para o lucro esperado. Contudo, ambos os amigos são flexíveis e permitem-lhe participar com qualquer fracção de sócio a parte inteira; obviamente que a sua parte nos lucros será também proporcional a esta fracção.

Dado que pretende também algum tempo livre no verão, não quer dedicar mais de 600 h de trabalho. Cabe-lhe então decidir qual combinação de participação num ou em ambos os projectos dos seus amigos de modo a maximizar o seu lucro.

a) Construa um modelo matemático de programação linear para o problema, explicitando as variáveis de decisão, restrições e função objectivo.

b) Resolva o problema graficamente e utilizando o método simplex.