Deptº. de Engª. Electrotécnica e de Computadores - Fac. Ciências e Tecnologia – Univ. Coimbra

Fundamentos de Investigação Operacional / Introdução à Optimização

Exame (época de recurso) 31.Janeiro.2008 Duração: 2h30m

<u>Notas</u>: *Justifique devidamente as respostas.* *Pode consultar até 5 folhas A4 manuscritas.*

I - Considere o seguinte problema de programação linear

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{min} & z = 5\,x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 + 2\,x_4 & \\
\text{s. a} & 4\,x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 + 2\,x_4 \le 40 & \text{(slack } x_7\text{)} \\
 & 2\,x_1 + \;\; x_2 + \;\; x_3 + \;\; x_4 \ge 20 & \text{(surplus } x_5\text{, artificial } x_8\text{)} \\
 & 2\,x_1 + \;\; x_2 + 2\,x_3 + 4\,x_4 \ge 20 & \text{(surplus } x_6\text{, artificial } x_9\text{)} \\
 & x_j \ge 0\ ,\ j=1,\ldots,9; &
\end{array}
$$

1. Em determinada iteração do algoritmo simplex foi obtido o seg. quadro:

$\underline{\mathbf{x}}_B$	x_1	x_2	x_4	x_5	
x_7	$\alpha 1$	$\beta 1$	$\delta 1$	$\phi 1$	$\psi 1$
x_6	$\alpha 2$	$\beta 2$	$\delta 2$	$\phi 2$	$\psi 2$
x_3	$\alpha 3$	$\beta 3$	$\delta 3$	$\phi 3$	$\psi 3$
z_j-c_j	$\pi 1$	$\pi 2$	$\pi 4$	$\pi 6$	Λ

Calcule os valores ainda não conhecidos e mostre que esta é a solução óptima do problema.

2. Qual a quantidade não usada do recurso disponível associado à 1ª restrição? Qual a quantidade em que o requerimento associado à 2ª restrição é ultrapassado?

3. Existem soluções óptimas alternativas? Em caso positivo, indique um conjunto de variáveis básicas associado a uma bae óptima alternativa.

4. Qual a gama admissível para a variação de c_3 em que a base óptima não se altera? Qual a variação do valor óptimo da função objectivo em função de c_3 [z (c_3)]?

5. Se for introduzida uma nova variável x_{10}, cujos coeficientes na matriz A são $A_{.10}=(2,4,1)^T$, qual a gama de valores do respectivo coeficiente na função objectivo (c_{10}) para a qual a solução óptima se mantém?

II- Na tabela, o elemento (i,j) dá um indicador de desempenho associado a afectar a máquina i ao processo j. Quais as máquinas a afectar a cada processo para <u>maximizar</u> o indicador de desempenho global.

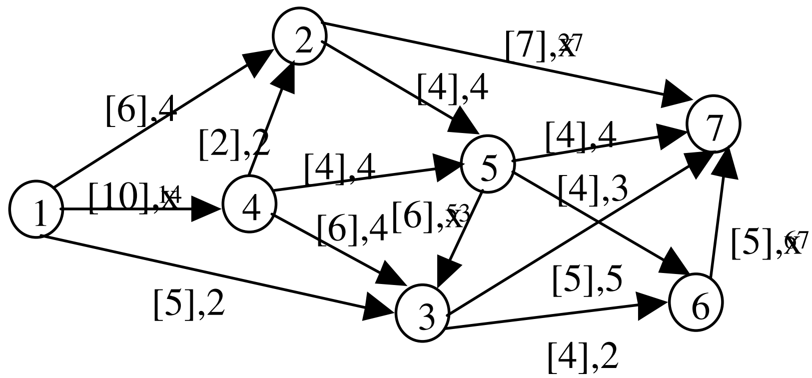
	P1	P2	P3	P4	P5
M1	10	15	17	18	18
M2	12	14	15	16	16
M3	12	12	17	16	16
M4	15	16	18	17	19
M5	17	19	19	15	15

III - Na rede da figura, a cada arco (i,j) está associada a sua capacidade ([b_{ij}]) e também o fluxo nele existente (x_{ij}).

1. Determine o valor de x_{14}, x_{53}, x_{27} e x_{67} de modo a que a solução actual seja admissível.

2. Determine o fluxo máximo que pode ser enviado do nodo origem 1 para o nodo terminal 7.

3. Determine o corte mínimo da rede e mostre que a sua capacidade é igual ao fluxo máximo.



IV - Considere o problema de optimização quadrática

$$\max f(\underline{x}) = 4\,x_1 - 6\,x_1^2 - 3\,x_1\,x_2 + 5\,x_2 - 5\,x_2^2$$
$$\text{s. a}\quad 7\,x_1 + 9\,x_2 \le 30$$
$$8\,x_1 + 6\,x_2 \le 40$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

1. Mostre que se trata de um problema de programação convexa.

2. Escreva as condições de Karush-Kuhn-Tucker para este problema.

3. Formule o problema de programação linear a ser resolvido explicitamente pelo método simplex modificado, identificando a restrição de complementaridade adicional que é automaticamente verificada pelo algoritmo. Construa o quadro simplex correspondente à solução básica admissível inicial, identificando todas as variáveis usadas.

V - Uma refinaria compra 4 tipos de gasolinas não refinadas, mistura-as e produz 3 tipos de combustíveis para venda ao público. Os dados estão organizados nas tabelas:

Tipo de gasolina não refinada	Taxa de octanas	Nº de barris disponíveis por dia	Preço por barril (euro)
1	68	4000	23
2	86	5050	26
3	91	7100	28
4	99	4300	31

Tipo de combustível	Taxa mínima de octanas	Preço de venda (euro/barril)	Procura
1	95	45	no máximo 10000 barris por dia
2	90	43	qualquer quantidade
3	85	40	pelo menos 15000 barris por dia

A refinaria vende as gasolinas não refinadas não usadas para fabricar combustível a 39 euro/barril se a taxa de octanas for superior a 90, e a 37 euro/barril se a taxa de octanas for inferior a 90.

Construa um modelo matemático de programação linear para auxiliar a refinaria a maximizar o seu lucro total diário.