

**Fundamentos de Investigação Operacional (LEEC)  
Introdução à Optimização (LTIV)**

Frequência

22.Dezembro.2006

Duração: 2h30m

Notas: *Justifique devidamente as respostas. Não use a 1ª página para as respostas.*

**I -** Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s. a} \quad & 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 20 \quad (\text{slack } x_7) \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 16 \quad (\text{surplus } x_5, \text{ artificial } x_8) \\ & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 20 \quad (\text{surplus } x_6, \text{ artificial } x_9) \\ & x_j \geq 0, j=1, \dots, 9; \end{aligned}$$

1. Em determinada iteração do algoritmo simplex foi obtido o seg. quadro:

$\underline{x}B$	$x_2$	$x_3$	$x_5$	$x_7$	
$x_1$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$1/2$	$\delta_1$	$\Phi_1$
$x_6$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$-4$	$\delta_2$	$\Phi_2$
$x_4$	$\alpha_3$	$\beta_3$	$-1$	$\delta_3$	$\Phi_3$
$z_j - c_j$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_5$	$\pi_7$	$\mu$

Calcule os valores ainda não conhecidos e obtenha a solução óptima.

2. Existem soluções óptimas alternativas? Em caso positivo, indique as variáveis básicas de uma solução óptima alternativa.

3. Qual a gama admissível para a variação de  $b_2$  em que a base óptima não se altera? Para esta gama, determine a expressão que dá o valor óptimo da função objectivo em função de  $b_2$  [ $z(b_2)$ ].

4. A solução óptima actual permaneceria óptima, considerando a introdução de uma nova restrição  $x_1 + 2x_4 \leq 10$ ? Em caso negativo efectue uma iteração do método dual simplex, partindo da solução óptima actual. A solução assim obtida é óptima do problema aumentado com a nova restrição?

**II-** Uma empresa possui 5 unidades de produção (UP) que podem fabricar 4 tipos de produtos. O lucro esperado de fabricar cada tipo de produto em cada UP é dado na tabela seguinte (numa dada unidade monetária). Restrições técnicas e logísticas impõem que cada produto deva ser produzido apenas numa UP e que cada uma destas UP apenas possa fabricar um produto. A direcção da empresa pretende decidir qual o produto que deve encarregar cada UP de fabricar, de modo a maximizar o lucro total.

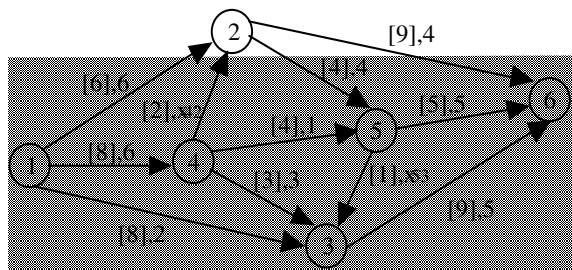
	UP 1	UP 2	UP 3	UP 4	UP 5
Produto 1	10	9	8	8	5
Produto 2	12	11	7	10	8
Produto 3	10	12	7	11	7
Produto 4	9	10	8	8	9

**III -** Na rede da figura, a cada arco (i,j) está associada a sua capacidade ( $[b_{ij}]$ ) e também o fluxo nele existente ( $x_{ij}$ ).

1. Determine o valor de  $x_{42}$  e  $x_{53}$  de modo a que a solução actual seja admissível.

2. Determine o fluxo máximo que pode ser enviado do nodo origem 1 para o nodo terminal 6. (No processo de etiquetagem, siga a ordem crescente do índice dos nodos, eventualmente usando a excepção de tentar etiquetar o nodo terminal antes de outros nodos com índice mais baixo.)

3. Determine o corte mínimo da rede e mostre que a sua capacidade é igual ao fluxo máximo.



IV- Considere o problema de optimização quadrática  
 Considere o problema de optimização quadrática

$$\begin{aligned} \max f(\underline{x}) &= 5 x_1 + 2 x_2 - 4 x_1^2 + 5 x_1 x_2 - 3 x_2^2 \\ \text{s. a} \quad & 5 x_1 + 4 x_2 \leq 40 \\ & 3 x_1 + 8 x_2 \leq 54 \\ & 2 x_1 + 3 x_2 \leq 25 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Mostre que se trata de um problema de programação convexa.
2. Escreva as condições de Karush-Kuhn-Tucker para este problema.
3. Formule o problema de programação linear a ser resolvido explicitamente pelo método simplex modificado, indicando o tipo de todas as variáveis usadas e identificando a restrição de complementaridade adicional.
4. Construa o quadro simplex correspondente à solução básica admissível inicial. Quais serão as variáveis básicas na iteração seguinte do método simplex modificado ?

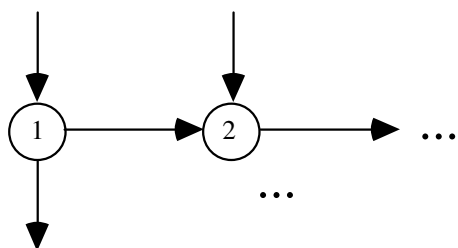
V - Uma empresa pretende avaliar o interesse em participar, durante os próximos 4 anos, em 3 projectos que lhe foram propostos. Os fluxos financeiros, receitas [+] e despesas [-], relativos a cada projecto (valores em M Euros) são dados na tabela. Supõe-se que estes fluxos financeiros têm lugar no início de cada ano (o ano 5 corresponde ao fim do ano 4).

Projecto	Ano	1	2	3	4	5
1		- 1.1	- 2.9	- 1.4	+ 1.9	+ 5.1
2		- 2.7	- 2.1	+ 0.4	+ 1.1	+ 3.8
3		- 3.0	- 1.5	- 0.1	+ 1.9	+ 3.7

Em cada ano a empresa dispõe de fundos para investir no valor de 1 M Euros e pode pedir um empréstimo até igual quantia no início de cada ano a uma taxa de juro anual de 5%. O empréstimo deve ser pago no início do ano seguinte. Os fundos de que a empresa dispõe podem ser investidos a uma taxa anual de 4%. A empresa pretende determinar o resultado líquido (lucro ou prejuízo) da sua participação nos projectos. A empresa pode participar nos projectos total ou parcialmente (neste caso os fluxos financeiros serão proporcionais à percentagem de participação).

Construa um modelo matemático de modo a auxiliar a direcção da empresa a decidir como usar todos os fluxos financeiros envolvidos de modo a maximizar os fundos acumulados no termo dos projectos. Explícite o significado das variáveis de decisão, restrições e função objectivo.

Sugestão: Para escrever as restrições construa um diagrama do tipo



onde cada nodo  $i$  representa o início do ano  $i$  (fim do ano  $i-1$ ). Aos arcos que entram e saem de cada nodo estão associados os diversos tipos de fluxos financeiros (fundos disponíveis, empréstimos, despesas e receitas devidas à participação nos projectos, etc.). As restrições resultam das equações de equilíbrio em cada nodo.