Fundamentos de Investigação Operacional (LEEC)
Introdução à Optimização (LTIV)

Exame 25.Janeiro.2007 Duração: 2h30m

Notas: *Justifique devidamente as respostas.* *Não use a 1ª página para as respostas.*

I - Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{array}{llr} \textbf{min} & z = x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_3 + 5\,x_4 & \\ \text{s. a} & 4\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 \le 30 & (\text{slack } x_6) \\ & 2\,x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 + x_4 \le 20 & (\text{slack } x_7) \\ & x_1 + x_2 + 2\,x_3 + 2\,x_4 \ge 24 & (\text{surplus } x_5,\ \text{artificial } x_8) \\ & x_j \ge 0\ ,\ j=1...,8;. & \end{array}$$

1. Em determinada iteração do algoritmo simplex foi obtido o seg. quadro:

$\underline{x}_B$	x_1	x_2	x_5	x_7	
x_6	$\alpha 1$	$\beta 1$	$\varepsilon 1$	0	$\delta 1$
x_3	$\alpha 2$	$\beta 2$	$\varepsilon 2$	1	$\delta 2$
x_4	$\alpha 3$	$\beta 3$	$\varepsilon 3$	-1	$\delta 3$
z_j-c_j	$\omega 1$	$\omega 2$	$\omega 5$	$\omega 7$	π

Calcule os valores ainda não conhecidos e obtenha a solução óptima.

2. Existem soluções óptimas alternativas? Em caso positivo, qual o valor da nova variável básica numa solução óptima alternativa?

3. Qual a gama admissível para a variação de b_3 em que a base óptima não se altera ? Para esta gama, determine a expressão que dá o valor óptimo da função objectivo em função de b_3 [$z(b_3)$].

4. A solução óptima actual permanece óptima após a introdução de uma nova restrição $x_3+x_4 \le 10$? Em caso negativo obtenha a solução óptima do problema aumentado com a nova restrição.

II- Uma empresa tem 3 fábricas a produzir um produto que é depois transportado para 3 centros de distribuição. A empresa pretende minimizar o custo total de transporte. As fábricas 1, 2 e 3 produzem 10, 12 e 8 toneladas do produto por mês, respectivamente. Os centros de distribuição 1, 2 e 3 necessitam receber 12, 15 e 13 toneladas por mês, respectivamente. Os custos de transporte, por tonelada, são:

	Centro 1	Centro 2	Centro 3
Fábrica 1	4	7	3
Fábrica 2	6	5	2
Fábrica 3	7	3	5

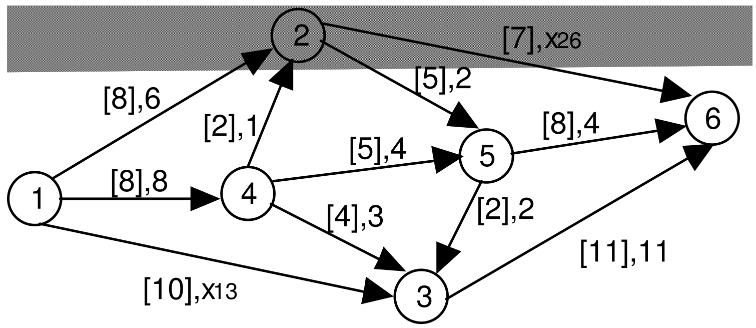
1. Calcule a solução básica admissível inicial, utilizando o método

1.1. do canto noroeste

1.2. das penalidades.

2. Partindo de uma das soluções obtidas, determine a solução óptima do problema.

III - Na rede da figura, a cada arco (i,j) está associada a sua capacidade ([b_{ij}]) e também o fluxo nele existente (x_{ij}).



1. Determine os valor não conhecidos do fluxo nos arcos de modo a que a solução actual seja admissível.

2. Determine o fluxo máximo que pode ser enviado do nodo origem 1 para o nodo terminal 6. (No processo de etiquetagem, siga a ordem crescente do índice dos nodos, eventualmente usando a excepção de tentar etiquetar o nodo terminal antes de outros nodos com índice mais baixo.)

3. Determine o corte mínimo da rede e mostre que a sua capacidade é igual ao fluxo máximo.

IV- Considere o problema de optimização quadrática

$$\max f(\underline{x}) = 4 x_1 + 5 x_2 - 6 x_1^2 + 2 x_1 x_2 - 2 x_2^2$$

$$\text{s. a} \quad \begin{aligned} 4 x_1 + 7 x_2 &\le 35 \\ 8 x_1 + 3 x_2 &\le 42 \\ 5 x_1 + 9 x_2 &\le 50 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

1. Mostre que se trata de um problema de programação convexa.

2. Escreva as condições de Karush-Kuhn-Tucker para este problema.

3. Formule o problema de programação linear a ser resolvido explicitamente pelo método simplex modificado, indicando o tipo de todas as variáveis usadas e identificando a restrição de complementaridade adicional.

4. Construa o quadro simplex correspondente à solução básica admissível inicial. Quais serão as variáveis básicas na iteração seguinte do método simplex modificado ?

V - Uma empresa possui m fábricas e n pontos de venda de um dado produto. Num período de tempo, a fábrica i pode fabricar no máximo a_i toneladas do produto em regime de produção normal a um custo de r_i euros por tonelada, para i=1,...,m. Para além da produção normal a fábrica i pode produzir uma quantidade máxima de b_i toneladas do produto em regime extra com um custo de s_i euros por tonelada, sendo $s_i > r_i$, para i=1,...,m. O custo de transporte da fábrica i para o ponto de venda j é c_{ij} por tonelada do produto. Toda a quantidade do produto fabricada num dado período pode ser transportada para os pontos de venda nesse mesmo período. Em cada ponto de venda j há uma procura de d_j toneladas do produto, para j=1,...,n. Cada tonelada do produto vendida no ponto de venda j dá uma receita de g_j euros. No entanto, a procura pode não ser totalmente satisfeita. Neste caso, cada tonelada de procura que não é satisfeita no ponto de venda j dá origem a um prejuízo de h_j euros. Se a quantidade total do produto expedida para o ponto de venda j exceder a procura nesse ponto, o excesso pode ser vendido a um armazém a um preço de k_j euros por tonelada ($k_j < g_j$), sem limite de quantidade, para j=1,...,n.

A empresa pretende determinar o esquema óptimo de produção-distribuição-venda que minimiza o custo líquido da empresa durante um dado período. Construa um modelo de programação linear no qual a empresa se possa basear para tomar esta decisão. Explicite o significado das variáveis de decisão, restrições e função objectivo.

Nota: A fábrica não pode operar em regime extra a não ser que o tempo normal seja totalmente usado.