Deptº de Engª Electrotécnica - Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade de Coimbra

Complementos de Investigação Operacional

Exame | 8.Julho.2005 | Duração: 2h15

Notas: Justifique devidamente as respostas. Não use a 1ª página para a prova.

I - Um país está a pensar mudar a sua legislação eleitoral para o parlamentro nacional. Um dado distrito é representado por R deputados no parlamento. Há D concelhos nesse distrito (D>R) e é necessário agrupar estes concelhos em R circunscrições eleitorais distintas, cada uma elegendo um deputado para o parlamento. A população total do distrito é P, e pretende-se formar circunscrições cuja população esteja próxima da relação p=P/R. Uma comissão encarrregada de estudar o problema elaborou uma lista de N possibilidades de circunscrições candidatas (N>R). Cada uma destas circunscrições candidatas é constituída por concelhos geograficamente contíguos e tem uma população total p_j (j=1,2,...,N) aceitavelmente próxima de p. A diferença $c_j = |p_j - p|$. Cada concelho i (i=1,2,...,D) está incluído em pelo menos uma circunscrição candidata e tipicamente está incluído em muitas delas (de modo a permitir várias formas de seleecionar um conjunto de R circunscrições candidatas que incluem cada concelho uma e uma só vez).

Seja a_{ij} um coeficiente que toma o valor 1 se o concelho i está incluído na circunscrição candidata j, e toma o valor zero caso contrário.

Dados os valores conhecidos de c_j e de a_{ij} (resultantes do estudo da comissão), o objectivo é selecionar R das N possíveis circunscrições candidatas de modo a que cada concelho esteja incluído numa única circunscrição e que o maior dos c_j associados seja o mais pequeno possível.

Construa um modelo de programação linear inteira (binária) para determinar a solução óptima para este problema. Explicite o significado das variáveis de decisão, restrições e função objectivo.

II- O seguinte conjunto de restrições faz parte do mesmo problema de programação inteira binária pura. Para simplificar o problema antes da respectiva resolução, pretende-se fixar o maior número possível de variáveis e identificar as restrições que se tornam redundantes (eventualmente após a fixação de variáveis).

$$3\,x_3 - x_5 + x_7 \le 1$$
$$x_2 + x_4 + x_6 \le 1$$
$$x_1 - 2\,x_5 + 2\,x_6 \ge 2$$
$$x_1 + x_2 - x_4 \le 0$$

III- Uma aplicação computacional que implementa o algoritmo "branch and bound" forneceu a seguinte lista de soluções (por esta ordem, antes de ser interrompida) para um problema de programação inteira pura. O critério de escolha da variável de ramificação é a sequência ascendente do índice das variáveis.

1. Indique se se trata de um problema de maximização ou de minimização.

2. Construa a árvore binária de sub-problemas associada a esta lista de soluções, incluindo as restrições correspondentes a cada ramo.

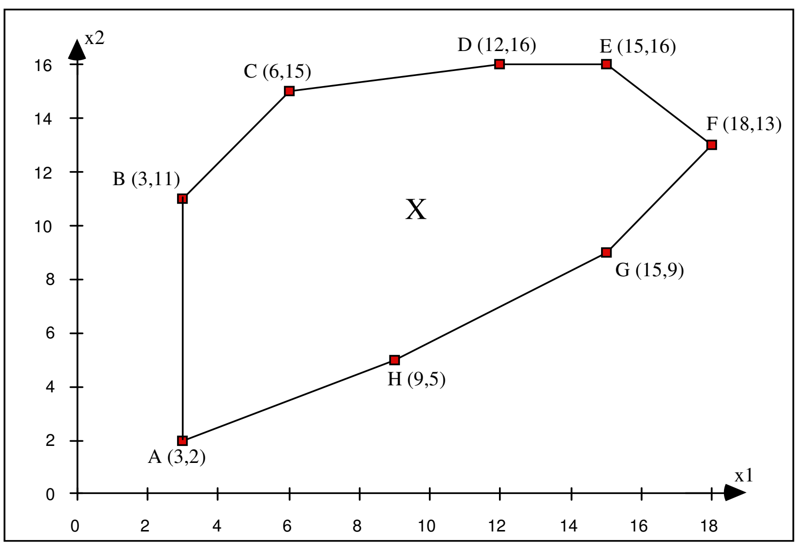
3. Quais os nodos que podem ser desprezados ("fathomed")?

4. Quais os valores de z_{inf} e z_{sup} entre os quais se situa o valor óptimo da função objectivo ($z_{inf} \le z_{opt} \le z_{sup}$) ?

5. Na situação actual é já conhecida a solução óptima ? Em caso negativo, qual a próxima ramificação a ser realizada?

solução	x1	x2	x3	x4	x5	z
1	0	5.2910	12.1693	0	5.6805	109.7355
2	0	6	10.9286	0	5.7857	107.7857
3	0	6	11	0	5.6667	107.6667
4	NÃO	ADMISSÍVEL				
5	0	6	11.4	0	5	107
6	0	6	12	0	4	106
7	0	6	11	0.5	5	107
8	0	6	11	1	4.3333	106.3333
9	NÃO	ADMISSÍVEL				
10	0	6	11	1.25	4	106
11	0.3333	6	11	0	5	106.3333
12	1	6	11	0	3.6667	103.6667
13	0	6.25	11	0	5	106.25
14	0	7	11	0	3	102
15	0	6	11	0	5	105
16	0.6190	6	10	0	6.0952	106.8571
17	1	6	9.4286	0	6.2857	106.2857
18	1	6	10	0	5.3333	105.3333
19	1.2857	6	9	0	6.4286	105.8571
20	0	6	10	1.8571	4.8571	106.8571

IV -



Considere o problema de programação linear com duas funções objectivo:

$$\textbf{min } z_1 = x_1 + 3\,x_2$$
$$\textbf{min } z_2 = x_1 - x_2$$
$$\text{s. a} \quad \underline{x} \in X$$

1. Represente a região admissível no espaço das funções objectivo, identificando a região não dominada (estrita e fracamente) e a solução ideal.

2. Formule o problema a resolver para obter a solução que minimiza a distância de métrica L_1 à solução ideal. Obtenha graficamente esta solução.

3. Formule o problema a resolver na iteração inicial do método STEM. Indique uma possível solução para este problema que não seja um vértice.

4. Qual o problema a resolver na iteração seguinte do STEM se o decisor relaxar z_1 de 3? Qual a solução óptima deste problema?

5. Para o problema com três funções objectivo represente (qualitativamente) a decomposição do espaço dos pesos (incluindo todas as regiões de indiferença):

$$\begin{aligned} &\textbf{min } z_1 = x_1 + 3\,x_2 \\ &\textbf{min } z_2 = x_1 - x_2 \\ &\textbf{max } z_3 = x_2 \\ &\text{s. a} \quad \underline{x} \in X \end{aligned}$$

V - Para um problema de programação linear com três funções objectivo foram calculadas, através de um processo de escalarização de somas ponderadas, 11 soluções básicas (vértices) não dominadas cujas correspondentes regiões de indiferença no diagrama paramétrico estão representadas na figura. Com base neste diagrama

1. Caracterize todas as faces e arestas não dominadas à custa dos vértices não dominados já conhecidos.

2. Que soluções (vértices) não dominadas seria possível calcular considerando as restrições adicionais nos pesos $\lambda_1 \geq \lambda_2$ e $\lambda_1 \geq \lambda_3$?

3. Comente as seguintes afirmações dizendo, justificadamente, se são verdadeiras ou falsas:

(i) Existem soluções não dominadas que são óptimos alternativos da 2ª função objectivo.

(ii) É possível calcular a solução não dominada que optimiza a 1ª função objectivo, optimizando uma função escalar soma ponderada com um "peso" nulo nessa função objectivo.

(iii) São necessárias pelo menos 3 operações de pivotação para obter a solução 2 a partir do quadro simplex multiobjectivo associado à solução 1.