Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade de Coimbra

Complementos de Investigação Operacional

Exame 14.Junho.2007 Duração: 2h

Notas: Justifique devidamente as respostas. Não use a 1ª página para a prova.

I - Considere o seguinte problema de programação não linear discreta

max $z = 2\,x_1 - x_1^2 + 3\,x_2 - 3\,x_2^2$

s. a $x_1 + x_2 \leq 0.75$

e cada variável está restrita aos valores 1/2, 1/3, 1/4, 1/5

Reformule este problema como um problema de programação linear binária pura.

II- Uma aplicação computacional que implementa o algoritmo "branch and bound" forneceu a seguinte lista de soluções (por esta ordem, antes de ser interrompida) para um problema de programação inteira pura. O critério de escolha da variável de ramificação é a sequência ascendente do índice das variáveis.

1. Indique se se trata de um problema de maximização ou de minimização.

2. Construa a árvore binária de sub-problemas associada a esta lista de soluções, incluindo as restrições correspondentes a cada ramo.

3. Quais os nodos que podem ser desprezados ("fathomed")?

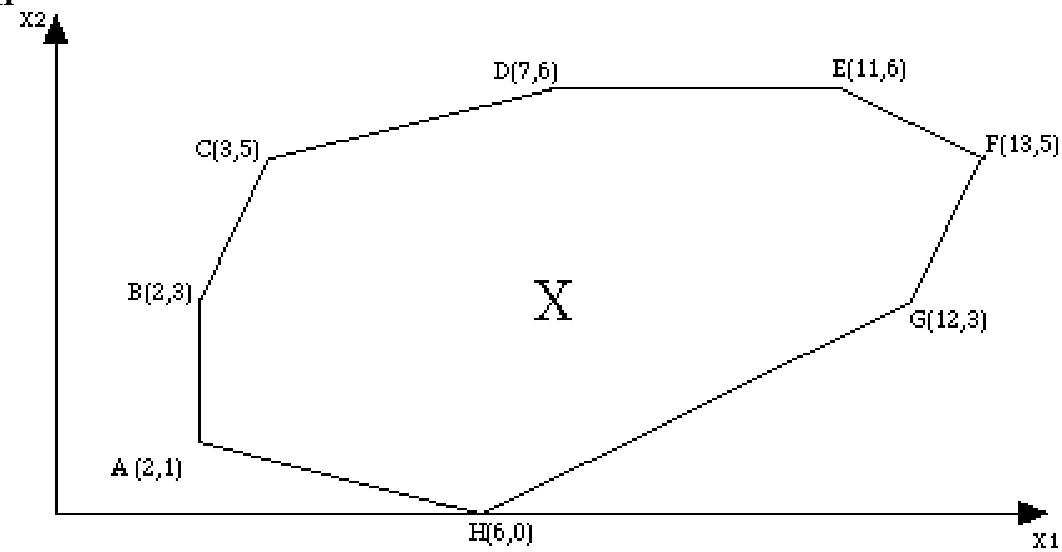
4. Na situação actual é já conhecida a solução óptima ? Em caso negativo, qual a próxima ramificação a ser realizada?

solução	x1	x2	x3	x4	x5	z
1	28	2.667	0	0	0	250.667
2	27.333	3	0	0	0	248.667
3	28	3	0	0	0	NÃO ADM.
4	27	3	0.25	0	0	247.875
5	26	3	1	0	0	245.5
6	27	3.167	0	0	0	247.667
7	25.333	4	0	0	0	242.667
8	27	3	0	0	0.25	247.5
9	25.75	3	0	0	1	242
10	27	3	0	0.143	0	247
11	25	3	0	1	0	237
12	27	3	0	0	0	246
13	28.5	2	0	0	0	248
14	29	1.333	0	0	0	245.333
15	28	2	0	0.5	0	247.5

5. Repita as alíneas 2), 3) 4) para as novas soluções calculadas:

solução	x1	x2	x3	x4	x5	z
16	27.8	1.6	0	1	0	245.4
17	28	2	0.4	0	0	247
18	27.25	2	1	0	0	245.5
19	28	2	0	0	0.25	245.5

III-



Considere o problema de programação linear com duas funções objectivo:

$$\begin{aligned} &\textbf{max } z_1 = \quad x_1 + 2\,x_2 \\ &\textbf{min } \ z_2 = 3\,x_1 - \quad x_2 \\ &\text{s. a} \quad \underline{x} \in X \end{aligned}$$

1. Represente a região admissível no espaço das funções objectivo, identificando a região não dominada (estrita e fracamente) e a solução ideal.

2. Formule o problema a resolver para obter a solução não dominada que minimiza a distância de métrica L_1 à solução ideal. Qual a solução óptima deste problema (resolva-o graficamente) ?

3. Formule o problema a resolver para obter a solução não dominada que minimiza a distância de métrica L_∞ ao ponto de referência $\underline{z} = (8, 8)$. Indique uma possível solução para este problema.

4. Represente (<u>qualitativamente</u>) a decomposição do espaço dos pesos (incluindo todas as regiões de indiferença).

5. Para o problema com três funções objectivo

$$\begin{aligned} &\textbf{max } z_1 = \quad x_1 + 2\,x_2 \\ &\textbf{min } \ z_2 = 3\,x_1 - \quad x_2 \\ &\textbf{max } z_3 = \quad x_1 \\ &\text{s. a} \quad \underline{x} \in X \end{aligned}$$

represente (<u>qualitativamente</u>) a decomposição do espaço dos pesos (incluindo todas as regiões de indiferença).

IV - Para um problema de programação linear com três funções objectivo ($f_k(\underline{x})$, k=1,2,3) foram calculadas, através de um processo de escalarização de somas ponderadas (max $\Sigma\ \lambda_k\ f_k(\underline{x})$; s.a. $\underline{x} \in X$; $\Sigma\ \lambda_k = 1$, $\lambda_k \geq 0$), 11 soluções básicas (vértices) não dominadas, cujas correspondentes regiões de indiferença no diagrama paramétrico estão representadas na figura. Com base neste diagrama:

1. Caracterize todas as faces e arestas não dominadas à custa dos vértices não dominados já conhecidos.

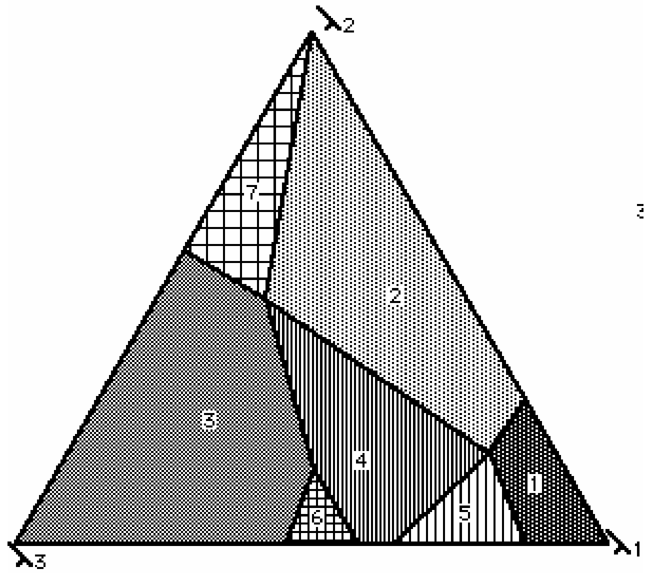
2. Que vértices não dominados é ainda possível alcançar, considerando as limitações nos pesos $\lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_1$.

3. Comente as seguintes afirmações dizendo, justificadamente, se são verdadeiras ou falsas:

(i) Há vértices não dominados do problema com 3 funções objectivo que são dominados em todos os 3 problemas bi-objectivo que é possível considerar (i.e., f_1 e f_2, f_1 e f_3, f_2 e f_3).

(ii) É possível calcular todas estas soluções (vértices) não dominadas usando pelo menos um "peso" nulo na optimização de funções escalares soma ponderada.

(iii) São necessárias pelo menos 3 operações de pivotação para obter a solução que optimiza f_1 a partir do quadro simplex multiobjectivo associado à solução que optimiza f_3.



V - Uma empresa de produção de energia eléctrica é obrigada a assegurar a procura diária:

Período do dia	Procura (GW)
0 h - 6 h	10
6 h - 9 h	30
9 h - 14 h	25
14 h - 19 h	45
19 h - 24 h	25

A empresa dispõe de 3 tipos diferentes de geradores. Cada tipo de gerador deve funcionar entre um nível mínimo e um nível máximo de potência. A cada tipo de gerador está associado um custo por hora de funcionamento ao nível mínimo, e um custo por hora por cada MW a que o gerador opera acima do seu nível mínimo. A entrada em funcionamento de um gerador envolve um custo de arranque.

Gerador	Nº unidades disponíveis	Nível mínimo (MW)	Nível máximo (MW)	Custo/h ao nível mínimo	Custo/h por MW acima do nível mínimo	Custo de arranque
Tipo 1	15	750	2250	1000	2.5	2200
Tipo 2	12	1300	1800	2500	1.5	1200
Tipo 3	8	1750	4200	3000	3.5	750

Para além de satisfazer a procura estimada deve haver em cada momento um número suficiente de geradores em funcionamento para ser possível satisfazer um aumento da carga até 15%. A resposta a este aumento deve ser possível ajustando a produção dos geradores já em operação dentro dos seus limites máximos de funcionamento. A empresa pretende determinar o número de geradores em funcionamento (e quantos devem arrancar) em cada período do dia para minimizar o custo total de operação.

Construa um modelo matemático de programação linear inteira mista para este problema, explicitando o significado das variáveis de decisão, restrições e função objectivo.