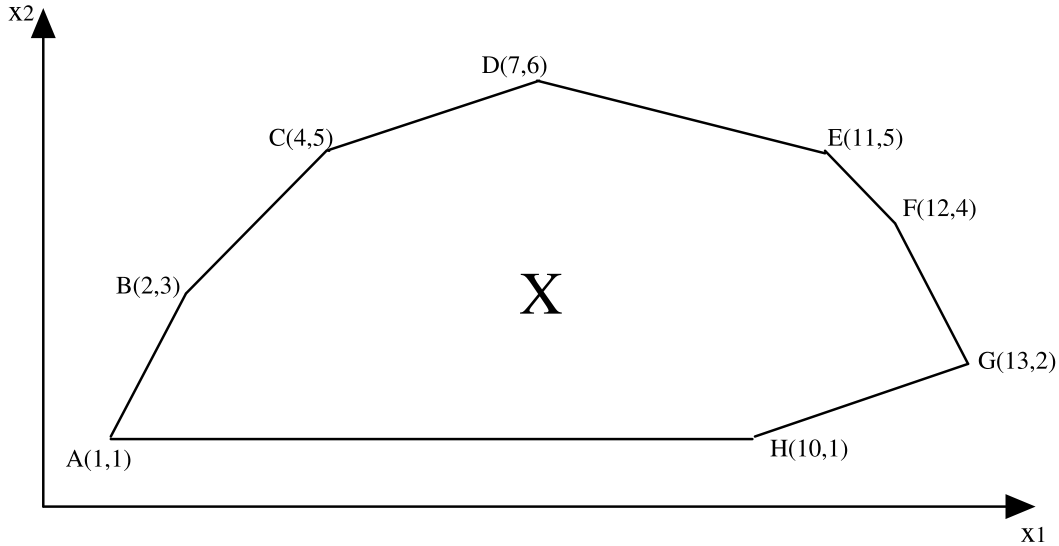
Complementos de Investigação Operacional

Folha nº 2 **Programação Multiobjectivo** **2007/08**

1-



Considere o problema de programação linear com duas funções objectivo:

$$\max f_1(\underline{x}) = x_1$$
$$\max f_2(\underline{x}) = x_2$$
$$\text{s. a} \quad \underline{x} \in X$$

(a) Represente a região admissível no espaço das funções objectivo, identificando a região (estritamente) não dominada e a solução ideal.

(b) Qual a solução não dominada que minimiza a distância (de métrica L_1) à solução ideal ?

(c) Formule o problema a resolver para obter a solução não dominada que minimiza a distância (de métrica L_∞) à solução ideal.

(d) Represente (qualitativamente) a decomposição do espaço dos pesos (incluindo todas as regiões de indiferença).

2- Resolva as alíneas do problema 1., considerando o problema de programação linear com duas funções objectivo:

$$\mathbf{max}\ f_1(\underline{x}) = 2\,x_1 + x_2$$
$$\mathbf{min}\ f_2(\underline{x}) = 2\,x_1 - 2\,x_2$$
$$\text{s. a} \quad \underline{x} \in X$$

Qual a modificação a introduzir na formulação do problema em (c) se o ponto de referência for $\underline{z} = (20,10)$ e não a solução ideal?

3- Considere o problema de programação linear com duas funções objectivo (região admissível do prob. 1):

$$\begin{aligned} &\textbf{max } f_1(\underline{x}) = x_1 + x_2 \\ &\textbf{min } f_2(\underline{x}) = \quad 4\, x_2 \\ &\text{s. a} \quad \underline{x} \in X \end{aligned}$$

(a) Represente a região admissível no espaço das funções objectivo, identificando as soluções não dominadas (estritamente e fracamente) e a solução ideal.

(b) Formule o problema para calcular a solução não dominada que minimiza a distância de métrica L_1 à solução ideal. Calcule (graficamente) essa solução.

(c) Formule o problema para calcular a solução não dominada que minimiza a distância de métrica L_∞ ao ponto de referência $\underline{z}=(f_1(\underline{x}),f_2(\underline{x}))=(14,20)$.

(d) Formule o problema para calcular a solução inicial pelo método STEM. Indique uma possível solução para esse problema. Formule o problema a resolver na iteração seguinte do STEM se o decisor resolver relaxar $f_2(\underline{x})$ de 4 unidades em relação à solução anterior. Qual a solução óptima deste problema?

(e) Para o problema com três funções objectivo

$$\begin{aligned} &\textbf{max } f_1(\underline{x}) = x_1 + x_2 \\ &\textbf{min } f_2(\underline{x}) = \quad 4\, x_2 \\ &\textbf{max } f_3(\underline{x}) = x_1 \\ &\text{s. a} \quad \underline{x} \in X \end{aligned}$$

represente (qualitativamente) a decomposição do espaço dos pesos (incluindo todas as regiões de indiferença).

4- Considere o problema

$$\text{“Max” } \underline{f}\,(\underline{x}) = [\, f_1\,(x_1,x_2)\,,\, f_2\,(x_1,x_2)\,]$$

$$\begin{aligned} \text{com} \quad & f_1\,(x_1,x_2) = 5\,x_1 - 2\,x_2 \\ & f_2\,(x_1,x_2) = -\,x_1 + 4\,x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a} \quad & -x_1 + x_2 \le 3 \qquad && x_1 + x_2 \le 8 \\ & x_1 \le 6 && x_2 \le 4 \\ & x_1\,,\, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(a) Represente o espaço de decisão e o espaço dos objectivos, assinalando em ambos a região não dominada.

(b) Construa a tabela de óptimos individuais (de “pay-off”) e identifique a solução ideal.

(c) Formule o problema para determinar a solução admissível que minimiza a distância à solução ideal, de acordo com a métrica L_∞.

(d) Qual a solução admissível que minimiza a distância à solução ideal, de acordo com a métrica L_1?

5- Considere o problema

$$\begin{array}{ll}
\max & f_1(x_1,x_2) = -x_1 + 3x_2 \\
\max & f_2(x_1,x_2) = 3x_1 + 3x_2 \\
\max & f_3(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2 \\
\text{s. a} & x_2 \le 4 \\
& x_1 + 2x_2 \le 10 \\
& 2x_1 + x_2 \le 10 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{array}$$

(a) Represente o espaço de decisão e os gradientes das funções objectivo.

(b) Determine as regiões de indiferença no espaço dos pesos correspondentes às soluções não dominadas que optimizam cada uma das funções objectivo individualmente.

(c) Construa a tabela de óptimos individuais (de "pay-off") e identifique a solução ideal.

6- Considere o problema

$$\begin{array}{lll}
\max & f_1(\underline{x}) = -x_1 + 4x_2 & \\
\max & f_2(\underline{x}) = 3x_1 - x_2 & \\
\text{s. a} & -x_1 + x_2 \le 6 & x_1 + x_2 \le 10 \\
& x_1 \le 8 & x_2 \le 7 \\
& x_1, x_2 \ge 0 &
\end{array}$$

(a) Represente o espaço de decisão e o espaço dos objectivos, assinalando em ambos a região não dominada.

(b) Construa a tabela de óptimos individuais (de "pay-off") e identifique a solução ideal.

(c) Formule o problema para determinar a primeira solução de compromisso, de acordo com o método STEM.

(d) Se a solução do problema em (c) for $(x_1,x_2)=(5.46,4.54)$ formule o problema para achar a segunda solução gerada pelo STEM, se o decisor resolver relaxar f_1 de 2. Ilustre graficamente a redução da região admissível no espaço de decisão e no espaço dos objectivos. Qual é a solução apresentada pelo STEM ?

7- Numa fábrica existem 2 tipos de máquinas, integradas nas linhas de produção de 4 produtos. As capacidades disponíveis de cada tipo de máquina (expressas em máquina. horas/semana) e o número de horas/semana requeridos em cada máquina por cada um dos 4 produtos são dados na tabela :

Tipo de máquina	P1	P2	P3	P4	Disponibilidade
A	2	1	4	3	60
B	3	4	1	2	60

A direcção da empresa está empenhada em maximizar o lucro, a qualidade de produção e o grau de satisfação dos trabalhadores. Estudos recentes permitiram estabelecer os coeficientes por unidade de cada produto destes objectivos:

	P1	P2	P3	P4
Lucro	3	1	2	1
Qualidade	1	-1	2	4
Satisfação laboral	-1	5	1	2

(a) Formule o problema como um de programação linear multiobjectivo.

(b) Calcule a região de indiferença correspondente à solução não dominada que optimiza o lucro.

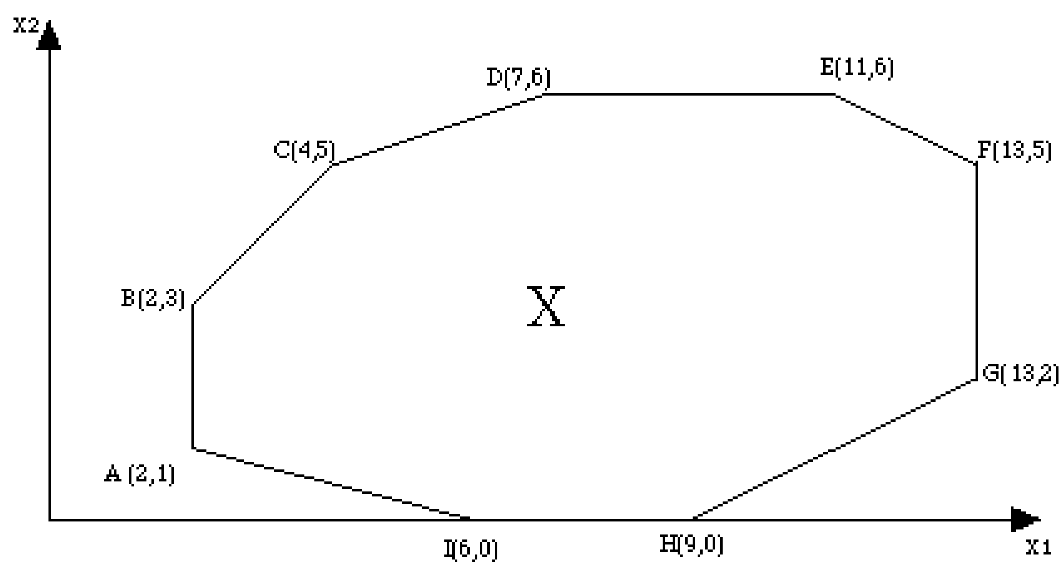
(c) Para esta solução quais são as variáveis não básicas eficientes ?

(d) Alguma das soluções não dominadas que se obtêm introduzindo na base estas variáveis é óptima em relação à qualidade ou à satisfação laboral?

(e) Formule o problema para obter a solução não dominada inicial pelo método STEM.

(f) Se a solução obtida resolvendo este problema for $(f_1(\underline{x}),f_2(\underline{x}),f_3(\underline{x}))=(35.234,55.754,45.537)$ formule o problema a resolver na iteração seguinte do STEM se o decisor resolver relaxar $f_2(\underline{x})$ de 10 ?

8-



Considere o problema de programação linear com duas funções objectivo:

$$\mathbf{min}\ z_1(\underline{x}) = x_1 - x_2$$
$$\mathbf{max}\ z_2(\underline{x}) = x_1$$
$$\text{s. a} \quad \underline{x} \in X$$

(a) Represente a região admissível no espaço das funções objectivo, identificando a região não dominada (estrita e fracamente) e a solução ideal.

(b) Formule o problema para calcular a solução não dominada que minimiza a distância de métrica L_1 à solução ideal. Calcule (graficamente) essa solução.

(c) Formule o problema a resolver para obter a solução não dominada que minimiza a distância (de métrica L_∞) ao ponto de referência $\underline{z} = (z_1,z_2)=(5,8)$.

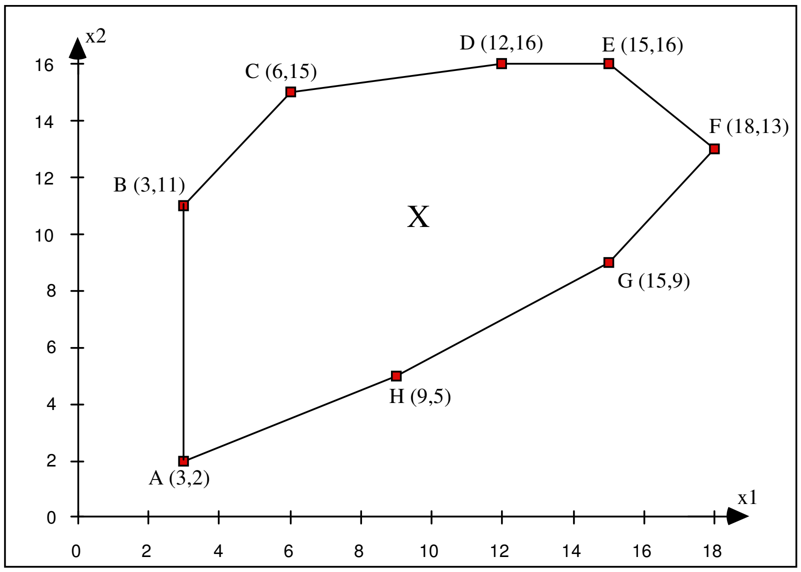
(d) Represente (qualitativamente) a decomposição do espaço dos pesos (incluindo todas as regiões de indiferença).

(e) Para o problema com três funções objectivo

$$\mathbf{min}\ z_1(\underline{x}) = x_1 - x_2$$
$$\mathbf{max}\ z_2(\underline{x}) = x_1$$
$$\mathbf{max}\ z_3(\underline{x}) = -x_1 + 3x_2$$
$$\text{s. a} \quad \underline{x} \in X$$

represente (qualitativamente) a decomposição do espaço dos pesos (incluindo todas as regiões de indiferença).

9 -



Considere o problema de programação linear com duas funções objectivo:

$$\mathbf{min}\ f_1(\underline{x}) = x_1$$
$$\mathbf{max}\ f_2(\underline{x}) = x_2$$
$$\text{s. a} \quad \underline{x} \in X$$

(a) Identifique as soluções não dominadas (estritamente e fracamente) e a solução ideal.

(b) Considere o problema escalar

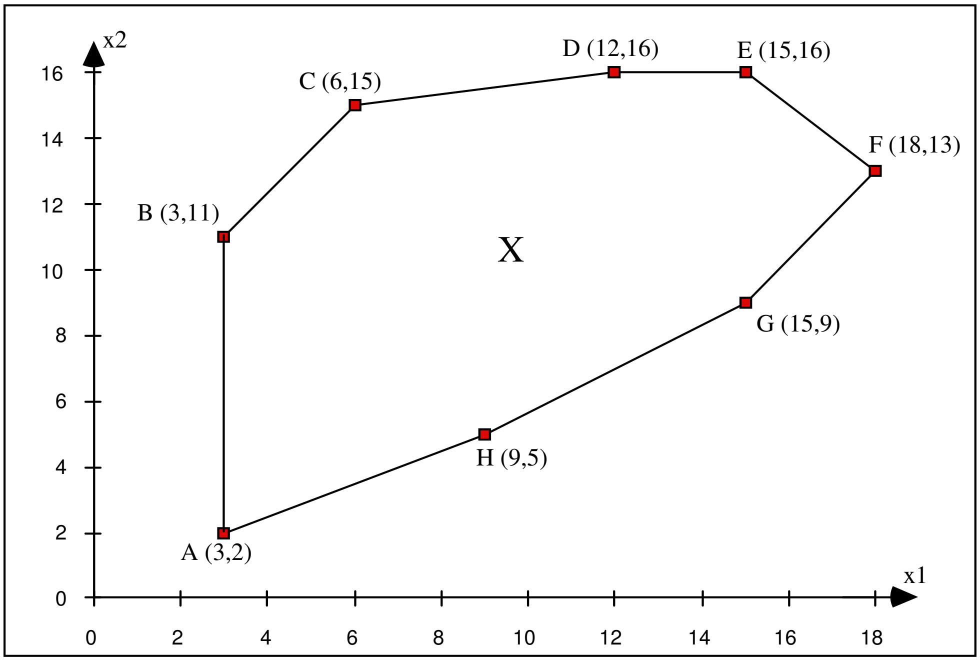
$$\begin{aligned} &\min \quad t \\ &\text{s. a} \quad x_1 - t \le 6 \\ &\qquad\ \ x_2 + t \ge 15 \\ &\qquad\ \ t \ge 0\ ,\ \underline{x} \in X \end{aligned}$$

i) A que se destina este problema auxiliar ? Qual a respectiva solução óptima ?

ii) Esta solução é não dominada do problema multiobjectivo ? Em caso negativo que modificações deve efectuar no problema escalar para garantir que a respectiva solução óptima seja não dominada do problema multiobjectivo ?

(c) Formule o problema para calcular a solução inicial pelo método STEM. Indique uma possível solução para esse problema. Formule o problema a resolver na iteração seguinte do STEM se o decisor resolver relaxar $f_1(\underline{x})$ de 2 unidades em relação à solução anterior. Qual a solução óptima deste problema?

10-



Considere o problema de programação linear com duas funções objectivo:

$$\begin{aligned} &\textbf{min } z_1 = 4\,x_1 - 3\,x_2 \\ &\textbf{max } z_2 = x_1 + x_2 \\ &\text{s. a } \quad \underline{x} \in X \end{aligned}$$

(a) Represente a região admissível no espaço das funções objectivo, identificando a região não dominada (estrita e fracamente) e a solução ideal.

(b) Represente (qualitativamente) a decomposição do espaço dos pesos (incluindo todas as regiões de indiferença).

(c) Formule o problema a resolver na iteração inicial do método STEM. Indique uma possível solução para este problema que não seja um vértice.

(d) Qual o problema a resolver na iteração seguinte do STEM se o decisor relaxar z_1 de 4? Qual a solução óptima deste problema?

(e) Para o problema com três funções objectivo represente (qualitativamente) a decomposição do espaço dos pesos (incluindo todas as regiões de indiferença):

$$\begin{aligned} &\textbf{min } z_1 = 4\,x_1 - 3\,x_2 \\ &\textbf{max } z_2 = x_1 + x_2 \\ &\textbf{max } z_3 = x_2 \\ &\text{s. a } \quad \underline{x} \in X \end{aligned}$$