Complementos de Investigação Operacional

Folha nº 1 **Programação Inteira** **2006/07**

1- A Eva e o Adão pretendem dividir entre eles as tarefas domésticas (cozinhar, lavar a louça, lavar a roupa, fazer as compras) de modo a que cada um tenha duas tarefas e o tempo total que gastam nestas actividades seja mínimo. O tempo que cada um deles gasta a desempenhar cada tarefa é dado na tabela:

	Horas por semana			
	Compras	Cozinhar	Louça	Roupa
Eva	4.5	7.8	3.6	2.9
Adão	4.9	7.2	4.3	3.1

(a) Formule um modelo de programação inteira binária para este problema.

(b) Resolva o problema usando o método de "branch and bound" para PIB (reduza previamente o modelo a 4 variáveis binárias).

2- Uma companhia está a considerar realizar 7 grandes investimentos. O lucro de longo prazo estimado (VPL) e o capital requerido são dados na tabela:

	Oportunidade de Investimento						
	1	2	3	4	5	6	7
Lucro estimado	17	10	15	19	7	13	9
Capital requerido	43	28	34	48	17	32	23

A empresa dispõe de 100 u.m. para investir. As oportunidades de investimento 1 e 2 são mutuamente exclusivas, bem como as 3 e 4. Para além disso, nem 3 nem 4 podem ser realizadas sem que ou 1 ou 2 também o sejam. Formule um modelo de programação inteira binária, considerando como objectivo seleccionar a combinação de investimentos que maximize o lucro total de longo prazo estimado (VPL).

Determine a solução óptima para o problema, reformulando-o de forma a resolver 7 sub-problemas em 3 variáveis de decisão (que podem apenas assumir certos valores).

3- A secção de I&D de uma empresa desenvolveu 4 possíveis novas linhas de produtos. A direcção da empresa deve agora pronunciar-se sobre quais os produtos a fabricar e em que quantidades, com base num modelo matemático para determinar a combinação mais lucrativa de produtos.

A criação de uma nova linha de produção tem um elevado custo inicial, de acordo com a tabela seg., em que a segunda linha mostra a receita unitária de cada produto:

	Produto			
	1	2	3	4
Custo inicial (x10^6)	50	40	70	60
Lucro unitário	70	60	90	80

A direcção impôs as seguintes restrições relativas aos níveis de produção de cada produto:

i. No máximo só 2 novos produtos podem ser fabricados.

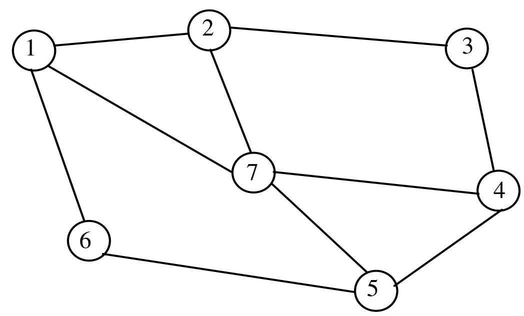
ii. Os produtos 3 ou 4 podem ser produzidos apenas se os produtos 1 ou 2 o forem.

iii. Ou $5 x_1 + 3 x_2 + 6 x_3 + 4 x_4 \leq 6000$ ou $4 x_1 + 6 x_2 + 3 x_3 + 5 x_4 \leq 6000$.

Introduza as variáveis binárias necessárias para formular um modelo de programação inteira mista para este problema.

4 -

A fig. mostra o mapa simplificado de parte de uma cidade, onde os arcos representam ruas e os nodos representam locais de confluência das ruas, onde é possível instalar bocas de incêndio. A administração municipal pretende que cada rua seja servida por pelo menos uma boca de incêndio. O custo de instalar uma boca de incêndio no local j é c_j.



(a) Construa um modelo matemático tendo em vista determinar em que locais devem ser instaladas bocas de incêndio (BI), de modo a minimizar o custo total de instalação desses equipamentos. Explicite o significado das variáveis de decisão, restrições e função objectivo.

(b) Efectue as alterações necessárias no modelo para contemplar as restrições adicionais:

i. Não podem ser instaladas BIs simultaneamente nos locais 5 e 6.

ii. O sub-conjunto de locais 2, 5 e 7 deve albergar pelo menos uma BI.

iii. Só pode ser instalada uma BI no local 1 se também for instalada no local 4.

5- Uma estudante (um pouco vaidosa...) vai passar um mês numa universidade estrangeira. Para além de objectos de natureza pessoal e profissional, é necessário decidir que peças de vestuário levar. A estudante verificou que apenas lhe restam 6 Kg disponíveis na mala para o vestuário. Após uma selecção preliminar, a estudante está indecisa entre as seguintes peças:

	Saias			Calças			Blusas				Vestidos		
peça	1	2	3	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3
peso (g)	500	400	700	600	500	500	400	300	300	400	600	700	800

A estudante já decidiu que:

- levará pelo menos um vestido;
- se levar a saia 1 então levará também a blusa 2, dado que combinam bem;
- não levará a blusa 4 se levar as blusas 1 e 2.

A estudante pretende maximizar o número de apresentações diferentes com que pode aparecer em público. Um vestido constitui por si uma apresentação. As outras apresentações possíveis resultam da combinação de uma blusa e de uma saia ou umas calças.

(a) Defina as variáveis de decisão (binárias) principais de um modelo matemático para auxiliar a estudante a decidir que peças levar, tendo em vista maximizar o número de apresentações diferentes

(b) Formule as 4 restrições funcionais do problema.

(c) Os seus requisitos de elegância da estudante apenas permitem as combinações de peças assinaladas na tabela:

		Blusas			
		1	2	3	4
Saias	1	OK	OK		OK
	2	OK			OK
	3			OK	
Calças	1	OK		OK	
	2		OK		
	3			OK	OK

Formule a função objectivo do problema usando uma expressão quadrática (sob a forma de uma soma de produtos de 2 variáveis).

(d) Reformule a função objectivo sob a forma linear. Para cada produto de 2 variáveis use uma nova variável binária e as restrições auxiliares necessárias.

6- Considere o modelo matemático

min $z = f_1(x_1) + f_2(x_2)$

sujeito às restrições

i. Ou $x_1 \geq 3$ ou $x_2 \geq 3$

ii. Pelo menos uma das desigualdades deve verificar-se

$$2x_1 + x_2 \geq 7$$
$$x_1 + x_2 \geq 5$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 7$$

iii. $|x_1 - x_2| = 0$, ou 3, ou 6.

iv. $x_1, x_2 \geq 0$

com

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 7 + 5x_1 & \text{se } x_1 > 0 \\ 0 & \text{se } x_1 = 0 \end{cases} \qquad f_2(x_2) = \begin{cases} 5 + 6x_2 & \text{se } x_2 > 0 \\ 0 & \text{se } x_2 = 0 \end{cases}$$

Formule este problema como um de programação inteira mista.

7- Uma companhia aérea efectua 5 vôos, dispondo para isso de 6 tripulações. A tabela seg. mostra quais os vôos que cada tripulação pode realizar bem como o custo de fazer voar essa tripulação.

Tripulação	A	B	C	D	E	F
Pode fazer o vôo	1,2	1,3,4	2,4,5	1,3,5	4,5	1,5
Custo	2	3	3	3	2	2

Formule um modelo de programação inteira binária para o problema de cobrir todos os vôos com as tripulações disponíveis de modo a minimizar o custo total.

(a) As tripulações podem viajar como passageiros.

(b) Em cada avião deve haver apenas uma tripulação.

8- Considere os problemas de PI

8.1. max $z = 5\,x_1 + x_2$

s. a $-x_1 + 2\,x_2 \leq 4$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$4\,x_1 + x_2 \leq 12$

$x_1\,,\ x_2 \geq 0$ e inteiros.

8.2. max $z = 220\,x_1 + 80\,x_2$

s. a $-x_1 + 2\,x_2 \leq 4$

$5\,x_1 + 2\,x_2 \leq 16$

$2\,x_1 - x_2 \leq 4$

$x_1,\ x_2 \geq 0$ e inteiros.

(a) Resolver o problema graficamente.

(b) Resolver graficamente o problema relaxado.

i. Arredondar esta solução para a solução inteira mais próxima e verificar se esta é admissível.

ii. Enumerar todas as soluções arredondadas, verificar a respectiva admissibilidade e calcular z para as que são admissíveis.

iii. Alguma destas soluções admissíveis obtidas por arredondamento é óptima do problema de PI ?

(c) Resolver o problema usando o algoritmo "branch and bound". Para cada subproblema resolver graficamente o problema PL-relaxado.

9- Usando o algoritmo de aditivo (de Balas) resolva o problema de PIB:

min $z = 5\,x_1 + 6\,x_2 + 7\,x_3 + 8\,x_4 + 9\,x_5$

s. a $3\,x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2\,x_5 \geq 2$

$x_1 + 3\,x_2 - x_3 - 2\,x_4 + x_5 \geq 0$

$-x_1 - x_2 + 3\,x_3 + x_4 + x_5 \geq 1$

x_j binária; j=1,...,5

10- Um campista pretende escolher entre 9 objectos para carregar a mochila, cuja capacidade máxima é 35 unidades de peso. O peso de cada objecto e o valor que o campista atribui a cada um são dados na tabela:

Objecto	Peso	Valor
1	3	21
2	4	24
3	3	12
4	21	168
5	15	135
6	13	26
7	16	192
8	20	200
9	40	800

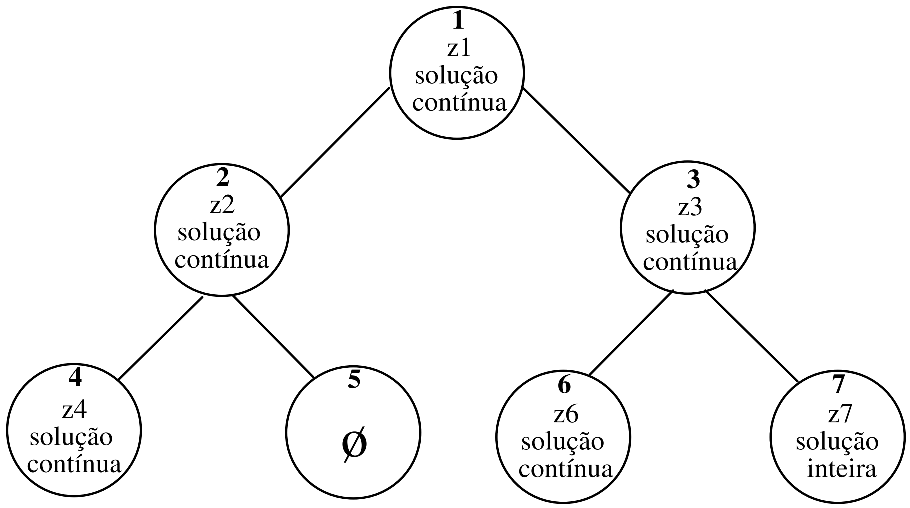
Quais os objectos com que o campista deve carregar a mochila, de modo a maximizar o valor total dos objectos transportados?

11- A fig. mostra a árvore binária de sub-problemas em determinada fase da resolução de um problema de programação inteira pura (PLI) pelo algoritmo "branch and bound".

Para os seguintes casos, expressos em termos das relações entre os valores da função objectivo para a solução dos sub-problemas correspondentes aos nodos 4, 6 e 7, indique

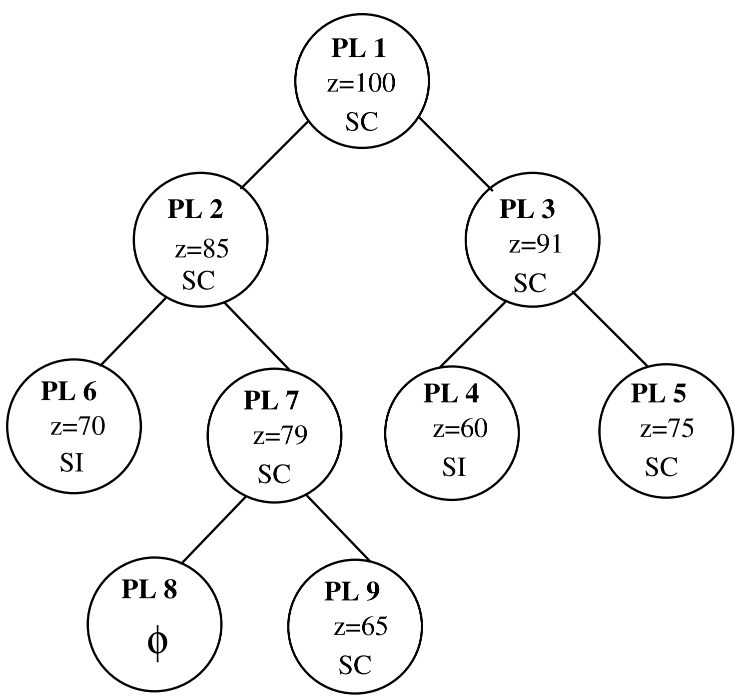
- se já é conhecida a solução óptima para o PLI;
- quais os nodos em que já não há ramificação ("fathomed");
- quais os nodos em que seria feita a próxima ramificação (escolhendo o que tiver o melhor valor para a função objectivo no sub-problema correspondente).

(a) $z_7 > z_6 > z_4$
(b) $z_4 > z_7 > z_6$
(c) $z_6 > z_4 > z_7$



Ø indica região admissível vazia para o sub-problema correspondente a esse nodo.

12- A fig. mostra a árvore binária de sub-problemas em determinada fase da resolução de um problema de programação inteira pura pelo algoritmo "branch and bound".



ϕ indica região admissível vazia para o sub-problema correspondente a esse nodo.

SC e SI indicam solução contínua (existe pelo menos uma variável não inteira) e solução inteira (todas as variáveis têm valores inteiros), respectivamente.

(a) Qual é o melhor limite superior para o máximo valor de z para o PLI nesta altura ?

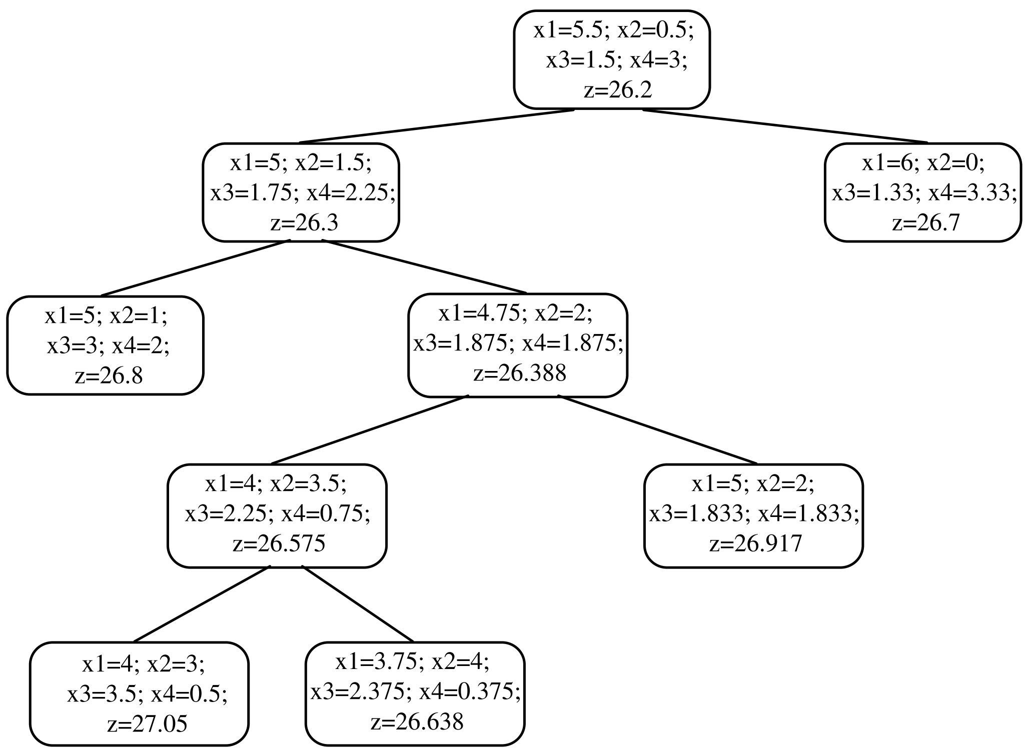
(b) Qual é o melhor limite inferior para o máximo valor de z ?

(c) Quais os nodos em que já não há ramificação ("fathomed") ?

(d) Quais os nodos em que ainda é possível haver ramificação ?

(e) Já foi alcançada uma solução óptima para o PLI ? Em caso negativo qual o nodo a partir do qual será efectuada a próxima ramificação ?

13- A fig. mostra a árvore binária de sub-problemas em determinada fase da resolução de um problema de programação inteira pura pelo algoritmo "branch and bound". O critério de escolha da variável de ramificação é a sequência ascendente do índice das variáveis. O critério de escolha do sub-problema a ramificar é o melhor limite até ao momento.



(a) Numere os sub-problemas (nodos) de acordo com a respectiva ordem de criação.

(b) Quais as restrições adicionais correspondentes a cada ramo da árvore ?

(c) Quais os nodos que podem ser desprezados ("fathomed") ?

(d) Quais os valores de z_{inf} e z_{sup} entre os quais se situa o valor óptimo da função objectivo ($z_{inf} \leq z_{opt} \leq z_{sup}$) ?

(e) Na situação actual é já conhecida a solução óptima ? Em caso negativo, quais as ramificações que seria ainda possível efectuar e qual seria a primeira a ser realizada ?

14. Uma aplicação computacional que implementa o algoritmo "branch and bound" forneceu a seguinte lista de soluções (por esta ordem, antes de ser interrompida) para um problema de programação inteira pura. O critério de escolha da variável de ramificação é a sequência ascendente do índice das variáveis.

(a) Construa a árvore binária de sub-problemas associada a esta lista de soluções, incluindo as restrições correspondentes a cada ramo.

(b) Indique se se trata de um problema de maximização ou de minimização.

(c) Quais os nodos que podem ser desprezados ("fathomed")?

(d) Quais os valores de z_{inf} e z_{sup} entre os quais se situa o valor óptimo da função objectivo ($z_{inf} \leq z_{opt} \leq z_{sup}$) ?

(e) Na situação actual é já conhecida a solução óptima ? Em caso negativo, qual a próxima ramificação a ser realizada ?

solução	x1	x2	x3	x4	x5	z
1	1.9	0.2	4.6	0	0.5	46.09
2	2	0.2	4.4	0	0.6	46.14
3	2	1	3.5	0	1	47.6
4	2	1	4	0	0.6	48.38
5	2	1	4	0	1	50.7
6	2	1	4.75	0	0	49.55
7	2	1	5	0	0	51.1
8	3	1	4	0	0	52
9	2.25	1	3	0	1.25	47.725
10	3	1	1.5	0	2	48.1
11	3	1	2	0	1.6	48.88
12	3	1	2	0	2	51.2

15- Modele a região admissível não convexa da fig. através de restrições simultâneas, incluindo as variáveis binárias necessárias.