

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA E COMPUTADORES  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

**ESTIMAÇÃO DE MOVIMENTO EM  
SEQUÊNCIAS DE IMAGENS  
ESTÉREO**

**- COMPARAÇÃO DE DOIS MÉTODOS -**

**NUNO MIGUEL MENDONÇA DA SILVA GONÇALVES**

COIMBRA  
FEVEREIRO DE 2002

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA  
PARA A SATISFAÇÃO PARCIAL DOS REQUISITOS CONDUCENTES AO GRAU  
DE MESTRE

TESE EFECTUADA SOB A ORIENTAÇÃO DO  
PROFESSOR DOUTOR HELDER DE JESUS ARAÚJO  
PROFESSOR ASSOCIADO DO DEEC/FCTUC

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, ao Prof. Helder Araújo, a ajuda e orientação que permitiram a realização deste trabalho. E, ainda, na busca activa da exactidão e rigor da linguagem.

Aos colegas Eng. António Paulino e Eng. Carlos Queiroz, pela ajuda preciosa na solução de problemas logísticos e não logísticos.

Ao Departamento de Engenharia Electrotécnica e Computadores e ao Instituto de Sistemas de Robótica - Pólo de Coimbra, que permitiram a realização deste trabalho e da dissertação.

Aos amigos e familiares, no apoio sempre demonstrado.

*A tutti quanti*



# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação e Contribuição . . . . .	8
1.2 Organização da dissertação . . . . .	9
<b>I MODELOS</b>	<b>11</b>
<b>2 Definição do problema</b>	<b>13</b>
<b>3 Aproximação Diferencial</b>	<b>19</b>
3.1 Velocidade 3D na direcção de $Z$ . . . . .	19
3.1.1 Restrição de profundidade - DCCE - [6] . . . . .	20
3.1.2 Restrição do fluxo óptico binocular - DV - [32] . . . . .	21
3.2 Velocidade 3D total - Parâmetros do movimento . . . . .	23
3.2.1 Restrição de profundidade . . . . .	23
3.2.2 Restrição do fluxo óptico binocular . . . . .	25
<b>4 Aproximação Discreta</b>	<b>27</b>
4.1 Velocidade 3D na direcção de $Z$ . . . . .	29

4.1.1	Restrição de profundidade - DCCE . . . . .	29
4.1.2	Restrição do fluxo óptico binocular - DV . . . . .	30
4.2	Velocidade 3D total - $\vec{\phi}$ . . . . .	31

## II ESTIMADORES E PROPAGAÇÃO DA INCERTEZA

### 37

<b>5</b>	<b>Estimadores de Regressão Linear Múltipla</b>	<b>39</b>
5.1	<i>Least Squares</i> . . . . .	40
5.2	<i>Least Median of Squares</i> . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Propagação da incerteza</b>	<b>45</b>
6.1	Restrição de Profundidade - aproximação diferencial . . . . .	46
6.2	Restrição do fluxo óptico binocular - aproximação diferencial . . . . .	47
6.3	Restrição de profundidade - aproximação discreta . . . . .	49
6.4	Restrição do fluxo óptico binocular - aproximação discreta . . . . .	50
6.5	Efeito da resolução na disparidade . . . . .	51
6.6	Incerteza na regressão linear múltipla . . . . .	58

## III EXPERIÊNCIAS E RESULTADOS

### 61

<b>7</b>	<b>Condições Experimentais</b>	<b>63</b>
7.1	Imagens sintéticas . . . . .	63
7.2	Imagens reais . . . . .	65
7.3	Algoritmos auxiliares . . . . .	67
7.4	Considerações acerca do valor verdadeiro de $V_Z$ - <i>ground truth</i> . . . . .	68
<b>8</b>	<b>Sequências sintéticas</b>	<b>71</b>
8.1	Parâmetros das imagens sintéticas . . . . .	72

8.2	Método . . . . .	72
8.3	Apresentação dos resultados . . . . .	74
8.4	Aproximação diferencial . . . . .	78
8.5	Aproximação discreta . . . . .	91
8.6	Diferencial <i>versus</i> Discreta . . . . .	107
<b>9</b>	<b>Sequências Reais</b>	<b>123</b>
9.1	Parâmetros das imagens reais . . . . .	123
9.2	Apresentação dos resultados . . . . .	124
9.3	Aproximação Diferencial . . . . .	127
9.4	Aproximação Discreta . . . . .	136
9.5	Diferencial <i>versus</i> discreta . . . . .	144
<b>IV</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>153</b>
<b>10</b>	<b>Conclusões</b>	<b>155</b>
<b>V</b>	<b>APÊNDICE</b>	<b>163</b>
<b>A</b>	<b>Sequências Sintéticas</b>	<b>165</b>
A.1	Aproximação diferencial . . . . .	166
A.2	Aproximação discreta . . . . .	192
<b>B</b>	<b>Sequências Reais</b>	<b>223</b>
B.1	Aproximação diferencial - $V_Z$ . . . . .	224
B.2	Aproximação diferencial - $\vec{\phi}$ . . . . .	237
B.3	Aproximação discreta - $V_Z$ . . . . .	250
B.4	Aproximação discreta - $\vec{\phi}$ . . . . .	263





# Resumo

O trabalho que é descrito nesta dissertação de mestrado prende-se com a estimação do movimento em sequências de imagens estéreo. São comparados, ao nível da precisão, dois métodos de estimação da terceira componente (na direcção do eixo óptico) da velocidade 3D dos pontos da cena ( $V_Z$ ) e de estimação dos seis parâmetros do movimento ( $\vec{\phi}$  - três velocidades de translação e três velocidades de rotação). Um dos métodos designa-se por método da restrição de profundidade (DCCE) e usa a profundidade e as suas derivadas espaciais e temporais (obtidas a partir de mapas de disparidade). O segundo método, o método da restrição do fluxo binocular (DV), usa a fluxo óptico diferencial (do par estéreo), na direcção  $x$  da imagem, bem como a profundidade, para recuperar  $V_Z$ .

Ambos os métodos são analisados em duas aproximações: as aproximações diferencial (versão original) e discreta. A primeira usa o fluxo óptico diferencial e a segunda usa correspondência entre pontos de interesse.

Um conjunto de testes, usando sequências de imagens sintéticas e reais, com mapas de baixa resolução, permitiu comparar os métodos DCCE e DV entre si, em qualquer das aproximações, e comparar as aproximações entre si.

São, ainda, estudados os efeitos na qualidade de estimação de  $V_Z$  e  $\vec{\phi}$  de alguns parâmetros dos métodos, como por exemplo, em função da amplitude das velocidades, em função da resolução do mapa de disparidade e em função do ruído aleatório adicionado à disparidade e às velocidades. Estes estudos, complementados com as equações de propagação da incerteza nos métodos, permitem identificar os factores críticos de cada um e quantificar a incerteza na estimação de  $V_Z$  e  $\vec{\phi}$ .



# Abstract

The study described in this master's dissertation is the analysis of the problem of motion estimation from a sequence of stereo images. Two methods for the computation of the third component (in the  $Z$  direction) of the 3D velocity of scene points ( $V_Z$ ) and for the computation of the six motion parameters ( $\vec{\phi}$  - three translational velocities and three rotational velocities) are compared in terms of accuracy. One of the methods, called depth change constraint equation (DCCE) uses range data and its spatial and temporal derivatives (obtained by disparity maps). The second one, the binocular flow method (DV) uses the differential velocities in the  $x$  image coordinate in the stereo pair and the range data to estimate  $V_Z$ .

Both methods are analysed in their two approaches: the differential approach (original version) and the discrete one. The first approach uses differential optical flow whereas the second one uses feature correspondences.

The methods were extensively tested using synthetic images as well as real images with low resolution. These tests allowed to compare the methods DCCE and DV with each other, in both approaches, and to compare the differential approach with the discrete one.

Several sensibility analyses in the estimation of  $V_Z$  and  $\vec{\phi}$  are also done for both methods. For instance, the accuracy was measured when varying the amplitude of the velocities, the resolution of disparity maps, the random noise added to the disparity and velocity data. Those studies are complemented with the uncertainty propagation equations in the methods and allow to identify the critical factors of each one.



# Capítulo 1

## Introdução

Nas últimas duas ou três décadas, muito trabalho tem sido desenvolvido em visão por computador, em geral. Em particular, na área da estimação do movimento, surgiram inúmeros modelos teóricos para a sua estimação e, gradualmente, têm sido usados em aplicações industriais e robóticas.

A estimação do movimento 3D é um dos problemas investigados actualmente no domínio da visão computacional. Está intimamente ligado ao problema da reconstrução 3D. Esta interdependência pode encontrar-se na forma *structure from motion*, quando a reconstrução 3D se faz com os parâmetros do movimento estimados, *motion from structure* quando o movimento 3D se reconstrói a partir da informação 3D ou o caso em que ambos são reconstruídos simultaneamente. As suas aplicações são inúmeras e entre elas contam-se a própria reconstrução 3D, vigilância, seguimento de alvos, detecção e contorno de obstáculos, determinação da posição de objectos, reconhecimentos de gestos e faces e muitas outras. A aproximação teórica ao problema tem inúmeras vertentes, podendo-se repartir em vários subproblemas.

Em primeiro lugar podemos distinguir os casos em que o movimento é rígido, isto é, considera-se que todos os pontos do mundo ou de uma região se movem rigidamente uns em relação aos outros, e o caso do movimento não rígido em que

admitimos movimentos independentes de pontos e/ou regiões da imagem. O problema do movimento rígido pode designar-se na maioria dos casos por estimação do *egomotion* ou do *self-motion*, uma vez que podemos considerar que todos os pontos da cena se movem em relação à câmara estática ou, por outro lado, que a câmara se move num mundo estático. Neste caso, queremos recuperar os parâmetros do movimento da câmara.

O caso que nos interessa é o caso do movimento rígido. Este problema é conhecido por ser um problema de regressão altamente instável. Para a sua solução têm sido usadas inúmeras técnicas que podem, numa primeira aproximação, ser divididas em três classes: os métodos discretos, os métodos diferenciais e os métodos directos. Todas estas técnicas utilizam uma sequência de imagens tiradas ao longo do tempo. Os métodos discretos têm esta designação, devido ao facto de utilizarem um conjunto de pontos de interesse (designados em literatura inglesa por *features*) e por partirem das suas correspondências temporais para o cálculo dos parâmetros do movimento. Por outro lado, os métodos diferenciais e os métodos directos utilizam as velocidades induzidas nas imagens pelo movimento 3D. A distinção entre os métodos diferenciais e os métodos directos reside no facto de os primeiros utilizarem o fluxo óptico diferencial, ao passo que os segundos recuperam o movimento a partir das derivadas temporais e espaciais de campos escalares, nomeadamente as imagens de intensidade ou de profundidade, sem calcularem o fluxo óptico.

Cada uma das classes de métodos apresenta vantagens e desvantagens quanto à obtenção dos dados necessários. Os métodos discretos requerem que seja tratado o conhecido problema da correspondência, de difícil resolução no caso geral e que, por isso, motiva um vasto campo de investigação. Os pontos de interesse mais usados nestes algoritmos são cantos, linhas e contornos. Estes métodos ajustam-se melhor do que os métodos diferenciais e directos a sequências de imagens nas quais o movimento/deslocamento entre imagens sucessivas é elevado. Contudo, no caso

---

em que o movimento/deslocamento entre duas imagens é reduzido, existem sérios problemas de triangulação nos métodos discretos.

Por outro lado, os métodos diferenciais baseiam-se no cálculo do fluxo óptico que, como é bem sabido, só se consegue estimar com razoável precisão, quando a disparidade entre duas imagens consecutivas é pequena (não mais do que alguns píxeis na imagem). Assumem na maioria dos casos que a intensidade na imagem de um ponto 3D não varia ao longo do tempo. O mesmo se pode afirmar para os métodos directos. Na generalidade dos casos, os métodos diferenciais e directos são muito sensíveis ao ruído e numericamente instáveis, quando os gradientes usados são pequenos.

A maioria dos algoritmos existentes para a recuperação do movimento utiliza modelos monoculares. Existem, no entanto, inúmeras implementações de modelos estéreo, evidenciando as vantagens destes ao nível da recuperação da informação de profundidade, em relação aos modelos monoculares.

Estamos particularmente interessados nas implementações que usam estereovisão. Iremos, de seguida, resumir os diversos métodos que têm sido propostos para recuperar o movimento 3D de um ou mais objectos e que tiram partido da visão estéreo.

Começando pelos métodos discretos, Roach e Aggarwal [24] demonstraram, partindo do modelo de projecção em perspectiva, que apenas duas vistas são suficientes para recuperar o movimento de uma câmara, a partir da correspondência de pontos. Huang e Blostein [8], aplicando uma técnica iterativa pelos mínimos quadrados, recuperaram os parâmetros de movimento a partir de correspondências de pontos em imagens, tiradas em instantes diferentes. Kim e Aggarwal [13] usaram mapas de profundidade para fazer a correspondência de *features* e usaram a correspondência de pares de linhas para recuperar os parâmetros do movimento. Weng, Huang e Ahuja [35] usaram um modelo da constância local do momento angular para o mesmo objectivo. Matthies e Shafer [17] usaram a relação entre a estrutura 3D em

instantes de tempo diferentes, desenvolvendo os modelos de propagação da incerteza na determinação da estrutura 3D e dos parâmetros do movimento, a partir de correspondências estéreo. Outro trabalho de referência foi desenvolvido por Young e Chellappa [37] que usaram um modelo cinemático para aproximar os parâmetros de movimento 3D. Usaram novamente correspondência de imagem para imagem. Lee e Kay [15] partiram das correspondências entre as imagens estéreo e destas no tempo, para recuperar a orientação de um objecto no espaço. Zhang e Faugeras [38, 39] usaram a correspondência entre linhas 3D para recuperar, através de um processo iterativo (filtro de Kalman), os parâmetros do movimento 3D. Kanatani [10] e Kanatani e Takeda [11] constroem a matriz essencial e decompõem-na nos parâmetros do movimento usando renormalização. Mais recentemente, Demirdjian e Horaud [5] utilizam o formalismo da geometria projectiva para dividir os pontos da imagem em pontos estáticos e pontos dinâmicos, retirando simultaneamente os parâmetros do *egomotion*, que podem posteriormente ser usados para identificar e recuperar os parâmetros de múltiplos movimentos 3D.

Quanto aos métodos diferenciais e directos, como na sua natureza não diferem uns dos outros, mencionaremos os mais importantes, indistintamente. Richards [23] propõe a utilização do fluxo binocular (diferença entre o fluxo óptico induzido pelo mesmo ponto 3D nas câmaras esquerda e direita) e da disparidade para calcular os parâmetros do movimento 3D, num modelo de projecção ortográfica. Este método vem a ser proposto também por Waxman e Duncan [32] para um modelo de projecção em perspectiva, notando a importância da razão entre a taxa de variação da disparidade e a disparidade como meio de estabelecer correspondências estéreo. Waxman e Sinha [33] propõem um outro método que utiliza estéreo dinâmico, ou seja, duas imagens retiradas pela mesma câmara em instantes de tempo diferentes, para recuperar os parâmetros do movimento 3D e a profundidade, a partir do fluxo na imagem. Esta proposta é válida para os casos em que as duas imagens são adquiri-



---

das em instantes de tempo muito próximos. Sudhakar et al. [30] e mais tarde Shieh, Zhuang e Sudhakar [28] propuseram um método directo baseado nas derivadas das imagens de intensidade para a estimação dos parâmetros do movimento, usando sequências de imagens estéreo longas. Wang e Duncan [31] estendem estes conceitos para a recuperação dos parâmetros de vários movimentos 3D independentes. Stein e Shashua [29] usam outro método diferencial para estimar os parâmetros do movimento 3D e recuperar a estrutura 3D, baseado no fluxo óptico. Harville e al. [6] usaram uma restrição de intensidade nas imagens, bem como uma restrição de profundidade para recuperar os parâmetros do movimento 3D, mostrando que, geralmente, a restrição de profundidade dá resultados mais precisos do que a restrição de intensidade das imagens por ser menos sensível aos problemas de iluminação. Os mapas de profundidade eram conhecidos à partida. Mais recentemente, Molton e Brady [20] apresentaram uma técnica que tenta retirar a maior quantidade possível de informação do paradigma estéreo-movimento, usando várias combinações de pares estéreo estático (câmaras esquerda e direita) e estéreo dinâmico (câmaras em tempos diferentes). Este método recupera o movimento e a estrutura 3D do mundo. Outros trabalhos usando visão estéreo em métodos directos e diferenciais são: [2, 9, 12, 16, 18, 19, 34, 36].

O sistema de visão mais complexo existente e, porventura o mais perfeito em algumas características, é, sem dúvida, o sistema de visão animal, e em particular o sistema visual humano. Investigações em fisiologia da percepção, nas últimas três décadas, (Berthoz [4]) revelaram que a intensidade da sensação do movimento do próprio corpo induzida pelo estímulo visual depende de vários factores. O primeiro factor apontado é a superfície, isto é, quanto maior for a superfície do campo visual em movimento, maior é a intensidade da sensação. Contudo, um pequeno estímulo, e por vezes um único ponto de luz, é suficiente para obter a mesma sensação, mas com menor intensidade. Outra variável importante é a velocidade dos pontos da cena em movimento. Abaixo de um dado limiar de velocidade, não é detectado pelo

cérebro nenhum movimento do próprio corpo, mas acima desse limiar, a intensidade da sensação do próprio movimento aumenta com a velocidade até um limite em que a própria sensação desaparece abruptamente. A frequência espacial da cena (número de elementos distintos por unidade de superfície) também influencia a sensação do próprio movimento. Quando o estímulo visual não é muito intenso, de noite, por exemplo, estímulos diferentes em ambos os olhos podem provocar uma sensação errônea do movimento. O último factor apontado por Berthoz [4] como exercendo influência na intensidade da sensação do próprio movimento é a distância dos objectos da cena em movimento, em relação aos olhos. A intensidade e a direcção da sensação do próprio movimento são determinados pela parte mais distante do ambiente.

A visão não é, no entanto, o único sistema sensorial usado na percepção do movimento. O sistema vestibular, constituído por três canais semicirculares em planos quase perpendiculares (acelerómetros) e dois otolitos, bem como a informação muscular (*proprioceptiva*) fornecem ao cérebro informação que possibilita a criação de modelos de antecipação do movimento. Berthoz [4] afirma que “percepção é acção simulada”. As ilusões do movimento errado surgem quando o modelo de antecipação construído pelo cérebro não coincide com a informação sensorial. O cérebro adapta então o modelo do movimento à informação recebida. Palmer [22] afirma que a informação inercial, produzida pelo sistema vestibular, não está disponível em movimentos de translação não acelerados pelo que, nesta situação, apenas é usada a informação visual para a percepção do próprio movimento. Rock [25] demonstrou que a informação visual é suficiente para a percepção do próprio movimento, sendo, no entanto, habitualmente complementada. Contrariamente a Berthoz, Palmer [22] coloca a tónica na informação visual e não na informação inercial. Segundo Palmer, a direcção do próprio movimento (*ego motion*) é dada pelo padrão do fluxo óptico.

Os mecanismos de percepção do movimento ainda não estão totalmente descobertos. Quer a atenção esteja no centro da imagem ou não, quer os olhos estejam fixos

---

ou não durante o percurso do observador, o cérebro é capaz de estimar com precisão a direcção do movimento. As duas teorias existentes afirmam ambas que a componente de translação, devido à rotação dos olhos, é subtraída numa primeira fase e o padrão do fluxo induzido é então usado para a estimação da direcção. As duas teorias diferem no pressuposto quanto à informação necessária: uma afirma que essa remoção/compensação é efectuada somente no fluxo induzido na retina (não usando qualquer outra informação) e a outra afirma que a informação dos comandos fornecidos ao olho provenientes do sistema proprioceptivo são usados para a complementar.

A determinação da intensidade do próprio movimento não pode ser feita somente com o fluxo induzido na retina, pois é desconhecida a distância absoluta para a qual existe uma indeterminação no factor de escala [22] (cf. secção 10.3.2). A informação da distância absoluta não pode ser obtida sem a introdução de informação adicional (convergência ocular ou distâncias padrão). O cérebro usa como alternativa para a determinação da intensidade do próprio movimento o tempo para contacto (ou tempo para impacto) que é o tempo necessário para que o observador colida com a superfície para a qual olha, sem alterar as condições de movimento.

Os mecanismos usados pela natureza para resolver os problemas práticos no quotidiano e que têm servido para manter a sobrevivência das espécies servem-nos muitas vezes como fonte de inspiração. A robótica imita a natureza e tenta, sempre que o pode, superá-la, construindo melhores sistemas de percepção e actuação. O facto de termos mecanismos diferentes para a percepção do movimento devido à componente de translação e à componente de rotação, pode indiciar, especulando, que mesmo em robótica de tempo-real devam ser percorridos caminhos também diferentes.

## 1.1 Motivação e Contribuição

Torna-se cada vez mais importante comparar, sob diversos aspectos, os métodos e técnicas criados ao longo deste tempo nas diversas áreas da visão computacional. A comparação pode ser feita ao nível do desempenho (velocidade), ao nível da precisão (qualidade das estimativas) e ao nível do custo de implementação.

Neste contexto, a presente dissertação tem como principal objectivo a comparação sob o ponto de vista da precisão de dois métodos para o cálculo do *ego-motion*, isto é, da velocidade de um sistema de câmaras que se desloca no mundo.

Usando um sistema estéreo, de duas câmaras fronto-paralelas, são estimadas duas medidas: a componente na direcção do eixo óptico (eixo  $Z$ ) da velocidade 3D dos pontos da cena e, noutro estudo, a totalidade dos parâmetros do movimento rígido, que envolve seis graus de liberdade (três velocidades de translação e três velocidades de rotação).

Partindo da formulação de ambos os métodos para o cálculo da componente segundo o eixo óptico da velocidade 3D ([6,32]) e da formulação do método proposto em [6] para o cálculo dos parâmetros do movimento, o nosso trabalho alargou a formulação proposta em [32] para o cálculo dos parâmetros do movimento. Todas estas formulações são em tempo contínuo. Ambos os métodos e ambas as medidas são ainda descritas em modelos discretos. Desenvolvemos, também, os modelos de propagação da incerteza para todos os casos.

Um vasto conjunto de experiências e testes foi feito para possibilitar as comparações desejadas: comparar os dois métodos entre si nas suas formulações contínua/diferencial e discreta e comparar a formulação diferencial com a formulação discreta.

As condições em que se realizou a experiência e as técnicas auxiliares usadas têm uma elevada importância no desempenho e na qualidade dos valores estimados, pelo que, o nosso objectivo consiste em analisar os casos em que as câmaras estão

calibradas (contudo, de baixa precisão; são conhecidas apenas a distância focal das câmaras e as dimensões dos píxeis lidos nas especificações), os mapas de disparidade são de baixa resolução, estimados por um software de tempo-real comercial, e o modelo de câmaras é muito simplificado ( projecção em perspectiva com ponto principal no centro da imagem).

A simplicidade dos modelos usados, bem como o pouco cuidado na calibração, justificam-se pelo facto de o objectivo último deste tipo de sensores ser a sua integração em plataformas móveis, que navegam em ambientes mais ou menos estruturados e interagem com esse ambiente. O ambiente usado para a navegação foi um ambiente interior estruturado, sem conhecimento *a priori* da sua organização. Nestas plataformas, a robustez e flexibilidade são factores de extrema importância, pelo que tem interesse testar as metodologias apresentadas sob condições desfavoráveis.

## 1.2 Organização da dissertação

Esta dissertação está organizada em quatro partes. A primeira parte trata dos modelos e integra a definição do problema e notação usada, bem como a descrição da aproximação diferencial ou contínua, em primeiro lugar, dos dois métodos para o cálculo da velocidade 3D na direcção do eixo óptico e depois do cálculo dos seis parâmetros do movimento. Em segundo lugar é descrita a aproximação discreta dos mesmos métodos.

A segunda parte da tese consiste na discussão do problema da regressão linear múltipla, de dois estimadores usados e, ainda, de um estudo estatístico da propagação da incerteza em todos os métodos e da influência da resolução dos mapas de disparidade nestes mesmos métodos.

A terceira parte engloba as experiências e os resultados obtidos. Primeiramente é feita uma descrição das condições experimentais e das experiências e, em seguida,

serão apresentados e discutidos os resultados obtidos, através de estudos comparativos. A comparação será feita ao nível dos dois métodos entre si e, também, entre a aproximação diferencial e a aproximação discreta.

Por último, a quarta parte apresenta as conclusões do trabalho, sendo apresentadas as principais contribuições e uma breve discussão de possibilidades para trabalho futuro.

São, ainda, apresentados em apêndice um conjunto de resultados que, devido à sua extensão e redundância, optámos por retirar do capítulo de apresentação de resultados.

Parte I

**MODELOS**





# Capítulo 2

## Definição do problema

Procederemos, neste capítulo, à definição do problema central desta dissertação, bem como a definição da notação usada ao longo da mesma. O problema abordado no trabalho que origina esta dissertação é o da estimação da velocidade 3D de um sistema de visão que se desloca no mundo ou, fixando o sistema de visão como referencial estático, do mundo em relação àquele, usando para o efeito uma sequência de imagens estéreo ao longo do tempo. Este problema é frequentemente designado por problema do *ego motion*.

Seja  $\vec{P}$  um ponto no espaço tridimensional caracterizado pelas suas coordenadas 3D  $\vec{P} = [X \ Y \ Z]$ . O ponto  $\vec{P}$  move-se livremente (sem restrições) sobre o espaço 3D, com uma velocidade  $\vec{V} = [V_X \ V_Y \ V_Z]$ . Usaremos nesta dissertação o modelo do corpo rígido, isto é, explicaremos o movimento de um corpo no espaço pelo movimento de um único ponto material - que podemos, por simplicidade, considerar o seu centro de massa. Assim, consideramos, segundo este modelo, que todos os pontos de um corpo se movem rigidamente uns em relação aos outros, pelo que é suficiente estudar o movimento em relação a um deles. Como é sabido, qualquer movimento rígido pode ser caracterizado por seis parâmetros - velocidade translacional  $\vec{t}$  (um vector que contém a velocidade de translação do corpo em relação aos três eixos cartesianos) e

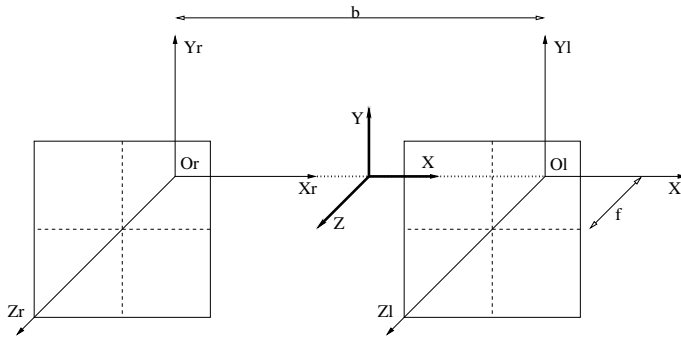


Figura 2.1: Sistema de visão estéreo

velocidade rotacional  $\vec{\Omega}$  (um vector cujas componentes são as velocidades de rotação segundo os mesmos eixos coordenados). Podemos exprimir a velocidade total do ponto  $\vec{P}$  pela seguinte expressão:  $\vec{V} = \vec{t} + \vec{\Omega} \times \vec{P}$ . E, expandindo as componentes do vector  $\vec{V}$ .

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} t_X + \Omega_Y Z - \Omega_Z Y \\ t_Y + \Omega_Z X - \Omega_X Z \\ t_Z + \Omega_X Y - \Omega_Y X \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Um sistema estéreo fronto-paralelo é constituído por um par de câmaras, cujos eixos ópticos são paralelos, tal como é ilustrado na figura 2.1. Existe um sistema de coordenadas associado a cada uma das câmaras (vista), cuja origem é o centro óptico. Um terceiro sistema de coordenadas, designado por ciclopeano, localiza-se a igual distância de cada um dos sistemas de coordenadas associados à câmara esquerda e direita. A distância entre os centros ópticos das duas câmaras é designada por *baseline* ( $b$ ). Um mesmo ponto no espaço tem então coordenadas cartesianas diferentes para cada um dos sistemas coordenados.

O plano imagem, perpendicular ao eixo óptico, está afastado do centro óptico pela distância focal. Um ponto 3D arbitrário projecta-se na imagem, segundo o modelo de projecção em perspectiva, isto é,

$$x = f \frac{X}{Z} \quad y = f \frac{Y}{Z} \quad (2.2)$$

sendo  $x$  e  $y$  as coordenadas do ponto na imagem.

A velocidade de um ponto 3D induzida na imagem, isto é, a projecção do vector velocidade nas imagens é dada por  $\mathbf{v}^l = (v_x^l, v_y^l)$ , na imagem esquerda e  $\mathbf{v}^r = (v_x^r, v_y^r)$ , na imagem direita. Usando o modelo de projecção em perspectiva, obtemos:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} \dot{\left(\frac{X}{Z}\right)} \\ \dot{\left(\frac{Y}{Z}\right)} \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} \frac{\dot{X}}{Z} - X \frac{\dot{Z}}{Z^2} \\ \frac{\dot{Y}}{Z} - Y \frac{\dot{Z}}{Z^2} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Substituindo a equação 2.1 na equação 2.3, obtemos as velocidades na imagem (fluxo na imagem) para o sistema de coordenadas ciclopeano, dado pela equação seguinte:

$$\begin{cases} v_x = \left\{ f \frac{t_x}{Z} - x \frac{t_z}{Z} \right\} + \left\{ -\frac{xy}{f} \Omega_X + \left( f + \frac{x^2}{f} \right) \Omega_Y - y \Omega_Z \right\} \\ v_y = \left\{ f \frac{t_y}{Z} - y \frac{t_z}{Z} \right\} + \left\{ -\left( f + \frac{y^2}{f} \right) \Omega_X + \frac{xy}{f} \Omega_Y - x \Omega_Z \right\} \end{cases} \quad (2.4)$$

Para calcular o fluxo na imagem das câmaras esquerda e direita usamos  $(x_l, y_l)$  e  $(x_r, y_r)$ , em substituição de  $(x, y)$  e os parâmetros de movimento da câmara correspondente. Estes parâmetros estão relacionados com os parâmetros do sistema ciclopeano, através da seguinte equação (cf. [21]):

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_l = \vec{\Omega}_r = \vec{\Omega} \\ \vec{t}_l = \vec{t} + \vec{\Omega} \times \frac{b}{2} \hat{i} \\ \vec{t}_r = \vec{t} - \vec{\Omega} \times \frac{b}{2} \hat{i} \end{cases} \quad (2.5)$$

Existem duas formas distintas de olhar o problema do movimento 3D de um objecto rígido (ponto material): assumir um movimento contínuo ou um movimento discreto. No primeiro caso, é possível escrever uma equação diferencial derivando

para tal a posição para obter a velocidade. Estes métodos designam-se por métodos diferenciais, tal como mencionado na introdução. Por outro lado, se forem considerados unicamente dois instantes de tempo, podemos falar preferencialmente em deslocamento, em vez de velocidade. Temos então duas posições e orientações distintas do ponto 3D e do seu sistema de coordenadas que, em relação ao sistema de coordenadas original, se caracteriza por uma translação e por uma rotação. Estes métodos designam-se por métodos discretos pois assentam a sua teoria numa discretização temporal do movimento.

Interessou-nos no trabalho que origina esta dissertação analisar o desempenho de dois métodos para estimar a velocidade 3D de uma cena sob o ponto de vista diferencial e discreto. Os métodos são testados nas suas versões originais - diferenciais. Deduziremos mais à frente as equações na versão discreta e faremos, posteriormente, a análise do desempenho de ambos os métodos em ambas as aproximações.

Nesta dissertação entendemos por velocidades projectadas na imagem ou, simplesmente, velocidades na imagem, como a projecção do vector velocidade instantânea (3D), de cada ponto da cena, no plano imagem. Entendemos, também, por fluxo óptico como o padrão dinâmico constituído pela trajectória dos pontos de uma imagem, ao longo do tempo ou, de outra maneira, o movimento aparente do padrão de intensidade na imagem.

A estimação exacta das velocidades projectadas na imagem é um problema de difícil solução e, em geral, impossível, devido ao conhecido problema da abertura. As velocidades projectadas na imagem podem, no entanto, ser aproximadas pelo fluxo óptico, o que constitui uma fonte importante de erro. Há, contudo, formas de adicionar informação que permitam estimar com maior precisão as velocidades projectadas na imagem. Nesta dissertação usaremos a aproximação das velocidades projectadas na imagem pelo fluxo óptico.

O nosso trabalho baseia-se em câmaras *pin-hole* - projecção em perspectiva

com calibração de baixa precisão. Os únicos parâmetros conhecidos e usados são a distância focal ( $f$ ), cujo valor se obtém das especificações técnicas das câmaras (valor, portanto, aproximado) e o tamanho dos píxeis, largura e comprimento, cujo valor se obtém igualmente das especificações técnicas do CCD. Assume-se que o eixo óptico é perfeitamente perpendicular ao plano do CCD, que os píxeis são perfeitamente rectangulares e, portanto, que não existe distorção. Além disso, assume-se que a projecção do centro óptico no plano imagem tem as coordenadas  $(0, 0)$ .

Deste modo, um ponto  $\vec{P}$  3D de coordenadas  $\vec{P} = [X \ Y \ Z]$  projecta-se no plano imagem num ponto de coordenadas  $(x, y)$ , dadas pelas expressões da projecção em perspectiva.



# Capítulo 3

## Aproximação Diferencial

Neste capítulo apresentaremos duas abordagens ao problema da estimação da velocidade 3D parcial e total. Trataremos, de momento, da aproximação diferencial ao problema.

### 3.1 Velocidade 3D na direcção de $Z$

A estimação da terceira componente da velocidade 3D total -  $V_Z$ , em vez da estimação total da velocidade 3D -  $\vec{V}$ , pode só por si justificar-se, porque constitui um dado necessário ao cálculo de um parâmetro muito útil em robótica móvel, designado por tempo para impacto (*time-to-impact*) ou tempo para colisão (*time-to-collision*) usado para evitar colisões com obstáculos. O tempo para impacto é dado por  $TTI = Z/V_Z$ .

Além disso, é possível calcular a velocidade 3D na direcção  $Z$  em cada ponto com apenas uma equação, isto é, com informação de um único ponto, o que não se verifica quando queremos calcular a velocidade total. Nesta secção apresentaremos, então, dois métodos propostos na literatura para o cálculo de  $V_Z$ .

### 3.1.1 Restrição de profundidade - DCCE - [6]

A variação da profundidade de um ponto 3D ao longo do tempo ou de um corpo rígido num determinado sistema de coordenadas está directamente relacionada com a sua velocidade 3D total. Entende-se por profundidade a distância medida do centro óptico da câmara ao ponto  $\vec{P}$ , na direcção do eixo óptico, isto é, corresponde à coordenada  $Z$  no sistema de coordenadas cartesianas.

Considere-se um ponto  $\vec{P}$  que se projecta num ponto da imagem com coordenadas  $(x, y)$  no instante  $t$  e, portanto, no ponto com as coordenadas  $(x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t)$  no instante  $t + \Delta t$ , considerando que a velocidade 3D é constante no intervalo de tempo  $]t, t + \Delta t[$ . É fácil verificar que a profundidade no instante  $t + \Delta t$  ( $Z(t + \Delta t)$ ) é igual à profundidade no instante  $t$  ( $Z(t)$ ) mais a distância total que o ponto percorreu na direcção do eixo óptico -  $V_Z \cdot \Delta t$ . Esta relação designa-se por Equação da Restrição sobre a Mudança da Profundidade (*Depth Change Constraint Equation* - DCCE), que designaremos simplesmente por restrição de profundidade. Consideramos, por simplicidade, sem perda de generalidade, e porque temos como instrumento fundamental do método uma sequência de imagens no tempo, que o tempo ocorrido entre cada duas amostras/imagens é igual a 1 ( $\Delta t = 1$ ). Deste modo, a equação DCCE é dada pela seguinte expressão:

$$Z(x, y, t) + V_Z(x, y, t) = Z(x + v_x(x, y, t), y + v_y(x, y, t), t + 1) \quad (3.1)$$

onde  $Z(x, y, t)$  representa a profundidade do ponto  $\vec{P}$  no instante  $t$  e  $V_Z(x, y, t)$  é a terceira componente da velocidade total 3D, isto é, a projecção do vector velocidade do ponto  $\vec{P}$  sobre a direcção do eixo óptico. Os escalares  $v_x(x, y, t)$  e  $v_y(x, y, t)$  são as componentes das velocidade induzidas na imagem.

O primeiro passo para a obtenção da expressão final do método é aproximar a equação 3.1 pela expansão em série de Taylor de primeira ordem, em torno do ponto  $(x, y, t)$ . Obtém-se:



$$\begin{aligned}
Z(x, y, t) + V_Z(x, y, t) &= Z(x, y, t) + Z_x(x, y, t)v_x(x, y, t) + \\
&+ Z_y(x, y, t)v_y(x, y, t) + Z_t(x, y, t) + O(1)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

onde  $Z_x(x, y, t)$  e  $Z_y(x, y, t)$  são os gradientes da profundidade em relação às coordenadas bidimensionais da imagem - ( $x$  e  $y$ ),  $Z_t(x, y, t)$  é o seu gradiente temporal e  $O(1)$  é o termo do erro, de ordem 1, da série de Taylor.

A equação DCCE reduz-se então à sua forma mais simples:

$$V_Z = Z_t + Z_x v_x + Z_y v_y \tag{3.3}$$

Na equação DCCE relacionam-se os gradientes da profundidade no tempo e no espaço (coordenadas da imagem) com a velocidade total 3D na direcção do eixo óptico assumindo como dados os valores das velocidades na imagem em cada ponto. Temos, deste modo, uma forma fechada para recuperar o movimento na direcção do eixo óptico. Tal como é mencionado por Harville et al. [6], na maioria das vezes, o movimento recuperado com a informação de profundidade é mais preciso do que aquele que é recuperado através do uso de imagens de intensidade por ser menos sensível aos problemas, sempre existentes e não desprezáveis, da iluminação e existência de sombras. O que se pretende com este modelo é tirar partido da informação de profundidade, assumindo a sua disponibilidade.

### 3.1.2 Restrição do fluxo óptico binocular - DV - [32]

Porque dispomos para os nossos modelos de um sistema estéreo e, porque queremos tirar partido de toda a informação que possa ser adicionada com a existência de uma segunda câmara, vamos descrever um modelo que permite calcular a velocidade total 3D na direcção  $Z$ , usando a diferença das velocidades em pontos correspondentes nas duas imagens. Considere-se para tal, um sistema estéreo com geometria fronto-paralela.

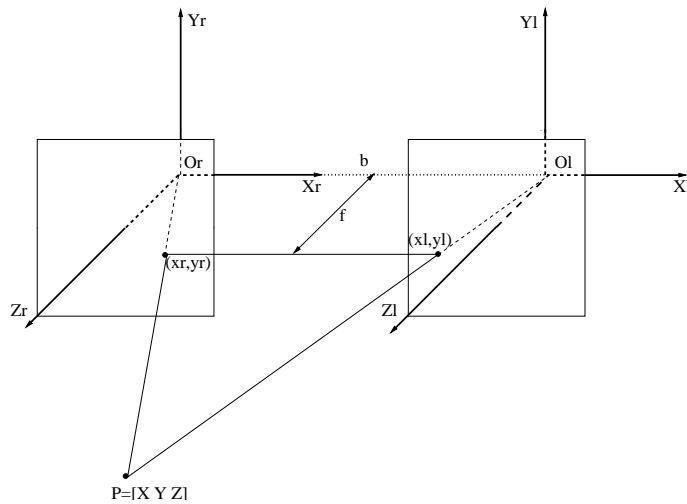


Figura 3.1: Triangulação binocular

O mesmo ponto 3D  $\vec{P}$  projecta-se nas duas imagens (que designaremos comumente por esquerda e direita) nos pontos de coordenadas  $(x_l, y_l)$  e  $(x_r, y_r)$ , tal como se mostra na figura 3.1.

Devido ao facto de as duas câmaras serem paralelas, as linhas epipolares são em ambas as imagens linhas horizontais. Além disso, consideramos que a coordenada  $Y$  de ambos os sistemas de coordenadas das câmaras é igual, pelo que a coordenada  $y$  na imagem esquerda de um ponto é igual à mesma coordenada na imagem direita, isto é,  $y_l = y_r$ . Observando a figura 3.1 verifica-se que o ponto  $\vec{P}$ , as suas projecções em ambas as imagens e os centros ópticos ( $O_l$  e  $O_r$ ) definem dois triângulos semelhantes, podendo então ser escrita a seguinte relação:

$$\frac{Z}{b} = \frac{Z - f}{b - (x_r - x_l)} \quad (3.4)$$

que pode ser simplificada para:

$$Z = \frac{bf}{(x_r - x_l)} \quad (3.5)$$

Derivando agora a equação 3.5 em ordem ao tempo, obtemos:

$$V_Z = \frac{bf}{(x_r - x_l)^2} \times (v_x^r - v_x^l) = -\frac{Z^2}{bf} \Delta v_x \quad (3.6)$$

que dá a relação que desejávamos entre a velocidade total 3D ao longo da direcção  $Z$  ( $V_Z$ ) e a diferença das velocidades na imagem monoculares num ponto correspondente ( $\Delta v_x$ , que designamos por fluxo binocular).

## 3.2 Velocidade 3D total - Parâmetros do movimento

Nesta secção faremos a extensão das equações apresentadas na secção anterior para o cálculo de todos os parâmetros do movimento - três velocidades translacionais (o vector  $\vec{t}$ ) e três velocidades rotacionais (o vector  $\vec{\Omega}$ ).

### 3.2.1 Restrição de profundidade

A equação DCCE 3.3 pode ser escrita da seguinte forma:

$$-Z_t = [Z_x \ Z_y] \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} - V_Z \quad (3.7)$$

Derivando a equação da projecção em perspectiva em relação ao tempo, obtém-se (ver equação 2.3):

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} f & 0 & -x \\ 0 & f & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Substituindo, agora, a equação 3.8 na equação 3.7 obtém-se:

$$-Z_t = \frac{1}{Z} [fZ_x \quad fZ_y \quad -(Z + xZ_x + yZ_y)] \vec{V} \quad (3.9)$$

Através da expansão da equação das velocidades na imagem (2.1) nas suas componentes rotacional e translacional, obtém-se:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & Z & -Y \\ 0 & 1 & 0 & -Z & 0 & X \\ 0 & 0 & 1 & Y & -X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_X \\ t_Y \\ t_Z \\ \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

E, finalmente, substituindo a equação 3.10 na equação 3.9 é possível obter a seguinte relação:

$$-Z_t = \begin{bmatrix} f \frac{Z_x}{Z} \\ f \frac{Z_y}{Z} \\ -\frac{Z+xZ_x+yZ_y}{Z} \\ -fZ_y - \frac{y}{f}(Z+xZ_x+yZ_y) \\ fZ_x + \frac{x}{f}(Z+xZ_x+yZ_y) \\ xZ_y - yZ_x \end{bmatrix}^T \cdot \vec{\phi} \quad (3.11)$$

onde  $\vec{\phi}$  é o vector com os seis parâmetros que se pretende estimar.

Todos os elementos do lado esquerdo da equação 3.11 e também todos os elementos do vector linha são conhecidos ou podem ser medidos (distância focal, profundidade, derivadas temporais e espaciais da profundidade e as próprias coordenadas espaciais). A equação 3.11 representa então uma equação por cada ponto na imagem.

Se for tomado um número elevado de pontos (mais do que seis) obtém-se um sistema linear sobre-determinado para a solução do vector  $\vec{\phi}$ . Vários algoritmos de minimização podem ser usados neste processo de regressão linear múltipla.

O sistema é, então, dado por:

$$\vec{b}_{DCCE} = \mathbf{H}_{DCCE} \vec{\phi}_{DCCE} \quad (3.12)$$

### 3.2.2 Restrição do fluxo óptico binocular

A velocidade 3D na direcção do eixo  $Z$  ( $V_Z$ ) pode ser expressa como uma função linear, em função de três dos seis parâmetros do movimento. Se for usado o sistema de coordenadas da imagem esquerda em vez do sistema de coordenadas ciclopeano, obtém-se:

$$V_Z = t_Z^l + \Omega_X^l Y^l - \Omega_Y^l X^l \quad (3.13)$$

que pode ser substituído pela equação da restrição do fluxo binocular, dando:

$$-\frac{Z^2}{bf} \Delta v_x = t_Z^l + \Omega_X^l Y^l - \Omega_Y^l X^l \Leftrightarrow \quad (3.14)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\Delta v_x}{bf} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -y_l & x_l \\ Z^2 & fZ & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_Z^l \\ \Omega_X^l \\ \Omega_Y^l \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

onde as coordenadas do ponto 3D  $X^l$  e  $Y^l$  foram substituídas pelas equações do modelo de projecção em perspectiva.

A equação 3.15 permite a construção de um sistema linear em função da velocidade translacional na direcção do eixo  $Z$  (direcção do eixo óptico) e das velocidades rotacionais nos eixos vertical e horizontal, usando apenas variáveis cujos valores são conhecidos ou mensuráveis (distância focal, fluxo óptico diferencial ou binocular, profundidade e coordenadas do ponto na imagem). Na verdade, a equação 3.15 apresenta a solução para apenas metade do problema, uma vez que o que se pretende é a estimação de todos os seis parâmetros para recuperar completamente o movimento 3D. Os três parâmetros são a solução de um sistema linear dado por:

$$\vec{b}_{\Delta V} = \mathbf{H}_{\Delta V} \vec{\phi}_{\Delta V} \quad (3.16)$$

Para recuperar os restantes parâmetros, propomos o uso das velocidades na imagem dados pela equação 2.4. Para cada ponto na imagem, são conhecidos os valores de  $t_Z^l$ ,  $\Omega_X^l$ ,  $\Omega_Y^l$  e do fluxo na imagem  $(v_x^l, v_y^l)$ . Pode, então, construir-se outro sistema linear para estimar os outros três parâmetros de movimento.

A equação 2.4 pode, então, ser escrita em função dos parâmetros desconhecidos, obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} v_x^l + x_l \frac{\hat{t}_Z^l}{Z} + \frac{x_l y_l}{f} \hat{\Omega}_X^l - \left(f + \frac{x_l^2}{f}\right) \hat{\Omega}_Y^l \\ v_y^l + y_l \frac{\hat{t}_Z^l}{Z} + \left(f + \frac{y_l^2}{f}\right) \hat{\Omega}_X^l - \frac{x_l y_l}{f} \hat{\Omega}_Y^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{Z} & 0 & -y_l \\ 0 & \frac{f}{Z} & -x_l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{t}_X^l \\ \hat{t}_Y^l \\ \hat{\Omega}_Z^l \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

onde  $\hat{t}_Z^l$ ,  $\hat{\Omega}_X^l$  e  $\hat{\Omega}_Y^l$  são os parâmetros do movimento estimados pela equação 3.16. Neste sistema linear obtêm-se duas equações independentes por cada ponto na imagem.

É então possível construir o sistema a ser minimizado, dado por:

$$\vec{b}_{\Delta V_2} = \mathbf{H}_{\Delta V_2} \vec{\phi}_{\Delta V_2} \quad (3.18)$$

Os seis parâmetros do movimento são, então, estimados num algoritmo de dois passos: em primeiro lugar usa-se o fluxo óptico diferencial e o mapa de profundidade para recuperar  $t_Z^l$ ,  $\Omega_X^l$  e  $\Omega_Y^l$  e, seguidamente, usam-se estes parâmetros estimados, bem como o fluxo monocular e o mapa de profundidade para recuperar os restantes parâmetros -  $t_X^l$ ,  $t_Y^l$  e  $\Omega_Z^l$ . Este algoritmo pode ser usado para calcular/estimar os parâmetros do movimento dos sistemas de coordenadas das câmaras esquerda, direita ou do ciclopeano, cuja relação é dada pela equação 2.5.

# Capítulo 4

## Aproximação Discreta

A aproximação ao problema da estimação do movimento, discreta ou diferencial, resulta da forma como se encara o movimento entre duas imagens consecutivas. Na aproximação discreta, de que trataremos neste capítulo, considera-se que entre o mesmo ponto 3D em imagens consecutivas existe uma relação que se pode expressar por meio de uma transformação rígida, isto é, por meio de uma rotação e de uma translação. Nesta aproximação, a correspondência temporal dos pontos permite medir o deslocamento de um ponto na imagem, substituindo as velocidades projectadas na imagem usadas na aproximação diferencial.

Seja, então, o ponto  $\vec{P}$  3D expresso em coordenadas do sistema ciclopeano no instante  $t$  e o mesmo ponto 3D  $\vec{P}'$  expresso agora no mesmo sistema de coordenadas no instante  $t'$ , tal como é mostrado na figura 4.1.

O movimento entre os pontos  $P$  e  $P'$  pode ser expresso na seguinte forma:

$$\vec{P}' = \mathbf{R} \cdot \vec{P} + \vec{T} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

A velocidade, por seu lado, pode ser aproximada por uma equação de diferenças finitas para o mesmo ponto entre os instante de tempo  $t$  e  $t'$ . Obtém-se:

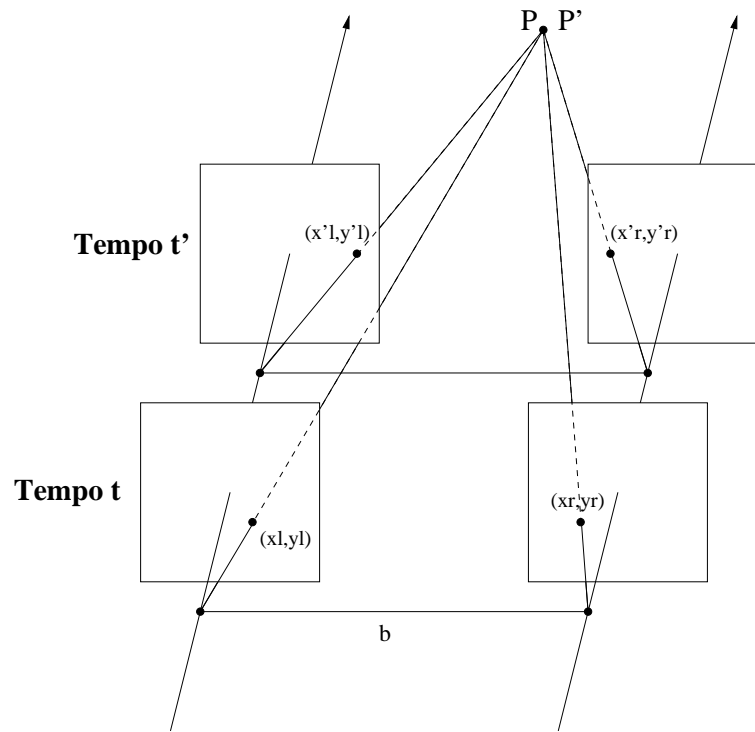


Figura 4.1: Dois pares de imagens estéreo em instantes de tempo diferentes

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} X' - X \\ Y' - Y \\ Z' - Z \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

A figura 4.1 mostra a relação entre dois pares consecutivos de imagens. Neste contexto, podem ser considerados três disparidades relevantes: a disparidade entre as imagens das câmaras esquerda e direita no instante  $t$  -  $\mathbf{d}$ , a disparidade entre as imagens das câmaras esquerda e direita no tempo  $t'$  -  $\mathbf{d}'$  e a disparidade entre a imagem da câmara esquerda no instante  $t$  e  $t'$  -  $d_t$ , também designada por disparidade temporal. Na verdade, uma quarta disparidade entre as imagens das câmaras direitas, bem como as disparidade cruzadas, podiam ser também consideradas, mas não trazem nenhuma informação adicional à nossa formulação, pelo que, não são de todo consideradas.



Na formulação diferencial dos métodos da restrição de profundidade e do método da restrição do fluxo óptico binocular foi assumido que a informação de profundidade estava disponível e, portanto, também as disparidades nos instantes  $t$  e  $t' - d$  e  $d'$ . Na formulação discreta, é ainda necessário o conhecimento da disparidade temporal  $d_t$  para que se possam recuperar os parâmetros do movimento. Como a contribuição deste trabalho não envolve o seguimento de pontos de interesse (*features*), assumimos que a disparidade temporal é conhecida.

## 4.1 Velocidade 3D na direcção de $Z$

Nesta secção interessa-nos estender a estimação da terceira componente da velocidade 3D -  $V_Z$  a uma abordagem discreta. Queremos, portanto, estimar  $V_Z \approx Z' - Z$ . Primeiramente apresentaremos a extensão do método da restrição de profundidade e, seguidamente, a extensão do método da restrição do fluxo óptico binocular.

### 4.1.1 Restrição de profundidade - DCCE

Consideremos novamente a equação 3.1 que define a restrição de profundidade. Na abordagem contínua ou diferencial, a expansão da equação em série de Taylor foi feita em torno do ponto  $(x, y, t)$ . Vamos, em vez disso, repetir o processo, mas em torno do ponto  $(x, y, t')$ . A restrição de profundidade é agora dada por:

$$\begin{aligned} Z(x, y, t) + V_Z &= Z(x + v_x, y + v_y, t') \approx Z(x', y', t') \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Z(x, y, t) + V_Z &= Z(x, y, t') + Z_x(x, y, t')(x' - x) + \\ &+ Z_y(x, y, t')(y' - y) \end{aligned} \quad (4.3)$$

que se reduz para a forma mais simples da equação DCCE discreta:

$$V_Z = Z_t + Z_x \Delta x + Z_y \Delta y \quad (4.4)$$

onde  $Z_t = Z(x, y, t') - Z(x, y, t)$ .

Comparando as equações da restrição de profundidade diferencial e discreta, verifica-se que as velocidades na imagem foram substituídas pela diferenças finitas das coordenadas dos pontos na imagem.

#### 4.1.2 Restrição do fluxo óptico binocular - DV

O primeiro passo para a determinação da expressão do método da restrição do fluxo óptico binocular em tempo discreto é projectar os pontos  $\vec{P}$  e  $\vec{P}'$  nas imagens esquerda e direita:

$$\begin{aligned} x'_l &= f \frac{X'_l}{Z'_l} & x'_r &= f \frac{X'_r}{Z'_r} \\ x_l &= f \frac{X_l}{Z_l} & x_r &= f \frac{X_r}{Z_r} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Uma vez que a configuração das câmaras é fronto-paralela temos  $Z_l = Z_r = Z$ ,  $Z'_l = Z'_r = Z'$  e também porque os centros ópticos das câmaras estão separados de uma distância  $b$  (*baseline*), obtém-se:

$$x'_r - x'_l = f \frac{X'_r - X'_l}{Z'} = -\frac{bf}{Z'} = d' \quad (4.6)$$

e

$$x_r - x_l = f \frac{X_r - X_l}{Z} = -\frac{bf}{Z} = d \quad (4.7)$$

Se se calcular a diferença entre as duas disparidades e se se reagruparem os termos, obtém-se:

$$\Delta Z = -\frac{ZZ'}{bf} (d' - d) \quad (4.8)$$

e, então, a equação do método da restrição do fluxo óptico binocular fica:

$$V_Z \approx -\frac{ZZ'}{bf} (d' - d) \quad (4.9)$$

evidenciando a dependência relativamente ao mapa de disparidade. Se, por outro lado, se se agruparem os termos de cada uma das imagens e não por instante de tempo, pode reescrever-se a equação 4.9 de outra forma. Temos,

$$d' - d = (x'_r - x'_l) - (x_r - x_l) = (x'_r - x_r) - (x'_l - x_l) = \Delta x_r - \Delta x_l \quad (4.10)$$

e, então, a equação da aproximação discreta do método da restrição binocular fica:

$$V_Z \approx -\frac{ZZ'}{bf} \cdot (\Delta x_r - \Delta x_l) \quad (4.11)$$

evidenciando, assim, a dependência de  $V_Z$  em relação ao fluxo óptico (discreto).

Depois de comparadas ambas as formas de  $V_Z$  (equações 4.9 e 4.11) em sequências de imagens reais, verificámos que a estimação usando a equação 4.11 apresentava piores resultados, pelo que será usada sempre a equação 4.9.

## 4.2 Velocidade 3D total - $\vec{\phi}$

Conhecendo as coordenadas 3D de um ponto em dois instantes de tempo ou, conhecendo as suas projecções na imagem e os parâmetros intrínsecos da câmara, é possível recuperar por intermédio de um sistema de regressão linear múltipla os parâmetros que constituem a transformação rígida entre esses pontos: o vector de translação e a matriz de rotação. Observando a equação 4.1 e expandindo-a, obtém-se o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} X' = r_{11}X + r_{12}Y + r_{13}Z + t_1 \\ Y' = r_{21}X + r_{22}Y + r_{23}Z + t_2 \\ Z' = r_{31}X + r_{32}Y + r_{33}Z + t_3 \end{cases} \quad (4.12)$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} X' - X \\ Y' - Y \\ Z' - Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{xZ}{f} & \frac{yZ}{f} & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{xZ}{f} & \frac{yZ}{f} & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{xZ}{f} & \frac{yZ}{f} & Z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} - 1 \\ r_{12} \\ r_{13} \\ r_{21} \\ r_{22} - 1 \\ r_{23} \\ r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} - 1 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

É importante reparar que a equação 4.13 pode ser usada tanto no caso monocular como no caso binocular. A nossa proposta para o caso em que exista um sistema estéreo é que seja usado o sistema de coordenadas ciclopeano e, portanto, para o caso fronto-paralelo tem-se:

$$x = \frac{x_l + x_r}{2} \quad y = y_l = y_r \quad (4.14)$$

Espera-se que o caso binocular aumente a precisão da estimação devido a informação adicional em relação ao caso monocular. Além disso, podiam ser usadas algu-

mas restrições adicionais na estimação da matriz de rotação (determinante unitário e ortogonalidade entre linhas e colunas) ou, exprimindo a componente de rotação de outra forma. O uso destas restrições permitiria a diminuição do número de incógnitas, isto é, do número de parâmetros a estimar.

O conhecimento da matriz de rotação e do vector de translação entre os dois sistemas de coordenadas (antes e depois do movimento) permite-nos agora calcular as velocidades translacionais e rotacionais do movimento em causa.

O modelo cinemático usado corresponde ao modelo clássico do movimento rígido, que corresponde a dividir o movimento em duas partes: um movimento de rotação em torno de um ponto (chamado centro de rotação) e o movimento de translação do centro de rotação. O modelo cinemático corresponde, portanto, à equação da velocidade instantânea de um ponto  $\vec{P}$  no espaço:

$$\vec{V} = \vec{t} + \vec{\Omega} \times \vec{P}$$

Pretendemos calcular os parâmetros do movimento de uma câmara que se move num mundo estático. Podemos, no entanto, considerar que esta se encontra estática e que os pontos do mundo se movem rigidamente com parâmetros de movimento simétricos. Desta forma, sendo o referencial do mundo posicionado de forma coincidente com o referencial das câmaras (ciclopeano), o ponto  $\vec{P}$  representa a posição e, portanto, a trajectória de um qualquer ponto do mundo em relação ao referencial ciclopeano e o vector  $\vec{V}$  a sua velocidade instantânea (derivada da trajectória em ordem ao tempo).

Seja,  $[\Omega]_{\mathbf{x}}$  a matriz anti-simétrica associada ao vector das velocidades rotacionais  $\vec{\Omega}$ , e podemos, então, rescrever o modelo clássico do movimento rígido da forma:

$$\overrightarrow{V}(t) = \frac{d}{dt} \overrightarrow{P}(t) = \vec{t} + [\Omega]_{\mathbf{x}} \vec{P} \quad (4.15)$$

o que corresponde a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem em  $\vec{P}$ .

É difícil obter a solução geral para a equação 4.15, para um movimento geral, pelo que se consideram habitualmente restrições aos parâmetros do movimento.

Partindo da fórmula de Rodrigues, Zhang e Faugeras [39] demonstraram que, assumindo que as velocidades translacionais e rotacionais são constantes no tempo, é possível escrever a equação da trajectória do ponto  $\vec{P}$  na seguinte forma:

$$\overrightarrow{P}(t) = \mathbf{R}\vec{P}_0 + \mathbf{U}\vec{t} \quad (4.16)$$

onde

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}_3 + \frac{\sin(\theta\Delta t)}{\theta}[\boldsymbol{\Omega}]_{\mathbf{x}} + \frac{1 - \cos(\theta\Delta t)}{\theta^2}[\boldsymbol{\Omega}]_{\mathbf{x}}^2 \quad (4.17)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{I}_3\Delta t + \frac{1 - \cos(\theta\Delta t)}{\theta^2}[\boldsymbol{\Omega}]_{\mathbf{x}} + \frac{\theta\Delta t - \sin(\theta\Delta t)}{\theta^3}[\boldsymbol{\Omega}]_{\mathbf{x}}^2 \quad (4.18)$$

e  $\theta = \|\vec{\boldsymbol{\Omega}}\|$ ,  $\Delta t = t - t_0$ ,  $\mathbf{I}_3$  é a matriz identidade  $3 \times 3$  e  $\vec{P}_0 = \overrightarrow{P}(t_0)$ .

Se considerarmos  $\Delta t = 1$ , isto é, se considerarmos apenas o movimento entre cada par de imagens, a equação 4.13 não é mais do que a estimação da matriz  $\mathbf{R}$  e do vector  $\mathbf{U}\vec{t}$ .

É necessário agora obter a partir destes valores os parâmetros do movimento. Para obtermos as velocidades rotacionais, usamos uma aproximação, designada em [7] por aproximação instantânea, dada por:

$$\mathbf{R} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\Omega_Z\Delta t & \Omega_Y\Delta t \\ \Omega_Z\Delta t & 1 & -\Omega_X\Delta t \\ -\Omega_Y\Delta t & \Omega_X\Delta t & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

sendo  $\mathbf{R}$  a matriz cujos elementos foram recuperados pela equação 4.13.

Segundo Adiv [1] esta aproximação é válida para rotações lentas que respeitem duas condições. Em primeiro lugar, a componente de translação na direcção do eixo

$Z$  tem que ser pequena, relativamente à distância dos pontos 3D à origem do sistema de coordenadas:

$$t_Z \Delta t \ll Z$$

e, em segundo lugar, as componentes  $x-$  e  $y-$  da rotação devem ser pequenas relativamente à distância focal, isto é, o sistema não deve ter um campo de visão muito largo:

$$\forall x |x \Omega_Y \Delta t| \ll f$$

$$\forall y |y \Omega_X \Delta t| \ll f$$

Se usarmos os valores obtidos em  $\mathbf{R}$ , temos as velocidades rotacionais estimadas  $\hat{\Omega}$ . É ainda necessário estimar os parâmetros de translação  $\vec{t}$  que podem ser obtidos usando o vector  $\mathbf{U} \vec{t}$ , estimado pelo sistema de equações 4.13. Teremos, pois:

$$\vec{t} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

onde é usada a equação 4.18 para o cálculo da matriz  $\mathbf{U}$  usando os parâmetros de rotação estimados  $\hat{\Omega}$ .





## Parte II

# ESTIMADORES E PROPAGAÇÃO DA INCERTEZA



# Capítulo 5

## Estimadores de Regressão Linear Múltipla

A análise de regressão linear tem como objectivo ajustar modelos matemáticos a observações, ou seja, dado um conjunto de observações pretende-se estimar os parâmetros de um modelo que se ajusta à realidade observada. O modelo clássico é descrito pela equação:

$$y_i = x_{i1}\phi_1 + \dots + x_{ip}\phi_p + e_i \quad \text{para } i=0,\dots,n \quad (5.1)$$

onde  $n$  é o número total de observações, as variáveis  $x_{i1}, \dots, x_{ip}$  chamam-se variáveis exploratórias e  $y_i$  é a variável resposta. A variável  $e_i$  representa o erro da observação e assume-se que tem uma distribuição gaussiana de média zero e desvio padrão  $\sigma$ . As variáveis exploratórias e de resposta são medições feitas em diferentes observações e o que se pretende é estimar o vector de parâmetros desconhecidos  $\vec{\phi}$  que melhor ajusta a equação 5.1 ao conjunto de observações.

Seja  $\hat{\phi}$  o melhor vector paramétrico estimado e  $\hat{y}_i$  ao vector resposta obtido através do vector paramétrico estimado. Escreve-se então a equação:

$$\hat{y}_i = x_{i1}\hat{\phi}_1 + \dots + x_{ip}\hat{\phi}_p \quad (5.2)$$

Os algoritmos de estimação de  $\vec{\phi}$  respeitam um qualquer critério de minimização.

Um dos parâmetros mais importantes dos estimadores é o ponto de colapso, designado na literatura anglo-saxónica por *breakdown point*. Rousseeuw [26] define ponto de colapso como a menor fracção de dados contaminados que podem provocar uma estimação dos parâmetros arbitrariamente afastada dos valores correctos. Por outras palavras, o ponto de colapso de um estimador é a fracção de dados que pode conter observações afectadas com elevado erro, sem afectar na mesma medida os parâmetros estimados. Um estimador é tanto melhor quanto maior for o seu ponto de colapso. O valor máximo do ponto de colapso é 0.5.

Dada a definição de ponto de colapso, o que se pretende é encontrar um estimador cujo ponto de colapso seja 0.5, isto é, tal que até metade dos dados possam estar fortemente afectados com ruído, sem afectar a qualidade das estimativas.

Os estimadores mais usados são o estimador dos mínimos quadrados (*least squares*) e o estimador robusto mínima mediana dos quadrados (*least median of squares*) ou estimador de mediana.

## 5.1 *Least Squares*

O critério subjacente a este estimador é a minimização da soma dos quadrados dos resíduos, dado pela equação:

$$\underset{\hat{\phi}}{\text{Minimizar}} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (5.3)$$

Se o problema estiver escrito na forma  $\vec{b} = \mathbf{H}\vec{\phi}$  (forma das equações 3.12 e 3.16) e  $\mathbf{H}$  for sobre-determinado, pode ser matematicamente demonstrado que a solução dos mínimos quadrados é dada por:

$$\hat{\phi} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \vec{b} \quad (5.4)$$

Este estimador, que data de cerca de 1800, é o estimador mais usado e popular por dois motivos principais: rapidez e simplicidade. À data da sua invenção, sem a ajuda dos computadores, era de grande importância o facto de a solução deste estimador poder ser calculada através de simples manipulações algébricas matriciais usando a equação 5.4.

Contudo, este estimador apresenta problemas sérios, que têm motivado a sua substituição por algoritmos mais robustos. A sua principal desvantagem reside no seu comportamento na presença de dados afectados por ruído. A solução estimada é aquela que minimiza a soma dos resíduos (o quadrado da diferença entre a variável resposta e a resposta estimada). Se houver algumas observações com fortes desvios em relação aos valores correctos (estas medições designam-se vulgarmente na literatura anglo-saxónica por *outliers*) então os parâmetros estimados irão ser fortemente afectados pelo ruído. Esta característica indica que o ponto de colapso deste estimador é zero, isto é, basta uma observação estar fortemente afectada pelo ruído para que a estimação seja fortemente afectada.

Propomos a consulta de Rousseeuw [26] para uma análise detalhada deste e outros estimadores.

## 5.2 *Least Median of Squares*

O estimador de mediana é um estimador robusto com elevado ponto de colapso. O seu critério minimiza a mediana dos resíduos e a sua expressão é dada da seguinte forma:

$$\underset{\hat{\phi}}{\text{Minimizar}} \{ \text{mediana}_i (y_i - \hat{y}_i)^2 \} \quad (5.5)$$

Segundo [26], o ponto de colapso do estimador de mediana é dado pela seguinte expressão:

$$PC_{LMS} = \left[ \frac{n}{2} - p + 2 \right] / n \quad (5.6)$$

onde  $PC_{LMS}$  é o ponto de colapso do estimador de mediana,  $n$  é o número de observações e  $p$  o número de variáveis exploratórias.

Para um número arbitrariamente grande de observações ( $n$ ), o ponto de colapso tende para 0.5, isto é, para o valor máximo. Demonstra-se também que a expressão 5.6 é o limite superior do ponto de colapso de qualquer estimador robusto.

Este estimador também apresenta uma forma simples de detectar e, portanto, rejeitar *outliers*. Apesar de ser simples a sua implementação, o tempo de computação é muito elevado, tornando-o por vezes menos adequado em aplicações de tempo-real.

Suponha-se que se dispõe de um conjunto de  $n$  observações e  $p$  variáveis exploratórias. O número mínimo de um subconjunto de observações para obter um vector paramétrico estimado é portanto  $p$ , de forma a ser possível a regressão linear. Então, o algoritmo simplesmente tenta todas as combinações de  $p$  observações e obtém um vector de parâmetros  $\hat{\phi}$  para cada uma das tentativas - possivelmente usando a equação 5.4. De seguida, calcula para todas as observações a resposta estimada e calcula a mediana dos resíduos assim obtidos. O melhor vector de parâmetros estimados é aquele que minimiza o valor dessa mediana (equação 5.5).

O número total de tentativas a calcular é o número de combinações  $C_p^n$  cujo valor cresce muito rapidamente com o aumento de  $n$  e  $p$ . Para alguns valores de  $n$  e  $p$  é absolutamente impraticável computar em tempo útil todas as combinações. Então, Rousseeuw [26] propõe que em sistemas com um número elevado de variáveis exploratórias e/ou observações pode ser tirado aleatoriamente um número  $p$  de observações e escolher dessas aquela que minimiza a mediana dos resíduos. Este número  $m$  de subconjuntos de observações a testar pode ser calculado, usando a seguinte

expressão:

$$Pb = 1 - (1 - (1 - \epsilon)^p)^m \quad (5.7)$$

onde  $Pb$  é a probabilidade de pelo menos um dos subconjuntos tirados aleatoriamente seja de observações não afectadas por ruído e, portanto, o vector de parâmetros estimado ser próximo do modelo mais correcto.  $\epsilon$  representa a fracção máxima de dados afectados pelo ruído (no máximo 0.5).

Este parâmetro  $m$  (número de subconjuntos de  $p$  observações a testar) é, então, um compromisso entre a qualidade da solução e a velocidade do algoritmo.





# Capítulo 6

## Propagação da incerteza

A análise da propagação da incerteza num modelo matemático torna-se útil quando se pretende avaliar o grau de confiança que a estimação de um valor nos pode dar. Um produto imediato desta análise é a possibilidade de serem apontados os factores ou variáveis críticas na determinação do modelo em causa, isto é, conseguirmos apontar as variáveis independentes, nas quais a existência de incerteza ou erro nas medições mais afecta o resultado estimado.

Neste contexto, este capítulo apresenta a análise da propagação da incerteza nas equações da velocidade 3D na direcção de  $Z$  -  $V_Z$  e também no processo de regressão linear para estimar os parâmetros do movimento -  $\hat{\phi}$ .

De seguida, apresentam-se as equações da propagação da incerteza nos dois métodos para calcular  $V_Z$  (equação da restrição de profundidade e equação da restrição do fluxo óptico diferencial) e nas duas aproximações para cada um dos métodos (aproximação diferencial e aproximação discreta).

Assume-se que os parâmetros geométricos das câmaras e do sistema estéreo são perfeitamente conhecidos, sem erro (distância focal e a distância entre os centros ópticos das câmaras - *baseline*).

Seja, então,  $\vec{F}$  o vector a ser estimado e  $\vec{S}$  o vector com as variáveis indepen-

dentos. Considera-se ainda que todas as variáveis estão afectadas por ruído aleatório branco gaussiano, com média zero e desvio padrão  $\sigma_i$ , onde  $i$  denota a variável.

## 6.1 Restrição de Profundidade - aproximação diferencial

A equação em causa é:

$$V_Z = Z_t + Z_x v_x + Z_y v_y = V_Z(Z_x, Z_y, Z_t, v_x, v_y) \quad (6.1)$$

Temos, então,  $\vec{F} = [V_Z]$  e  $\vec{S}_1 = [Z_x \ Z_y \ Z_t \ v_x \ v_y]^T$ .

Assume-se ainda que o ruído presente nas variáveis é independente logo a matriz de covariância para o sinal de entrada  $\vec{S}_1$  é dado por:

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{Z_x Z_x}^2 & \cdots & 0 \\ & \sigma_{Z_y Z_y}^2 & \\ \vdots & & \sigma_{Z_t Z_t}^2 & \vdots \\ & & & \sigma_{v_x v_x}^2 \\ 0 & \cdots & & \sigma_{v_y v_y}^2 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

A matriz jacobiana que mapeia o vector  $\vec{S}_1$  para a velocidade 3D ao longo do eixo  $Z$   $\vec{F}$ , é designada por  $\partial \vec{F} / \partial \vec{S}_1$ . Esta matriz está definida em todos os pontos onde as funções são diferenciáveis.

A matriz de variância-covariância do vector de saída pode ser calculada através de uma aproximação de primeira ordem, dada pela expressão:

$$\mathbf{\Gamma}_1 \approx \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{S}_1} \right)^T \cdot \mathbf{\Lambda}_1 \cdot \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{S}_1} \right) \quad (6.3)$$

Esta aproximação só é válida se o vector das variáveis dependentes ( $\vec{F}$ ) for linear, em função das variáveis independentes ( $\vec{S}$ ) ou se for possível aproximá-lo pelos

termos lineares de uma expansão em série de Taylor na vizinhança da média  $E(\vec{\phi})$ . As funções em causa são funções não lineares mas linearizáveis, em torno do ponto médio  $E(\vec{\phi})$ . Assim, temos a matriz de variância-covariância dada por:

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} v_x & v_y & 1 & Z_x & Z_y \end{bmatrix} \cdot \Lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 1 \\ Z_x \\ Z_y \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

O resultado final da matriz de variância-covariância (matriz de dimensão  $1 \times 1$ ) é dado pela expressão final:

$$\Gamma_1 = \sigma_{V_Z V_Z}^2 = \sigma_{Z_x Z_x}^2 v_x^2 + \sigma_{Z_y Z_y}^2 v_y^2 + \sigma_{Z_t Z_t}^2 + \sigma_{v_x v_x}^2 Z_x^2 + \sigma_{v_y v_y}^2 Z_y^2 \quad (6.5)$$

Tal como se pode observar pela expressão, a perturbação no cálculo de  $V_Z$  depende do quadrado do valor de cada uma das variáveis, com excepção da derivada temporal da profundidade.

## 6.2 Restrição do fluxo óptico binocular - aproximação diferencial

A equação do velocidade 3D segundo a direcção  $Z$  é dada por:

$$V_Z = -\frac{Z^2}{bf} \Delta v_x = V_Z(Z, v_x^l, v_x^r) \quad (6.6)$$

Usando um raciocínio semelhante ao apresentado anteriormente, temos para o método do fluxo óptico binocular as seguintes expressões:

$$\vec{S}_2 = \begin{bmatrix} Z \\ v_x^l \\ v_x^r \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{\Lambda}_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{ZZ}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{v_x^l v_x^l}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{v_x^r v_x^r}^2 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

E a matriz jacobiana é então dada por:

$$\left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{S}_2} \right)^T = \left[ \frac{\partial V_Z}{\partial Z} \quad \frac{\partial V_Z}{\partial v_x^l} \quad \frac{\partial V_Z}{\partial v_x^r} \right]^T = \left[ \frac{-2Z}{bf} \Delta v_x \quad -\frac{Z^2}{bf} \quad \frac{Z^2}{bf} \right]^T \quad (6.9)$$

A matriz de variância-covariância da função de saída é dada por:

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{S}_2} \right)^T \cdot \mathbf{\Lambda}_2 \cdot \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{S}_2} \right) = \frac{4Z^2}{(bf)^2} (\Delta v_x)^2 \sigma_{ZZ}^2 + \frac{Z^4}{(bf)^2} \sigma_{v_x^l v_x^l}^2 + \frac{Z^4}{(bf)^2} \sigma_{v_x^r v_x^r}^2 \quad (6.10)$$

que se reduz à forma mais simples:

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \sigma_{V_Z V_Z}^2 = \frac{4Z^2}{(bf)^2} (\Delta v_x)^2 \sigma_{ZZ}^2 + \frac{Z^4}{(bf)^2} \left( \sigma_{v_x^l v_x^l}^2 + \sigma_{v_x^r v_x^r}^2 \right) \quad (6.11)$$

Observando a expressão da variância da velocidade 3D ao longo do eixo  $Z$  nota-se que existe uma dependência do erro no fluxo óptico com uma constante de proporcionalidade que tem uma potência quarta de  $Z$  ( $Z^4$ ), o que se traduz num valor elevado. Será, portanto, de esperar que as componentes  $x$ — do fluxo óptico nas imagens esquerda e direita sejam as variáveis críticas, isto é, aquelas em cuja existência de ruído mais afecta o resultado de  $V_Z$ .

## 6.3 Restrição de profundidade - aproximação discreta

O método da restrição de profundidade - DCCE - é muito semelhante nas suas duas aproximações, sendo a única diferença a utilização das velocidades na imagem, aproximadas pelo fluxo óptico na aproximação diferencial e pela diferença das coordenadas, aproximação das velocidades na imagem, na abordagem discreta.

A equação do método da restrição de profundidade em tempo discreto é:

$$V_Z = Z_t + Z_x \Delta x + Z_y \Delta y = V_Z(Z_x, Z_y, Z_t, x, y, x', y') \quad (6.12)$$

Temos, usando o mesmo raciocínio usado anteriormente, o vector das variáveis independentes::

$$\vec{S}_3 = \begin{bmatrix} Z_x & Z_y & Z_t & x & y & x' & y' \end{bmatrix}^T \quad (6.13)$$

E a matriz jacobiana é então dada por:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{S}_3} = \begin{bmatrix} (x' - x) & (y' - y) & 1 & -Z_x & -Z_y & Z_x & Z_y \end{bmatrix}^T \quad (6.14)$$

A matriz de variância-covariância da função de saída é então dada por:

$$\begin{aligned} \Gamma_3 = \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{S}_3} \right)^T \cdot \Lambda_3 \cdot \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{S}_3} \right) &= \sigma_{Z_x Z_x}^2 (x' - x)^2 + \sigma_{Z_y Z_y}^2 (y' - y)^2 + \sigma_{Z_t Z_t}^2 + \\ &+ (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{x'x'}^2) Z_x^2 + (\sigma_{yy}^2 + \sigma_{y'y'}^2) Z_y^2 \end{aligned} \quad (6.15)$$

A equação 6.15 que nos dá a variância de  $V_Z$  calculado com a equação da restrição de profundidade no tempo discreto é similar à equação 6.5 para o tempo contínuo, porque se considera a aproximação  $v_x = x' - x$ , pelo que as duas equações se reduzem à mesma. Notar que usando a aproximação descrita, temos  $\sigma_{v_x v_x}^2 = \sigma_{xx}^2 + \sigma_{x'x'}^2$ .

## 6.4 Restrição do fluxo óptico binocular - aproximação discreta

A expressão para o cálculo de  $V_Z$  usando a restrição do fluxo óptico binocular pela aproximação discreta é dada por:

$$V_Z = -\frac{ZZ'}{bf} (d' - d) = V_Z (Z, Z', d', d) \quad (6.16)$$

Vamos usar aqui novamente o mesmo raciocínio. Temos, então, o vector das variáveis independentes:

$$\vec{S}_4 = \begin{bmatrix} Z & Z' & d & d' \end{bmatrix}^T \quad (6.17)$$

A matriz jacobiana é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{S}_4} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial V_Z}{\partial Z} & \frac{\partial V_Z}{\partial Z'} & \frac{\partial V_Z}{\partial d} & \frac{\partial V_Z}{\partial d'} \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{Z'}{bf} (d' - d) & -\frac{Z}{bf} (d' - d) & \frac{ZZ'}{bf} & -\frac{ZZ'}{bf} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (6.18)$$

A matriz de variância-covariância da função de saída é então dada por:

$$\begin{aligned} \Gamma_4 &= \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{S}_4} \right)^T \cdot \Lambda_4 \cdot \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{S}_4} \right) = \frac{Z'^2}{(bf)^2} (d' - d)^2 \sigma_{ZZ}^2 + \frac{Z^2}{(bf)^2} (d' - d)^2 \sigma_{Z'Z'}^2 + \\ &+ \frac{Z^2 Z'^2}{(bf)^2} \sigma_{dd}^2 + \frac{Z^2 Z'^2}{(bf)^2} \sigma_{d'd'}^2 \end{aligned} \quad (6.19)$$

que se reduz à forma mais simples:

$$\Gamma_4 = \left(1 - \frac{d}{d'}\right)^2 \sigma_{ZZ}^2 + \left(\frac{d'}{d} - 1\right)^2 \sigma_{Z'Z'}^2 + \frac{Z^2 Z'^2}{(bf)^2} (\sigma_{dd}^2 + \sigma_{d'd'}^2) \quad (6.20)$$

A expressão da variância de  $V_Z$  6.20 depende do produto de uma potência 2 da profundidade (valores elevados para a maioria dos pontos) por outra potência de 2

de  $Z'$ , isto é, da profundidade no instante de tempo seguinte. Isto corresponde, na maioria dos casos, a uma potência quarta da profundidade. Tal facto, que também se verifica na aproximação diferencial, leva a concluir que este método é muito sensível em relação tanto ao erro nas velocidades projectadas na imagem como ao erro na disparidade entre as imagens esquerda e direita, ao longo do tempo. O facto de aproximarmos as velocidades projectadas na imagem pelo fluxo óptico traz por si só uma fonte de erro considerável.

## 6.5 Efeito da resolução na disparidade

Uma boa parte dos algoritmos que usam informação de profundidade dos pontos da cena adquirem essa informação de mapas de disparidade. O nosso trabalho é um deles. A partir destes mapas é possível fazer uma reconstrução 3D parcial, obtendo-se a profundidade através da equação  $Z = bf/d$ .

Pretende-se, nesta secção, estudar o efeito que uma resolução limitada nos mapas de disparidade produz nos mapas de profundidade e a incerteza que daí provém. Pretende-se, ainda, analisar o efeito que tanto a disparidade como a profundidade calculada produzem na incerteza dos métodos apresentados, isto é, nas equações 6.5, 6.11, 6.15 e 6.20.

A figura 6.1 esquematiza o efeito da resolução dos mapas de disparidade na determinação da profundidade. Uma vez que a disparidade é medida em píxeis, mesmo que se usem resoluções inferiores ao píxel, o valor da disparidade só pode tomar um número finito de valores. Como demonstra a figura, o uso da disparidade para recuperar a profundidade causa um erro, visto qualquer ponto interior aos quadriláteros ter o mesmo valor de disparidade, mas não o mesmo valor de profundidade. Além disso, estes erros de quantização dependem da própria profundidade do ponto, sendo maiores para pontos mais afastados. Isto significa que, como a pro-

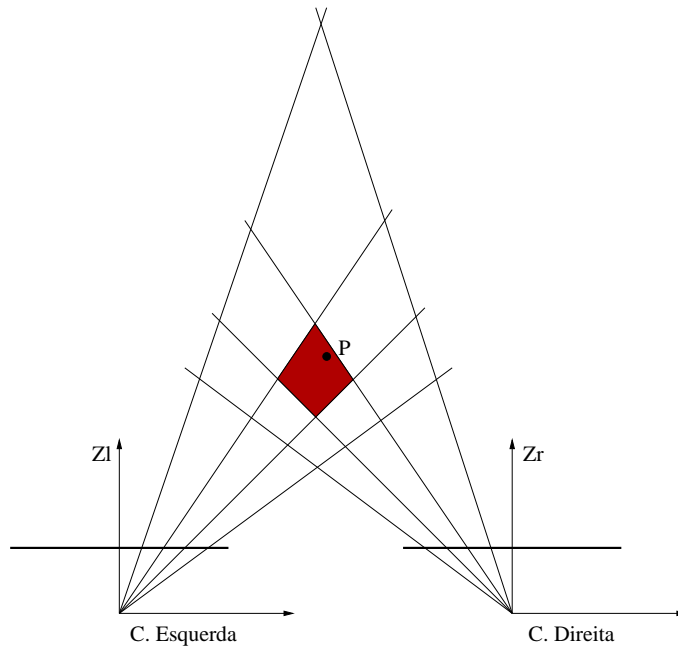


Figura 6.1: Efeito da resolução dos mapas de disparidade no cálculo da profundidade

fundidade é inversamente proporcional à disparidade, o seu valor é calculado com resolução decrescente, à medida que a profundidade cresce.

Seja  $\Delta d$  o salto mínimo que pode ocorrer no mapa de disparidade, isto é, a sua resolução. O deslocamento em profundidade mínimo que tem que ocorrer num ponto para que o valor de disparidade mude para o valor seguinte é:

$$\Delta Z = -\frac{1}{1 + \frac{d}{\Delta d}} \cdot \frac{bf}{d} = -\frac{1}{1 + \frac{d}{\Delta d}} \cdot Z \quad (6.21)$$

A equação 6.21 mostra que para objectos próximos, pequenas alterações na sua profundidade podem causar elevadas alterações na disparidade, mas que, para objectos distantes, a alteração mínima de profundidade necessária para que produza alteração na disparidade é muito elevada e crescente com a distância às câmaras.

O principal significado desta observação reside no facto de se tornar difícil detectar e estimar o movimento 3D para pontos distantes.

Como exemplo, consideremos um caso realístico de um par de câmaras com



distância focal  $f = 3.6$  mm, separadas por  $b = 130$  mm, píxeis quadrados de  $pw = 0.012$  mm de lado e uma resolução de  $\Delta d = 0.25$  píxeis. Neste caso, temos as seguintes discriminações:

- $d = 1 \rightarrow Z = 39000 \rightarrow \Delta Z = -7800$  mm
- $d = 5 \rightarrow Z = 7800 \rightarrow \Delta Z = -371.4$  mm
- $d = 10 \rightarrow Z = 3900 \rightarrow \Delta Z = -95.1$  mm
- $d = 20 \rightarrow Z = 1950 \rightarrow \Delta Z = -24.1$  mm
- $d = 50 \rightarrow Z = 780 \rightarrow \Delta Z = -3.9$  mm

o que permite avaliar os erros provocados pela limitação da resolução.

Segundo Shanmugan [27], a variância do erro de quantização, provocado por resolução finita, é dada pela seguinte expressão:

$$\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12} \quad (6.22)$$

onde  $\Delta$  representa o salto mínimo entre dois patamares consecutivos, isto é, a resolução. Esta expressão foi demonstrada admitindo uma distribuição de probabilidade uniforme nos intervalos de quantização.

Considerando a equação 6.22, como exemplo, o erro de quantização presente num mapa de disparidade com resolução de 1/4 píxel tem variância aproximadamente igual a 0.0052. Apesar de este valor ser reduzido, o erro pode propagar-se muito rapidamente, como veremos adiante.

Ao nível da propagação da incerteza, queremos estudar o efeito da incerteza na disparidade, na profundidade e nas equações da velocidade 3D na direcção de  $Z$ . Usando a relação entre profundidade e disparidade, temos:

$$\frac{\partial Z}{\partial d} = -\frac{bf}{d^2} \quad (6.23)$$

pelo que, a variância da profundidade é dada por:

$$\sigma_{ZZ}^2 = \frac{\partial Z}{\partial d} \cdot \sigma_{dd}^2 \cdot \frac{\partial Z}{\partial d} = \frac{(bf)^2}{d^4} \cdot \sigma_{dd}^2 = \frac{Z^4}{(bf)^2} \cdot \sigma_{dd}^2 \quad (6.24)$$

o que revela que o erro no valor recuperado para a profundidade é crescente em função da própria profundidade. Este resultado já tinha sido previsto pela equação 6.21.

Com o objectivo de analisar a incerteza em  $V_Z$  em função da incerteza em  $d$  e não em  $Z$ ,  $Z_t$ ,  $Z_x$  e  $Z_y$ , temos que calcular a relação entre as incertezas destas variáveis e a incerteza em  $d$ . Uma vez que já foi derivada essa relação com  $Z$ , temos as outras relações dadas pelas seguintes equações:

$$Z_i = \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{bf}{d} \right) = -\frac{bf}{d^2} \cdot d_i \quad (6.25)$$

onde  $i$  representa a variável em relação à qual derivamos ( $i = t, x$  ou  $y$ ),  $d_i$  a derivada da disparidade em relação ao tempo ( $t$ ), coordenada espacial  $x$  ou  $y$  e  $\sigma_{d_i d_i}^2$  a variância dessa derivada. A variância de  $Z_i$  é, então, dada por:

$$\sigma_{Z_i Z_i}^2 \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial Z_i}{\partial d} & \frac{\partial Z_i}{\partial d_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{dd}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{d_i d_i}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial Z_i}{\partial d} \\ \frac{\partial Z_i}{\partial d_i} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

considerando que a aproximação das covariâncias cruzadas serem nulas é razoável.

A expressão fica:

$$\sigma_{Z_i Z_i}^2 = \left( 2 \frac{bf}{d^3} d_i \right)^2 \cdot \sigma_{dd}^2 + \left( \frac{bf}{d^2} \right)^2 \cdot \sigma_{d_i d_i}^2 \quad (6.27)$$

Desta forma e usando o mesmo raciocínio usado anteriormente, obtemos as equações da propagação da incerteza nas equações de cálculo do  $V_Z$ , dadas por:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = \sigma_{V_Z V_Z,1}^2 = & 4 \left( \frac{bf}{d^3} \right)^2 \cdot (d_x^2 v_x^2 + d_y^2 v_y^2 + d_t^2) \sigma_{dd}^2 + \\ & + \left( \frac{bf}{d^2} \right)^2 \cdot \left( v_x^2 \sigma_{d_x d_x}^2 + v_y^2 \sigma_{d_y d_y}^2 + \sigma_{d_t d_t}^2 + d_x^2 \sigma_{v_x v_x}^2 + d_y^2 \sigma_{v_y v_y}^2 \right) \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\Gamma_2 = \sigma_{V_Z V_Z,2}^2 = 4 \frac{(bf)^2}{d^6} \cdot (\Delta v_x)^2 \cdot \sigma_{dd}^2 + \frac{(bf)^2}{d^4} \cdot \left( \sigma_{v_x^l v_x^l}^2 + \sigma_{v_x^r v_x^r}^2 \right) \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3 = \sigma_{V_Z V_Z,3}^2 = & 4 \left( \frac{bf}{d^3} \right)^2 \cdot (d_x^2 (\Delta x)^2 + d_y^2 (\Delta y)^2 + d_t^2) \sigma_{dd}^2 + \\ & + \left( \frac{bf}{d^2} \right)^2 \cdot \left[ (\Delta x)^2 \cdot \sigma_{d_x d_x}^2 + (\Delta y)^2 \cdot \sigma_{d_y d_y}^2 + \sigma_{d_t d_t}^2 + \right. \\ & \left. + d_x^2 (\sigma_{x x}^2 + \sigma_{x' x'}^2) + d_y^2 (\sigma_{y y}^2 + \sigma_{y' y'}^2) \right] \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\Gamma_4 = \sigma_{V_Z V_Z,4}^2 = \left( \frac{bf}{d^2} \right)^2 \cdot \sigma_{dd}^2 + \left( \frac{bf}{d'^2} \right)^2 \cdot \sigma_{d' d'}^2 \quad (6.31)$$

Pode verificar-se, pela análise destas equações, que a incerteza cresce muito rapidamente com o aumento da profundidade (diminuição da disparidade), tal como era esperado, quer pela exposição feita no início desta secção, quer pelas primeiras quatro secções deste capítulo.

### Um caso prático

Com o objectivo de facilitar a compreensão das equações de propagação da incerteza dos diversos métodos, apresenta-se agora uma particularização destas. As equações

são calculadas sobre o mundo sintético, usado nos testes com sequências de imagens sintéticas (ver capítulo 8). Foi utilizada a sequência mista C, cujos parâmetros do movimento se encontram na tabela 8.1.

A figura 6.2 representa o mapa do valor obtido para a variância da aproximação diferencial do método DCCE. As cores mais frias correspondem a valores mais baixos de variância (saturação para azul escuro), ao passo que as cores mais quentes correspondem a valores mais elevados (saturação para vermelho escuro). Considerou-se que a variância do erro na disparidade e nas velocidades é igual a 0.1 píxeis.

Como para o cálculo das derivadas da disparidade em função das coordenadas da imagem ( $x$  e  $y$ ) e em função do tempo, são usadas equações de diferenças ( $d_t(x, y, t) \approx 0.5 \cdot d(x, y, t + 1) - 0.5 \cdot d(x, y, t - 1)$ ), então temos para a variância  $\sigma_{d_t d_t}^2 = 0.5 \cdot \sigma_{dd}^2$ . Consideramos ainda que as variâncias da incerteza nas velocidades eram iguais, tanto para as velocidades em ambas as imagens como as suas componentes  $x$  e  $y$ , isto é,  $\sigma_{v_x^l v_x^l}^2 = \sigma_{v_x^r v_x^r}^2 = \sigma_{v_y^l v_y^l}^2 = \sigma_{v_y^r v_y^r}^2 = \sigma_{vv}^2$ . O mesmo se passa para as velocidades discretas.

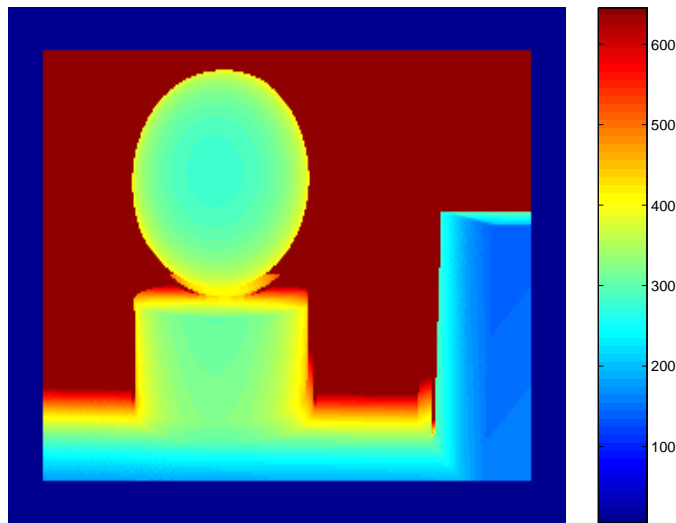


Figura 6.2: Variância da incerteza apresentada pelo método DCCE

Observa-se claramente que os pontos da cena mais afastados têm valores de

variância maiores e que os pontos mais próximos têm valores de variância menores, o que já tinha sido apontado. Além destes pontos, verifica-se que os pontos da vizinhança de descontinuidades no mapa de disparidade também têm valores de variância muito elevados.

Para que se possa, ainda, identificar os factores que mais influenciam a incerteza em cada um dos métodos, calculámos os coeficientes para dois pontos distintos: um ponto na parte lateral da superfície esférica e um ponto no chão. Os resultados foram os seguintes:

$$\begin{array}{ll}
 \Gamma_1 = 13216\sigma_{dd}^2 + 256.2\sigma_{vv}^2 & \Gamma_1 = 108960\sigma_{dd}^2 + 85.7\sigma_{vv}^2 \\
 \Gamma_2 = 81.2\sigma_{dd}^2 + 11993\sigma_{vv}^2 & \Gamma_2 = 308.2\sigma_{dd}^2 + 108375\sigma_{vv}^2 \\
 \Gamma_3 = 13275\sigma_{dd}^2 + 256.2\sigma_{vv}^2 & \Gamma_3 = 109100\sigma_{dd}^2 + 85.7\sigma_{vv}^2 \\
 \Gamma_4 = 10774\sigma_{dd}^2 + 0.0\sigma_{vv}^2 & \Gamma_4 = 101237\sigma_{dd}^2 + 0.0\sigma_{vv}^2
 \end{array}$$

em que os valores à esquerda são correspondentes ao ponto na superfície do chão e os pontos da direita correspondem à superfície do esférica.

Estes dados indiciam algumas conclusões. Em primeiro lugar, é evidente que o factor crítico do método DCCE em ambas as aproximações é a disparidade e que no método da restrição binocular, para a aproximação diferencial, o factor crítico é o fluxo óptico (aproximação das velocidades na imagem) e que no caso da aproximação discreta é a disparidade.

Para valores da variância da disparidade e das velocidades (diferenciais e/ou discretas) entre 0 e 1, obtemos os gráficos 6.3 e 6.4 para cada um dos métodos.

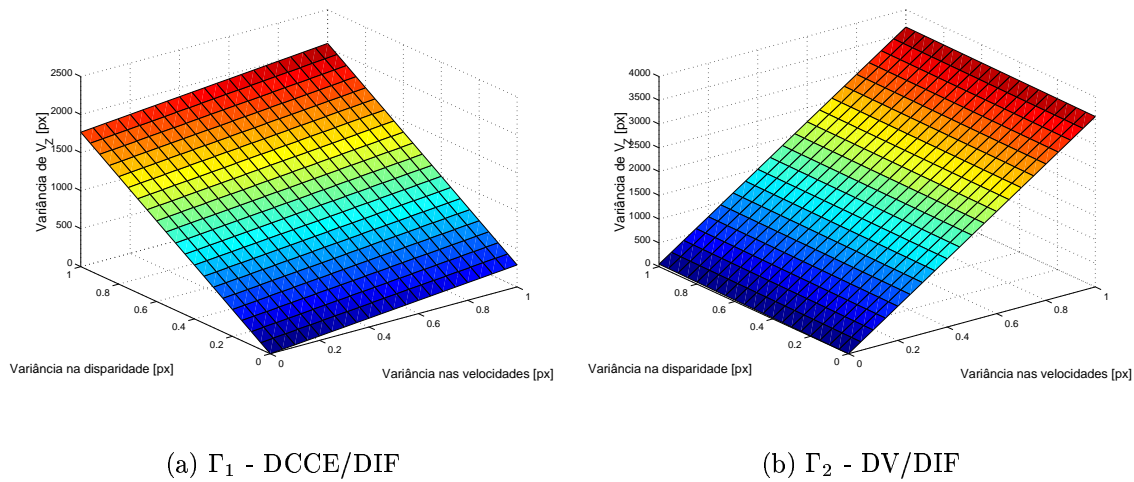


Figura 6.3: Variância da estimação de  $V_Z$  - aproximação diferencial.

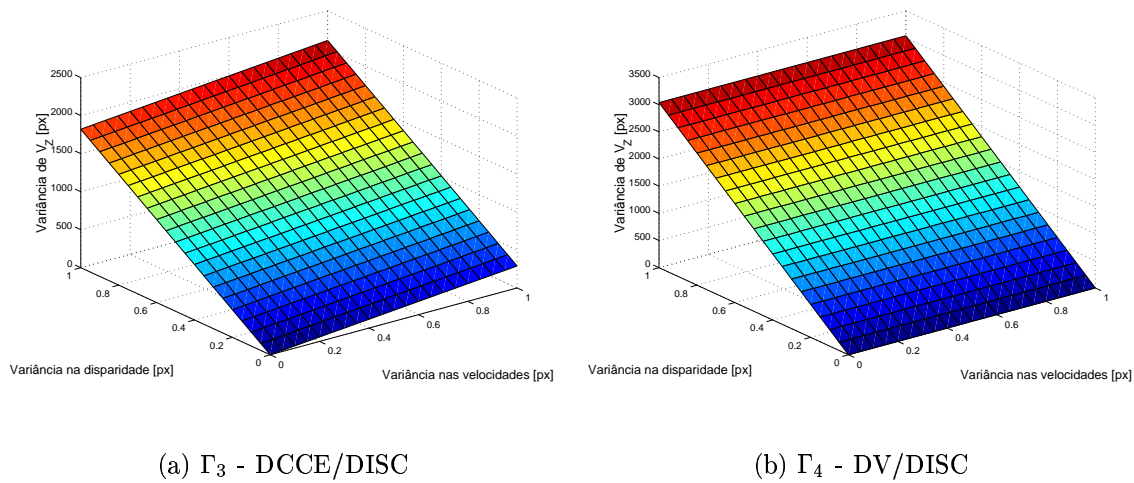


Figura 6.4: Variância da estimação de  $V_Z$  - aproximação discreta.

## 6.6 Incerteza na regressão linear múltipla

Nas secções anteriores, estudámos a propagação da incerteza no cálculo de  $V_Z$ , que se obtinha directamente através de uma equação linear. Nesta secção, pretendemos fazer a abordagem ao estudo da propagação da incerteza no processo de regressão linear múltipla, isto é, na estimação dos parâmetros do movimento.

Partindo da equação 5.1 e de um conjunto de  $n$  observações de  $y_i$  e  $x_{i1}$  a  $x_{ip}$ , obtemos um sistema  $n \times p$  sobre-determinado dado pela equação geral  $\vec{b} = \mathbf{H} \vec{\phi}$ , pretende-se agora saber qual a influência do ruído presente nas variáveis de entrada no vector de estimação  $\hat{\phi}$ .

A matriz de variância-covariância dos parâmetros estimados é dada pela expressão:

$$\text{Cov}(\hat{\phi}) = \sigma^2 V(\text{estimador}) (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \quad (6.32)$$

onde  $\sigma$  representa a variância do erro da resposta (ver variável  $e_i$  da equação 5.1) e  $V(\text{estimador})$  é um escalar que depende do estimador. Para mais detalhes aconselha-se a consulta de [26], p.129-130.

Como não são conhecidos à partida os valores correctos de  $y_i$ , não podemos calcular com exactidão a variância  $\sigma$ . Contudo, aproxima-se este valor através da variância estimada dos resíduos. Para o estimador dos mínimos quadrados, temos:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p} \cdot \sum_{i=1}^n r_i^2 \quad (6.33)$$

onde os resíduos são dados por  $r_i^2 = (y_i - x_{i1}\hat{\phi}_1 - \dots - x_{ip}\hat{\phi}_p)^2$ .

Para o estimador de mediana (*least median of squares*) temos:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i r_i^2}{\sum_{i=1}^n (w_i - p)} \quad (6.34)$$

onde  $w_i$  são valores de ponderação dos resíduos.

Relativamente ao valor  $V(\text{estimador})$ , Rousseeuw [26] apresenta diferentes valores para diferentes estimadores e diferentes funções usadas para a ponderação dos resíduos -  $w_i$ . Para o estimador dos mínimos quadrados temos  $V(\text{estimador}) = 1$  e para o estimador de mediana um valor apresentado como razoável é  $V(\text{estimador}) = 1.15$ .

Temos, então, uma forma de calcular a matriz de variância-covariância dos  $p$  parâmetros estimados. Não temos, contudo, uma relação explícita entre os parâmetros de saída e cada variável independente de entrada.



**Parte III**

**EXPERIÊNCIAS E  
RESULTADOS**



# Capítulo 7

## Condições Experimentais

Antes de apresentar os resultados obtidos nas experiências laboratoriais, é necessário apresentar as condições em que aquela foi realizada. Além das condições físicas e logísticas, algumas questões relativas ao procedimento estatístico e aos valores verdadeiros devem ser abordadas. Começaremos por expor o processo de obtenção das sequências de imagens sintéticas e reais.

### 7.1 Imagens sintéticas

As experiências laboratoriais consistiram em testes efectuados em sequências de imagens estéreo obtidas de duas formas. Em primeiro lugar, os testes efectuaram-se em imagens sintéticas, com o objectivo de testar as técnicas apresentadas em diversas condições, permitindo uma grande flexibilidade nos parâmetros usados.

Foi construído um algoritmo auxiliar para a criação de imagens sintéticas, cujo mundo consiste em 13 planos: plano do chão, plano das paredes vertical frontal e traseira, vertical direita e vertical esquerda e plano das quatro faces visíveis de dois objectos paralelepípedos assentes no chão a distâncias diferentes da posição inicial do robot (munido com um par de câmaras estéreo). O mundo consistia numa *sala* quadrada com seis metros de lado e três metros de altura.

O robot, com as câmaras acopladas, movia-se livremente (6 graus de liberdade) neste mundo, partindo de uma posição inicial e com um movimento fixo, isto é, as sequências foram adquiridas com os seis parâmetros do movimento, constantes no tempo (três velocidades translacionais e três velocidades rotacionais). Foram adquiridas várias sequências nestas condições, incluindo sequências só de translação ao longo da direcção do eixo óptico das câmaras fronto-paralelas, de translação ao longo dos restantes eixos, de rotação nos eixos *pan* e *tilt* e sequências com movimentos mistos de translação e rotação.

Para o cálculo da trajectória dos pontos 3D provocada pelo movimento das câmaras, foi usado o modelo clássico do movimento rígido dado pelas equações 4.16, 4.17 e 4.18, que nos dão uma forma fechada de calcular a trajectória de um ponto, quando sujeito a um movimento rígido.

É então possível, usando a equação 4.16 calcular a trajectória de todos os pontos do mundo sintético, partindo apenas do pressuposto, verdadeiro no nosso caso, de que as velocidades de translação e rotação são constantes ao longo do tempo.

A informação guardada em suporte digital inclui o seguinte: imagens esquerda e direita em formato pgm de 255 níveis de cinzento, imagem de disparidade em formato pgm de 255 níveis de cinzento (resolução de 1 píxel), imagem de profundidade de cada ponto, em milímetros, em formato próprio (mapa de *floats*) com resolução elevada (dupla precisão), mapas com as velocidades induzidas na imagem pelos pontos da cena, em milímetros, em formato próprio (mapa de *floats*) com resolução elevada (dupla precisão) para as imagens esquerda e direita e mapa de seguimento de alvos com as coordenadas de imagem em que se projecta um ponto na imagem seguinte em formato próprio (mapa de *floats*) com resolução elevada (em píxeis) para as imagens esquerda e direita (estes mapas de seguimento de alvos serão usados somente na aproximação discreta onde assumimos o conhecimento da correspondência de pontos de interesse). A figura 7.1 mostra um exemplo das imagens obtidas sinteticamente,

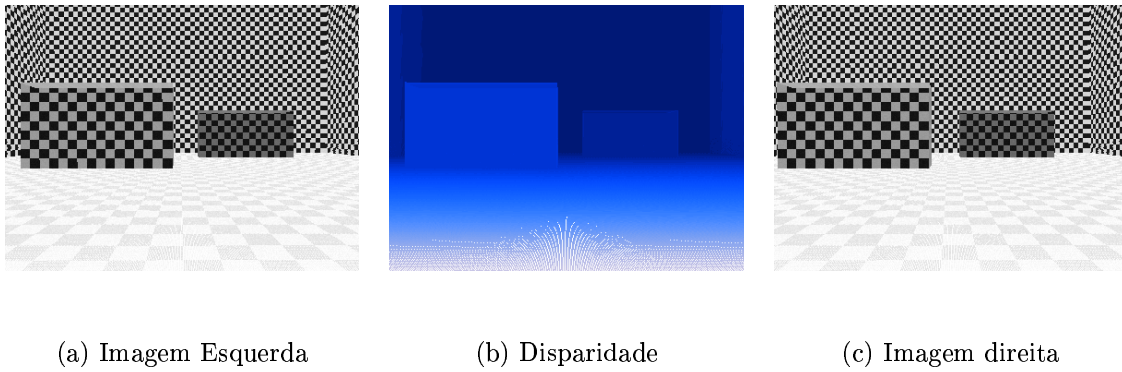


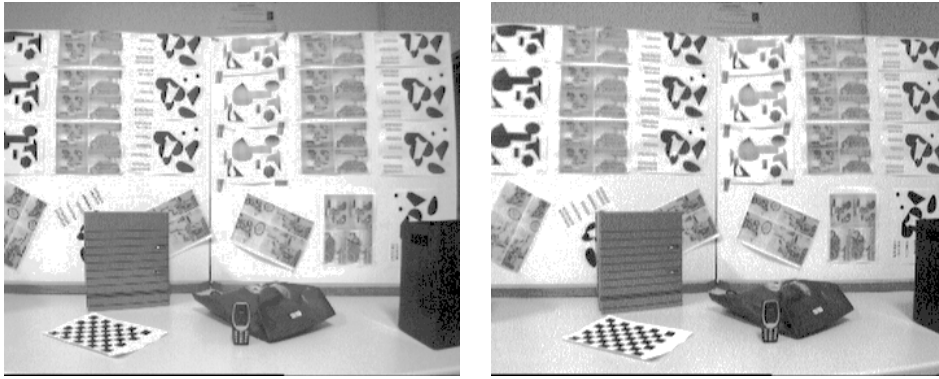
Figura 7.1: Imagens de intensidade e mapa de disparidade para um mundo sintético bem como o mapa de disparidade correspondente.

Os parâmetros usados nas sequências sintéticas aproximam-se dos parâmetros usados nas sequências de imagens reais e são: distância entre as câmaras de 130 mm (*baseline*); distância focal de ambas as câmaras igual a 5.0 mm e píxeis quadrangulares com 12 micrómetros de lado. O ponto principal foi colocado no centro da imagem e não foram considerados parâmetros de distorção.

## 7.2 Imagens reais

A aquisição das imagens reais foi efectuada, usando um manipulador Eshed com precisão de 0.1 mm nos movimentos de translação e de 0.1 graus nos movimentos de rotação. Um par de câmaras iguais foi acoplado à extremidade do manipulador usando um suporte construído para o efeito. O manipulador permitia todos os movimentos de translação e rotação, excepto o movimento de rotação em torno da direcção do eixo óptico (eixo *roll*). Foram, nestas condições, adquiridas diversas sequências de translação, rotação e mistas para três configurações de câmaras, com parâmetros aproximados iguais a:

- *baseline* de 130 mm; distância focal igual a 3.6 mm e píxeis de 12 micrómetros de lado



(a) Imagem Esquerda

(b) Imagem direita

Figura 7.2: Imagens de intensidade para um mundo real

- *baseline* de 110 mm; distância focal igual a 6.5 mm e píxeis de 11 micrómetros de lado
- *baseline* de 170 mm; distância focal igual a 6.5 mm e píxeis de 11 micrómetros de lado

As imagens foram adquiridas em ambientes interiores estruturados sem conhecimento *a priori* da sua organização. A cena era constituída principalmente por duas placas verticais para simular uma parede frontal e alguns objectos entre as câmaras e essas placas. A distância das câmaras e o tamanho dos objectos variaram de sequência para sequência e de configuração para configuração. Não foi efectuada qualquer manipulação nem controlo da iluminação ou sombras para estas aquisições. Devido à dificuldade de controlar a abertura das câmaras, foi necessário equalizar previamente os histogramas de intensidade de algumas sequências de imagens, usando as funções próprias do Matlab (`imadjust`, `imhist` e `histeq`). A figura 7.2 apresenta um exemplo de imagens adquiridas.

## 7.3 Algoritmos auxiliares

Os métodos apresentados na parte dos modelos teóricos desta dissertação usam como dados de entrada a profundidade dos pontos da cena. Nos testes efectuados usando imagens sintéticas, esta informação é conhecida por ter sido guardada do algoritmo de criação das sequências de imagens (na forma de disparidade e na forma de profundidade). Contudo, quando adquirimos sequências de imagens reais essa informação não está directamente disponível e, como tal, deverá ser calculada. Nos nossos testes usámos um software comercial (SVS [14]) que usa como entrada um par estéreo de imagens de câmaras fronto-paralelas e cujo resultado é o mapa de disparidades com uma resolução de 1/16 de píxel e uma gama de 128 níveis de disparidade.

Quanto às velocidades da imagem, também usadas nos algoritmos em causa, usámos o algoritmo proposto por Lucas e Kanade [3] que calcula o fluxo óptico nas imagens. Consideramos aqui que a aproximação das velocidades da imagem pelo fluxo óptico é suficiente. A profundidade em imagens reais é calculada usando a informação de disparidade e os parâmetros intrínsecos e extrínsecos das câmaras.

Quanto à informação de seguimento de pontos nas imagens, como já foi dito, o algoritmo de geração de sequências sintéticas guarda em ficheiro esta informação, mas nos testes em imagens reais não dispomos à partida destes dados. Uma vez que a contribuição deste trabalho não visa o seguimento de pontos de interesse (área designada na literatura anglo-saxónica por *feature tracking*), optámos por usar um algoritmo simples de detecção de cantos nas imagens que, com os parâmetros do movimento, procurava os pontos correspondentes.

## 7.4 Considerações acerca do valor verdadeiro de

### $V_Z$ - *ground truth*

A medição da qualidade de estimação paramétrica é o ponto de interesse desta dissertação e da maioria dos trabalhos, cujo objectivo seja a comparação de métodos diversos. A medição da qualidade necessita do conhecimento dos valores verdadeiros da grandeza física (ou virtual) que se pretende medir. No entanto, como veremos, nem sempre o conhecimento do valor verdadeiro, vulgarmente designado em literatura anglo-saxónica por *ground truth*, é fácil e tem ele próprio precisão. O nosso problema serve de ilustração ao que pretendemos mostrar.

No nosso estudo, foram inicialmente usadas imagens sintéticas para testar a qualidade da estimação de  $V_Z$  e dos parâmetros do movimento:  $\vec{\phi}$ . As sequências foram construídas a partir de um mundo virtual totalmente controlado, pelo que todos os valores verdadeiros de  $V_Z$ , das velocidades na imagem e dos parâmetros do movimento eram conhecidos com elevada precisão. Nenhum problema existe no cálculo dos valores verdadeiros.

Relativamente à experiência, usando sequências de dados reais, para além dos pares de imagens esquerda-direita, são conhecidos os valores da disparidade, estimados pelo software comercial SVS (*Small Vision System* - [14]) com resolução de 1/16 píxeis (registado em função da imagem esquerda). São também conhecidas as velocidades induzidas na imagem, calculadas usando o algoritmo Lucas-Kanade [3]. A profundidade de cada ponto é calculada através da equação  $Z = bf/d$ , usando a disparidade obtida.

Os valores verdadeiros que se pretendem obter são os de  $V_Z$  em cada ponto da imagem e das velocidades induzidas em cada ponto.

Começemos com os valores verdadeiros das velocidades induzidas na imagem. Os valores verdadeiros desta grandeza são dados pela equação 2.4. Dependem, genericamente,



mente, dos parâmetros do movimento (conhecidos), da distância focal (conhecida), das coordenadas na imagem (conhecidas para a imagem esquerda e estimadas para a imagem direita) e da profundidade (estimada). Pode, no entanto, verificar-se que apenas as parcelas relativas aos parâmetros de translação dependem directamente da profundidade.

Podemos, então, concluir o seguinte: em sequências de rotação pura, os valores verdadeiros das velocidades induzidas na imagem esquerda são conhecidos com precisão (limitada à precisão da calibração, isto é, do conhecimento dos parâmetros intrínsecos da câmara: focal e dimensão dos píxeis, e também dos parâmetros do movimento). Nas sequências de rotação, para a imagem direita, e nas sequências de translação, para ambas as imagens, o cálculo dos valores verdadeiros das velocidades na imagem depende ainda do valor da profundidade, em cada ponto, que, portanto, introduz incerteza e imprecisão naqueles valores.

Quanto aos valores verdadeiros de  $V_Z$ , temos os mesmos problemas. O valor verdadeiro é dado pela expressão  $V_Z = t_Z + \Omega_X Y - \Omega_Y X$ . Se o movimento for de translação pura, o valor de  $V_Z$  é igual a  $t_Z$ , conhecido, pelo que não há imprecisão no valor verdadeiro. Contudo, no caso de movimentos com componentes de rotação diferentes de zero, as coordenadas 3D  $X$  e  $Y$  de cada ponto são estimadas através da projecção em perspectiva:  $x = fX/Z$  e  $y = fY/Z$ , introduzindo assim imprecisão e incerteza no cálculo dos valores verdadeiros de  $V_Z$ , uma vez que passam a depender da profundidade.

Concluimos, pois, que o exacto conhecimento do valor, tanto das velocidades induzidas na imagem, como da velocidade 3D ao longo da direcção do eixo  $Z$  -  $V_Z$ , depende do exacto conhecimento da estrutura do mundo (coordenadas  $(X, Y, Z)$  de cada ponto usado), o que para sequências de imagens reais é difícil de obter.



# Capítulo 8

## Sequências sintéticas

Relativamente à organização dos capítulos de apresentação de resultados, optámos por separar os resultados usando imagens sintéticas e imagens reais. Dentro de cada uma destas, apresentaremos, primeiro, os resultados para a aproximação diferencial ( $V_Z$  em primeiro lugar e  $\vec{\phi}$  em segundo) e, depois, para a aproximação discreta ( $V_Z$  em primeiro lugar e  $\vec{\phi}$  em segundo). No final do espaço reservado às imagens sintéticas faremos uma análise comparativa dos resultados das duas aproximações. Das várias sequências testados, são apresentados os resultados de apenas três delas porque as restantes não acrescentam informação útil ao conjunto de resultados. Foi seleccionada uma sequência de translação ao longo da direcção do eixo óptico ( $t_Z$ ) - sequência A, uma de rotação ao longo do eixo vertical ( $\Omega_Y$ ) - sequência B - e outra sequência com movimento de translação ao longo dos três eixos coordenados e rotação ao longo do eixo dos  $X$  e dos  $Y$  - sequência C.

Juntamente com cada painel de gráficos respeitantes à estimação de  $V_Z$  ou  $\vec{\phi}$ , será escrito um pequeno texto para ajudar à leitura e interpretação dos resultados mostrados em gráfico e resumindo as principais observações a tirar de cada painel.

Uma vez que o conjunto de resultados é elevado e por se tornar difícil a sua leitura, decidimos apresentar nesta capítulo apenas os resultados da sequência C e

colocar os resultados das sequências A e B em apêndice.

Antes, contudo, de serem apresentados os resultados, serão apresentadas algumas considerações relacionadas com o método usado e com a apresentação de resultados.

## 8.1 Parâmetros das imagens sintéticas

Os parâmetros do movimento e valores verdadeiros de  $V_Z$  das sequências sintéticas analisadas, e cujos resultados são nesta dissertação reportados, discriminam-se na tabela 8.1. As unidades em que se encontram as velocidades de translação e rotação são, respectivamente, *mm/frame* e *graus/frame*. Utiliza-se o anglicismo *frame* para designar cada uma das imagens da sequência.

Seq.	$t_X$	$t_Y$	$t_Z$	$\Omega_X$	$\Omega_Y$	$\Omega_Z$	$V_Z$
A	0.0	0.0	-5.0	0.0	0.0	0.0	-5.0
B	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.25	0.0	0.25 X
C	10.0	-10.0	-15.0	0.1	0.1	0.0	-15.0+0.1(Y-X)

Tabela 8.1: Parâmetros do movimento nas sequências sintéticas.

O sistema de visão virtual usado tem as seguintes características: distância focal igual a 5.0 mm, *baseline* igual a 130 mm, píxeis quadrados de 12.0  $\mu m$ .

## 8.2 Método

O facto de gerarmos um conjunto de sequências de pares de imagens estéreo a partir de um mundo virtual, permite uma elevada flexibilidade na escolha dos parâmetros desse mesmo mundo. Vários estudos podem ser feitos com o objectivo de analisar a sensibilidade dos métodos (restrição de profundidade e restrição do fluxo binocular), em relação a qualquer um dos parâmetros. Podemos, por exemplo, estudar os

métodos apresentados em função dos parâmetros geométricos do sistema de visão (distância focal, *baseline*, dimensões dos píxeis e distorção na imagem), em função da magnitude da velocidade, em função do ruído aleatório adicionado aos valores verdadeiros (das disparidades, das velocidades e, por exemplo, das correspondências entre pontos), em função da resolução dos dados (nomeadamente da disparidade) e muitos mais.

Devido ao massivo conjunto de testes a efectuar e respectivos resultados a apresentar, resolvemos restringir a análise àqueles que nos pareceram mais importantes, reiterados pelas equações da análise da propagação da incerteza.

Faremos, então, a caracterização do erro nos métodos apresentados em função de:

- deslocamento entre duas imagens consecutivas, isto é, amplitude do vector velocidade. Usamos, para este efeito, o parâmetro STEP que toma os valores 1, 2, 4, 8, 16 e 32 e que corresponde ao salto entre imagens consecutivas nas sequências de imagens. Nas sequências de translação, o factor multiplicativo representa o número de distâncias focais percorridas entre cada duas imagens, isto é,  $t_z$  toma os valores  $f$ ,  $2f$ ,  $4f$ , ... Nas restantes sequências, corresponde a multiplicar cada um dos parâmetros do movimento por STEP.
- resolução da disparidade, isto é, o número de níveis que o valor da disparidade pode tomar entre dois valores inteiros. Usamos para tal o parâmetro ROUND que indica a resolução para a qual a disparidade deve ser arredondada. Um ROUND, por exemplo, igual a 4 significa que a disparidade pode tomar valores de 1/4 de píxel em 1/4 de píxel: 0; 0.25; 0.5; 0.75; ... Usamos, além da resolução infinita (dupla precisão), as resoluções de 1/4, 1/8, 1/16 e 1/32 píxeis.
- desvio padrão do ruído aleatório adicionado à disparidade. Usamos o parâmetro *STD\_DISP* que nos dá o desvio padrão do ruído aleatório adicionado à dis-

paridade, em píxeis, antes de esta ser arredondada (note-se que a disparidade só pode tomar valores dentro de um conjunto finito de patamares). O ruído adicionado é aleatório gaussiano de média zero e variância  $STD\_DISP^2$ . Usamos os valores de 0, 1/16, 1/8, 1/4 e 1/2.

- desvio padrão do ruído aleatório adicionado às velocidades na imagem. Usamos o parâmetros  $STD\_VEL$  que nos dá o desvio padrão do ruído adicionado às velocidades na imagem, em píxeis por frame. Este ruído aleatório é também gaussiano de média zero e variância  $STD\_VEL^2$ . São usados os valores 0, 1/16, 1/8, 1/4 e 1/2. Este parâmetro é usado apenas na aproximação diferencial.
- desvio padrão do ruído aleatório adicionado às correspondências entre pontos. Usamos o parâmetros  $STD\_TRACK$  que nos dá o desvio padrão do ruído adicionado às correspondências, em píxeis. Este ruído aleatório é também gaussiano de média zero e variância  $STD\_TRACK^2$ . São usados os valores 0, 1/16, 1/8, 1/4 e 1/2. Este parâmetro é usado apenas na aproximação discreta.
- número de pontos de interesse. Usamos o parâmetro  $FEATURES$  que indica o número de pontos (*features*) usados para executar os algoritmos de cálculo de  $V_Z$  e dos parâmetros do movimento. Usamos 128, 512, 2096 e 8192 pontos. Este parâmetro é usado apenas na aproximação discreta.

### 8.3 Apresentação dos resultados

O principal objectivo desta dissertação é fazer uma análise comparativa de dois métodos para o cálculo da velocidade 3D dos pontos da cena na direcção do eixo  $Z$  e dos parâmetros do movimento, usando duas aproximações diferentes: a aproximação diferencial e a aproximação discreta. Neste contexto, interessa comparar sempre que possível o erro de estimação entre os dois métodos e, secundariamente, o erro entre

as duas aproximações.

Desta forma, a apresentação dos resultados para  $V_Z$  é feita através de duas estatísticas principais: o erro relativo médio (ERM) e o desvio padrão médio (DPM). A estatística ERM dá-nos, pois, o valor médio amostral do erro relativo positivo, calculado em todos os pontos válidos (onde podemos calcular  $V_Z$ ) e nas várias imagens da sequência (em valor absoluto, não havendo, portanto, cancelamento do erro). A estatística DPM dá-nos o desvio padrão amostral de ERM.

É usada, adicionalmente, uma estatística. O erro relativo da média de  $V_Z$  (ERMédia), isto é, o erro relativo do valor médio de  $V_Z$ , calculado em todos os pontos da imagem onde os valores de  $V_Z$  são válidos e em todas as imagens da sequência. Esta última medida só é usada nas sequências onde o valor de  $V_Z$  é igual para todos os pontos da imagem, ou seja, para as sequências de translação ou para as sequências cujos parâmetros de rotação sejam reduzidos relativamente à componente de translação.

A existência de um elevado número de pontos de estimação, onde o valor estimado é muito afastado do valor correcto, degrada substancialmente o valor das estatísticas calculadas. Estes pontos designam-se, como já foi atrás referido, por *outliers*. A existência destes pontos, ainda que em número reduzido, pode fazer aumentar para valores muito elevados as estatísticas de situações onde o erro é reduzido na esmagadora maioria dos pontos. Desta forma, e para reduzir a influência destes pontos, decidimos retirar os primeiros e últimos decis das distribuições de  $V_Z$ . A ordenação é feita segundo o valor de  $V_Z$  estimado. Os valores mais elevados em valor absoluto são retirados antes de calculadas as estatísticas.

A apresentação dos resultados para os parâmetros do movimento (três velocidades de translação e três velocidades de rotação) é feita, usando o erro relativo médio (ERM) que, neste contexto, é somente a média dos valores estimados para o parâmetro em causa, para todas as imagens da sequência (pois só se estima um valor

por imagem), e o erro absoluto médio (EAM) que é a média dos erros absolutos.

No caso dos parâmetros cujo valor verdadeiro é zero, usamos, como alternativa ao ERM, o EAM. O erro absoluto é uma estatística que, por si só, não transporta muita informação pois negligencia a gama de variação dos parâmetros em causa. Neste caso, o erro absoluto justifica-se pelo facto de o valor verdadeiro de alguns parâmetros ser zero, tornando qualquer erro relativo infinito (excepto para a igualdade). Para os parâmetros de movimento, expressos em milímetros, e cujo valor verdadeiro é zero, o EAM é escalado pela distância focal. Desta forma, o EAM será apresentado para estes parâmetros em número de distâncias focais.

Os gráficos da apresentação de resultados são legendados usando as seguintes siglas:

- DCCE - método da restrição de profundidade .
- DV - método da restrição do fluxo binocular.
- S? - STEP=? - o parâmetro STEP, que indica o factor multiplicativo das velocidades, tem o valor ?.
- R? - ROUND=? - o parâmetro ROUND, que indica o inverso da resolução do mapa de disparidade, tem o valor ?.
- D? - *STD\_DISP*=? - o parâmetro *STD\_DISP*, que indica o desvio padrão do ruído aleatório adicionado ao mapa de disparidade, tem o valor ?, expresso em píxeis.
- V? - *STD\_VEL*=? - o parâmetro *STD\_VEL*, que indica o desvio padrão do ruído aleatório adicionado às velocidades na imagem, tem o valor ?, expresso em píxeis. Esta sigla é usada apenas na aproximação diferencial.
- T? - *STD\_TRACK*=? - o parâmetro *STD\_TRACK*, que indica o desvio



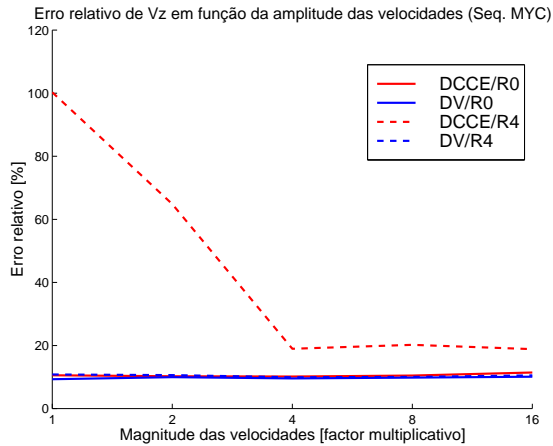
padrão do ruído aleatório adicionado às correspondências entre pontos, tem o valor  $\sigma$ , expresso em píxeis. Esta sigla é usada apenas na aproximação discreta.

- $N_{FEATURES}$  - o parâmetro  $N_{FEATURES}$ , que indica o número de pontos de interesse usados, na aproximação discreta, tem o valor  $N_{FEATURES}$ . Sigla usada apenas na aproximação discreta.

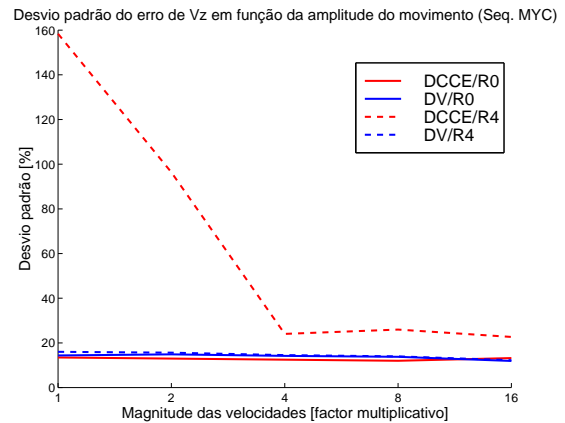
## 8.4 Aproximação diferencial

Serão, nas páginas seguintes, apresentados os resultados obtidos com a sequência de imagens sintética  $C$ , com movimento de translação sobre os eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  e de rotação sobre os eixos  $X$  e  $Y$ . Os resultados apresentados são referentes à aproximação diferencial.

$V_Z$	<b>Efeito da magnitude das velocidades</b>	Seq. sintética C DIF.
-------	--	--------------------------



(a) ERM

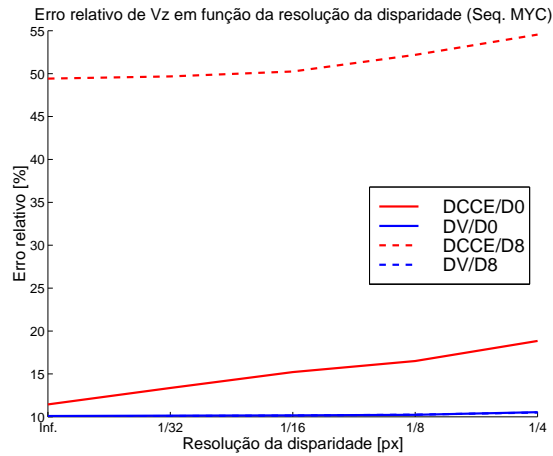


(b) DPM

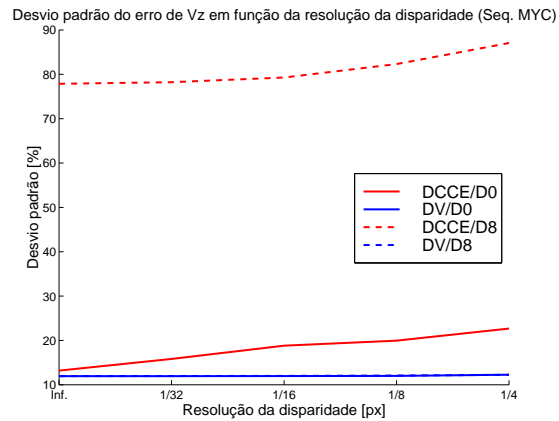
Ao observar este painel de gráficos, notamos que ambos os métodos apresentam uma sensibilidade muito reduzida do erro relativo médio do valor de  $V_Z$  quando a velocidade aumenta, isto é, quando o deslocamento entre imagens consecutivas aumenta. Temos, além disso, o método DV a apresentar resultados semelhantes aos do método DCCE, para resoluções elevadas e melhores para resoluções baixas.

As afirmações feitas para o erro ERM são também válidas para o desvio padrão DPM.

$V_Z$	<b>Efeito da resolução da disparidade</b>	Seq. sintética C DIF.
-------	---	--------------------------



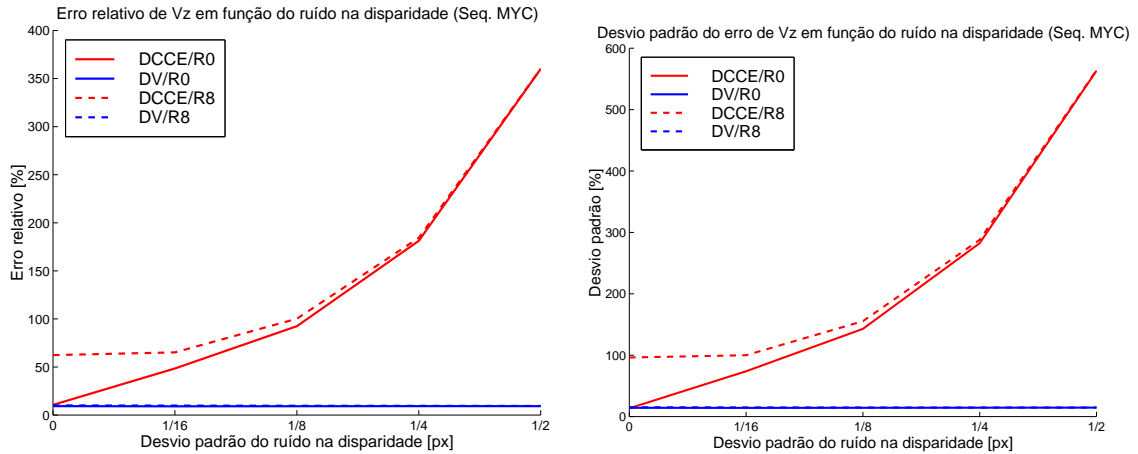
(a) ERM



(b) DPM

Para valores diferentes da resolução da disparidade, o método DV não varia substancialmente o valor, tanto do seu erro relativo médio como do desvio padrão. O método DCCE, contudo, apresenta uma subida de ambos os parâmetros com a redução da resolução da disparidade. O método DCCE, que apresenta valores de erro e sua dispersão superiores aos apresentados pelo método DV, tem um crescimento do desvio padrão DPM mais rápido do que o crescimento do erro ERM.

$V_Z$	<b>Efeito do ruído aleatório da disparidade</b>	Seq. sintética C DIF.
-------	---	--------------------------



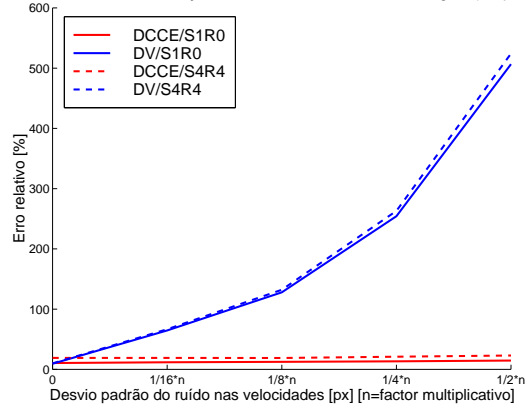
(a) ERM

(b) DPM

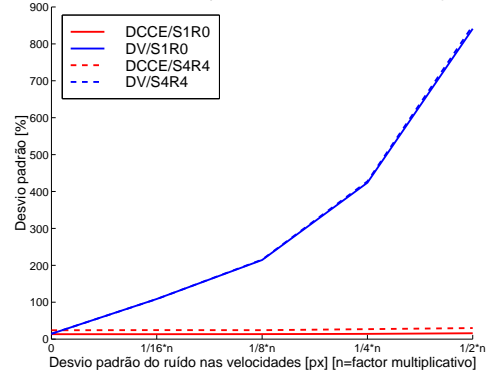
Quanto à influência do ruído adicionado à disparidade no cálculo de  $V_Z$ , podemos observar que o método DV é praticamente insensível a este factor (ruído na disparidade), mantendo o seu erro em valores relativamente baixos. O método DCCE, apresenta subida acentuada do ERM em função do ruído na disparidade. Os erros são menores no método DV.

Quanto ao desvio padrão, observa-se, no método DV, uma manutenção do valor da dispersão constante e um forte crescimento no método DCCE. Os valores apresentados por este último método são substancialmente superiores aos do método DV.

$V_Z$	<b>Efeito do ruído aleatório nas velocidades na imagem</b>	Seq. sintética C DIF.
-------	--	--------------------------

Erro relativo de  $V_z$  em função do ruído nas velocidades na imagem (Seq. MYC)

(a) ERM

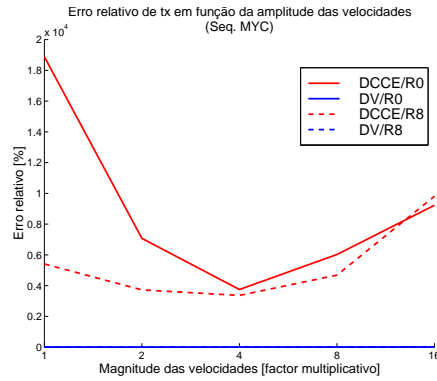
Desvio padrão do erro de  $V_z$  em função do ruído nas velocidades na imagem (Seq. MYC)

(b) DPM

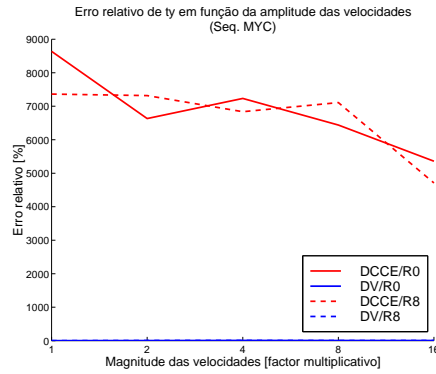
Quando o desvio padrão do ruído adicionado às velocidades na imagem cresce, no método DV, cresce também o erro relativo médio e, no método DCCE, não se notam alterações significativas. Observa-se, também, que para os valores do ruído testado, exceptuando o caso em que não há ruído adicionado, o erro é sempre menor no método DCCE.

Quanto ao desvio padrão, o método DCCE mostra-se quase insensível, contrariamente ao método DV, que apresenta uma forte sensibilidade relativamente a este parâmetro (ruído nas velocidades).

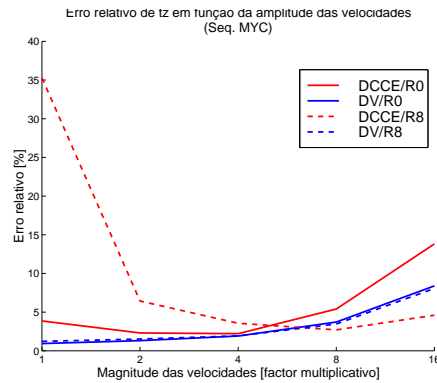
$\vec{\phi}$	<b>Efeito da magnitude das velocidades</b>	Seq. sintética C DIF.
--------------	--	--------------------------



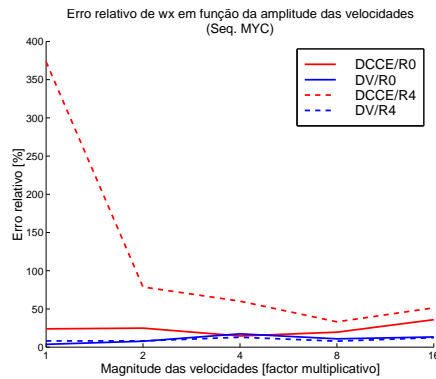
(a)  $t_X$



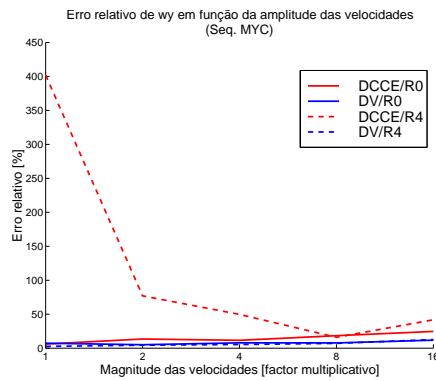
(b)  $t_Y$



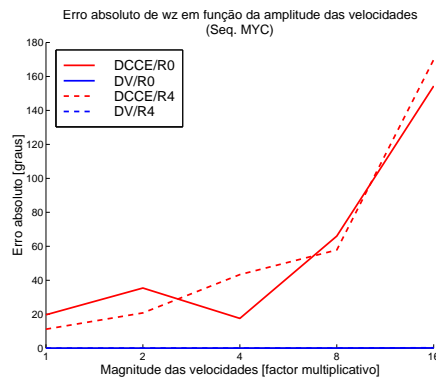
(c)  $t_Z$



(d)  $\Omega_X$



(e)  $\Omega_Y$



(f)  $\Omega_Z$

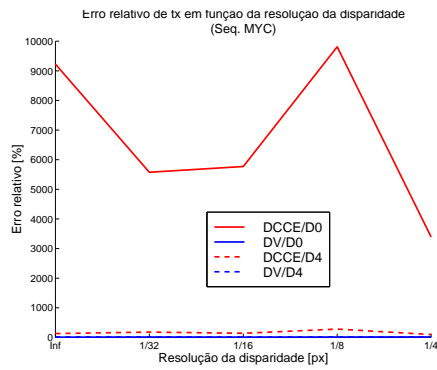
O único parâmetro do movimento para o qual não pode ser calculada uma medida do erro relativo é o  $\Omega_Z$ , que apresenta valores elevados e crescentes para o erro absoluto no caso do método DCCE. O método DV apresenta valores muito reduzidos com ligeira tendência para crescer com o aumento da velocidade.

Com relação a todos os outros parâmetros, o método DV apresenta valores reduzidos para os erros relativos (1-3% para os parâmetros de translação e 5-8% para os parâmetros de rotação) e com um crescimento de fraco declive com o aumento da amplitude das velocidades. O método DCCE, por seu lado, apresenta valores muito superiores para o erro, exceptuando para o parâmetro  $t_Z$  em que apesar de superiores, os erros relativos são uma ou duas ordens de grandeza inferiores, relativamente aos outros parâmetros.

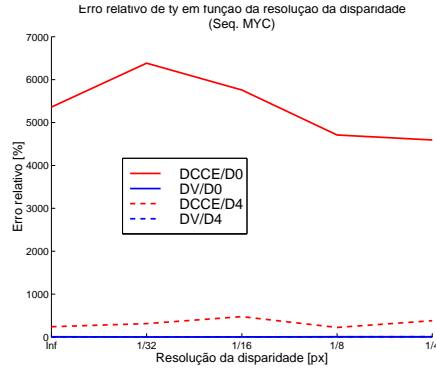
Observa-se que, na totalidade dos parâmetros, o erro relativo tem a forma aproximada de uma parábola, em que o mínimo varia de método para método e de parâmetro para parâmetro. O método DV, que apresenta crescimentos mais lentos, apresenta o mínimo para amplitudes de deslocamento inferiores relativamente ao método DCCE. Além disso, em praticamente todas as situações, mostra-se melhor do que o método DCCE.



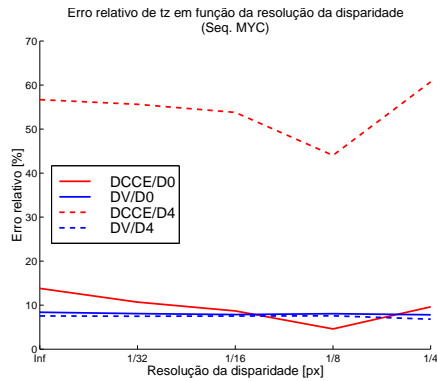
$\vec{\phi}$	<b>Efeito da resolução da disparidade</b>	Seq. sintética C DIF.
--------------	---	--------------------------



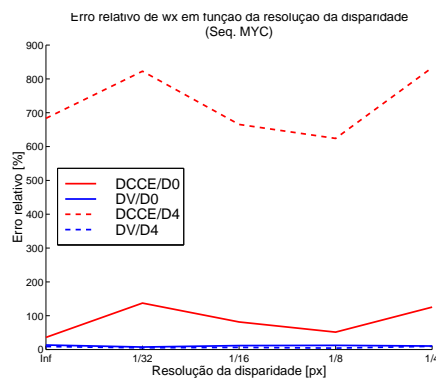
(a)  $t_X$



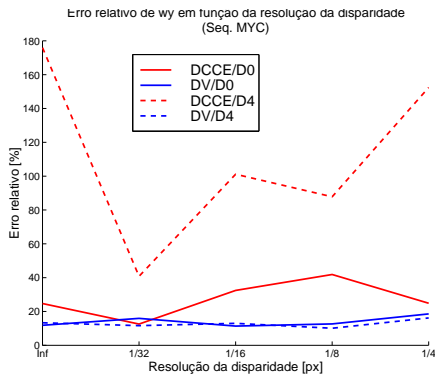
(b)  $t_Y$



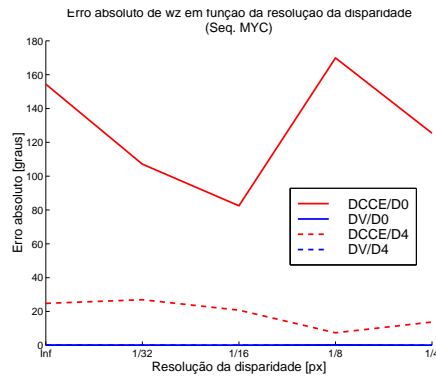
(c)  $t_Z$



(d)  $\Omega_X$



(e)  $\Omega_Y$



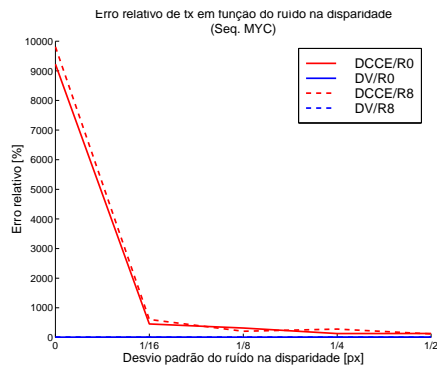
(f)  $\Omega_Z$

Em relação à resolução da disparidade, o método DV apresenta valores baixos para todos os erros relativos e também para o erro absoluto de  $\Omega_Z$ . Além disso, não se nota nenhuma tendência clara de crescimento ou descida do seu valor com a diminuição da resolução da disparidade.

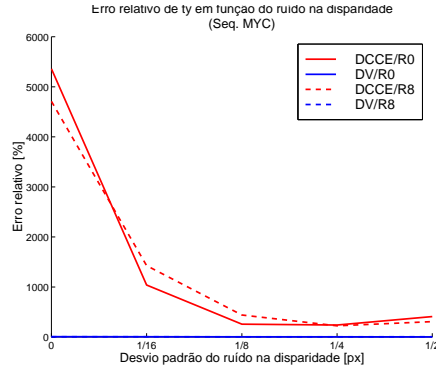
Quanto ao método DCCE, observa-se que na maioria dos parâmetros o valor do erro oscila com ligeiras subidas ou ligeiras descidas, não havendo, portanto, um comportamento exclusivamente de subida ou descida. Os valores dos parâmetros  $t_Z$  e  $\Omega_Y$  são, apesar de elevados, uma ou duas ordens de grandeza inferiores aos erros dos restantes parâmetros, conseqüentemente muito elevados.

O erro absoluto, do método DCCE, no parâmetro  $\Omega_Z$  apresenta valores muito oscilantes (isto é, muito dispersos).

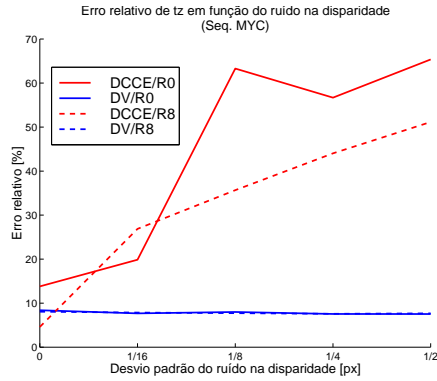
$\vec{\phi}$	<b>Efeito do ruído aleatório da disparidade</b>	Seq. sintética C DIF.
--------------	---	--------------------------



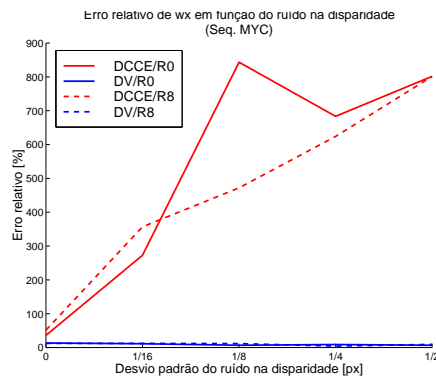
(a)  $t_X$



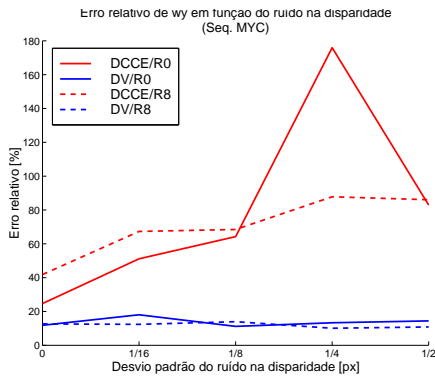
(b)  $t_Y$



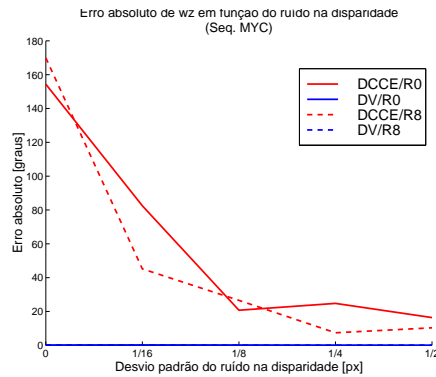
(c)  $t_Z$



(d)  $\Omega_X$



(e)  $\Omega_Y$



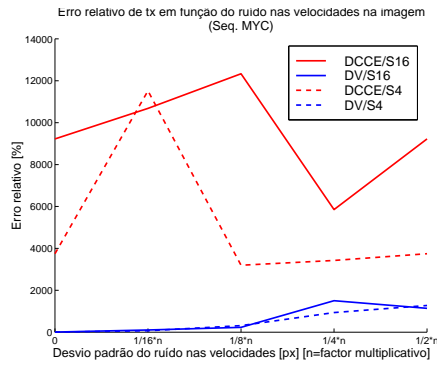
(f)  $\Omega_Z$

Relativamente ao método DV, não se notam grandes variações dos valores do erro relativo e absoluto com o aumento do desvio padrão do erro adicionado ao mapa de disparidades. Os erros apresentados são relativamente baixos, rondando os 10%.

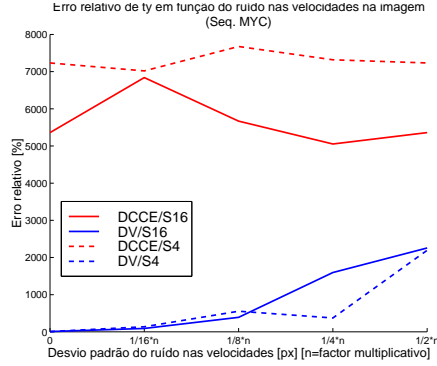
Quanto ao método DCCE, apresenta uma clara tendência de descida do valor do erro para os parâmetros  $t_X$ ,  $t_Y$  e  $\Omega_Z$ . As razões dessa descida, quando o normal seria o contrário, podem dever-se ao aumento da estabilidade numérica, nestes parâmetros, que são aqueles onde se notam com maior importância esses efeitos.

Nos restantes três parâmetros, o erro relativo de estimação é muito sensível ao aumento do ruído na disparidade. O parâmetro  $t_Z$  é o único, no entanto, a apresentar erros inferiores a 50%.

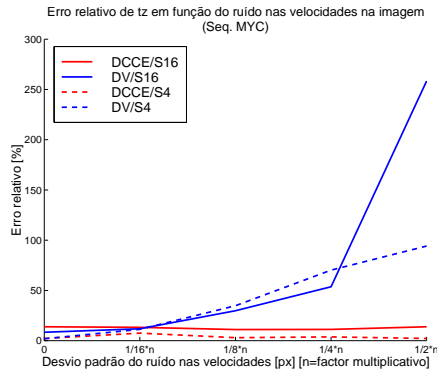
$\phi$	<b>Efeito do ruído aleatório nas velocidades na imagem</b>	Seq. sintética C DIF.
--------	--	--------------------------



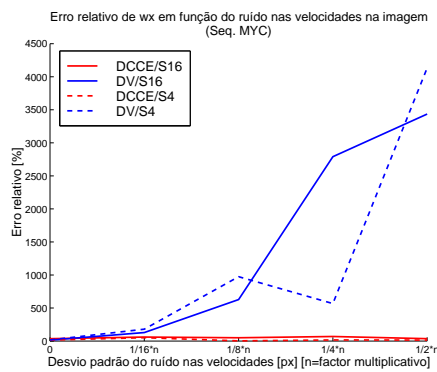
(a)  $t_x$



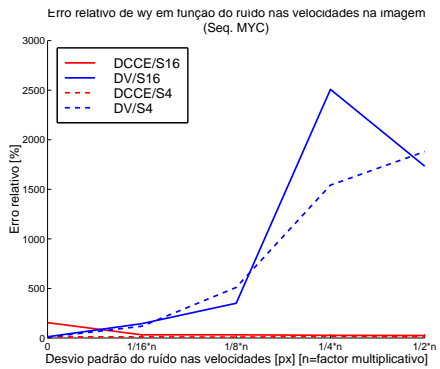
(b)  $t_y$



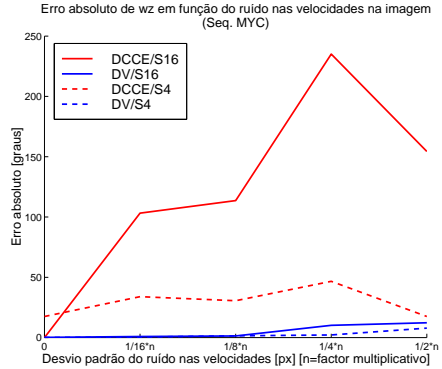
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$



(f)  $\Omega_z$

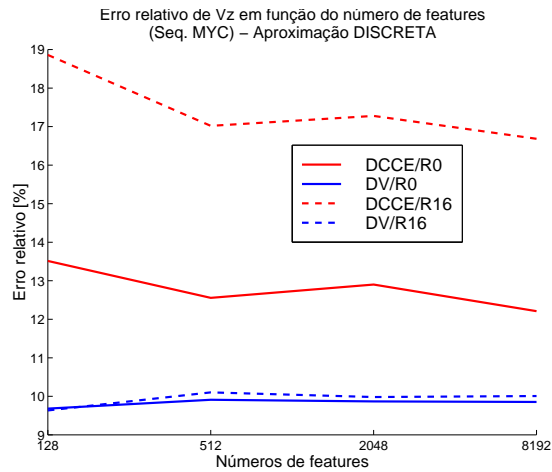
O método DCCE apresenta erros relativos com pequenas alterações, contudo elevados, em relação ao aumento do ruído adicionado às velocidades. O método DV, por seu lado, apresenta um forte aumento em todos os erros relativos e absoluto de todos os parâmetros em função do ruído nas velocidades.

O erro apresentado pelo método DV é muito elevado para quase todos os níveis de ruído adicionado às velocidades.

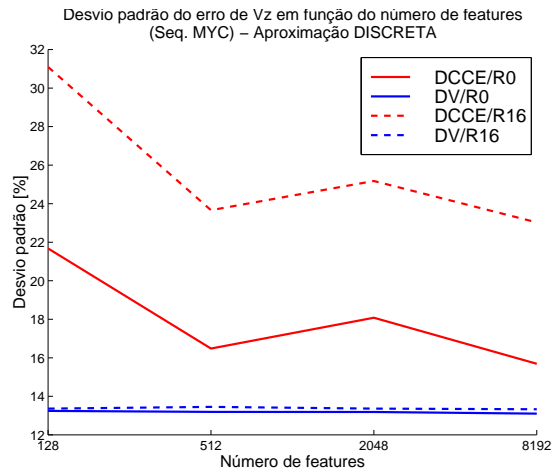
## 8.5 Aproximação discreta

Serão, nas páginas seguintes, apresentados os resultados obtidos com a sequência de imagens sintética  $C$ , com movimento de translação sobre os eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  e de rotação sobre os eixos  $X$  e  $Y$ . Os resultados apresentados são referentes à aproximação discreta.

$V_Z$	<b>Efeito do número de pontos de interesse</b>	Seq. sintética C DISC.
-------	--	---------------------------



(a) ERM

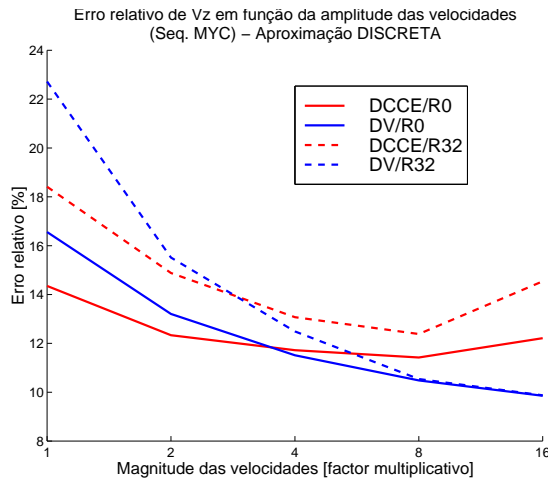


(b) DPM

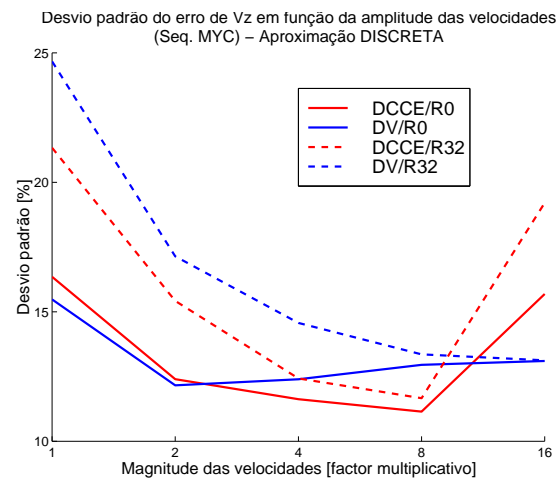
A sensibilidade da estimação de  $V_Z$  de ambos os métodos relativamente ao número de pontos de interesse é reduzida para a gama testada (128 a 8192). Na verdade, tanto no ERM como no DPM, o método DV apresenta praticamente sempre os mesmos valores, ao passo que o método DCCE apresenta uma ligeira tendência de descida. O método DV apresenta erros e desvio padrão menores do que o método DCCE.



$V_Z$	<b>Efeito da magnitude das velocidades</b>	Seq. sintética C DISC.
-------	--	---------------------------



(a) ERM

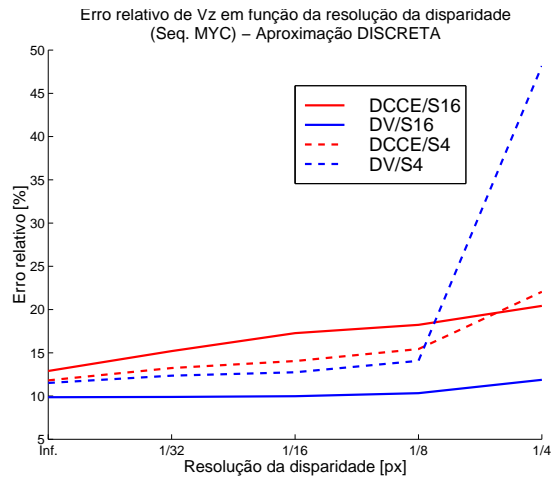


(b) DPM

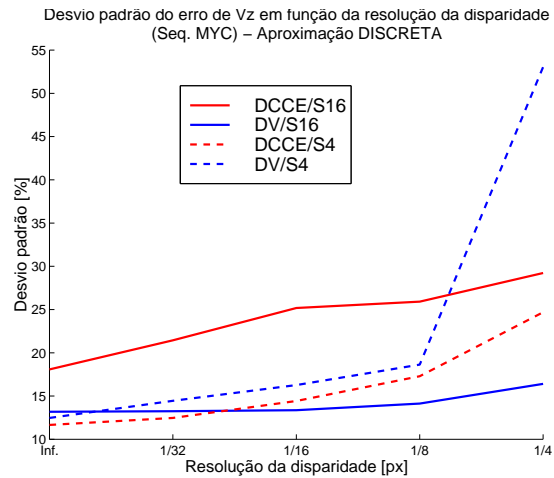
Analisando este conjunto de gráficos podemos verificar que com o aumento do factor multiplicativo aplicado às velocidades, o erro relativo médio de  $V_Z$  e o desvio padrão descem, tanto para o método DV, como para o método DCCE. Verifica-se, contudo, para o método DCCE, para o factor multiplicativo de 32, que o erro é superior do que para o factor 16. O método DCCE apresenta valores de erro menores do que o método DV, para velocidades mais pequenas e, maiores para velocidades maiores.

Para o desvio padrão as mesmas afirmações são verdadeiras. Nota-se, contudo, uma estabilização, do seu valor, mais cedo (factores multiplicativos menores).

$V_Z$	<b>Efeito da resolução da disparidade</b>	Seq. sintética C DISC.
-------	---	---------------------------



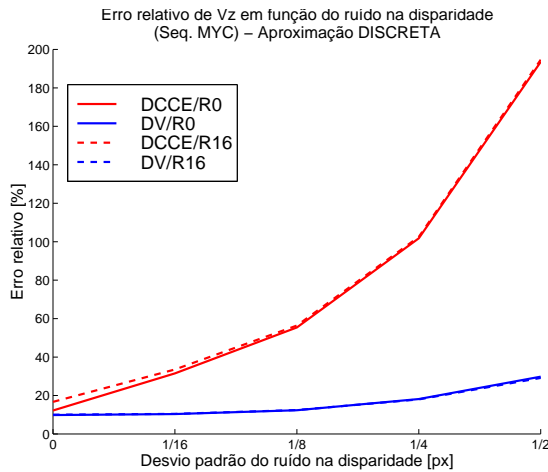
(a) ERM



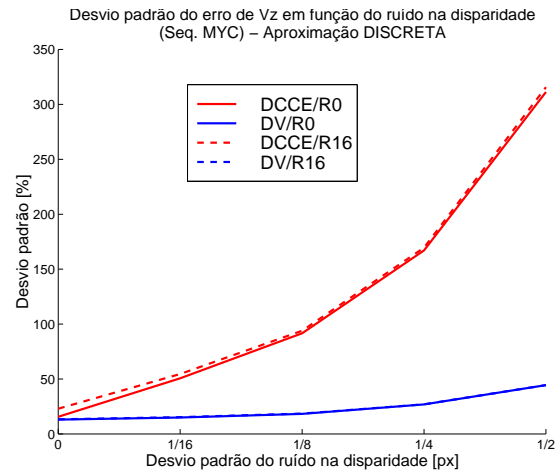
(b) DPM

Com a redução da resolução da disparidade, ambos os métodos apresentam subida no erro e no seu desvio padrão. O método DV, que apresenta valores de erro menores do que o método DCCE para a generalidade dos casos, apresenta um valor muito elevado para a resolução de 1/4 de pixel, superior ao apresentado pelo método DCCE. De um modo geral, contudo, o método DV é melhor.

$V_Z$	<b>Efeito do ruído aleatório da disparidade</b>	Seq. sintética C DISC.
-------	---	---------------------------



(a) ERM

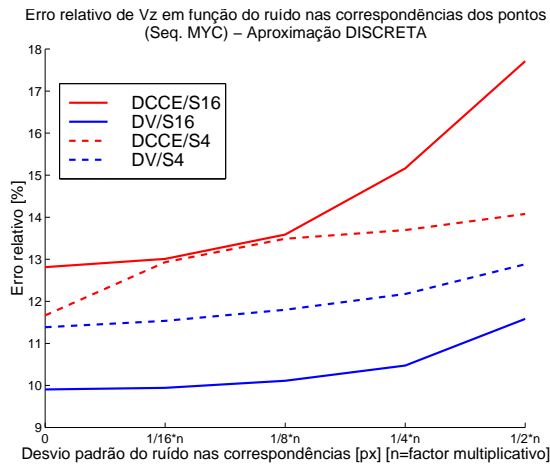


(b) DPM

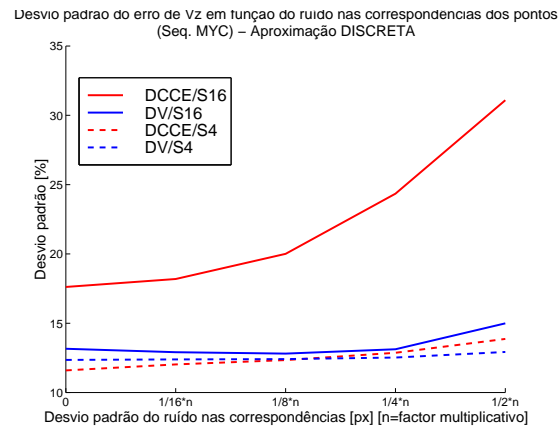
Quanto à sensibilidade relativamente ao ruído aleatório adicionado ao mapa de disparidade, verificamos que o método DCCE é, sem dúvida, muito mais sensível do que o método DV. Ambos os métodos apresentam, no entanto, um crescimento tanto do erro como do seu desvio padrão quando o ruído aumenta. O método DCCE apresenta valores de erro muito elevados.

Estes resultados eram previsíveis devido às equações de propagação da incerteza nos métodos.

$V_Z$	<b>Efeito do ruído aleatório nas correspondências de pontos</b>	Seq. sintética C DISC.
-------	---	---------------------------



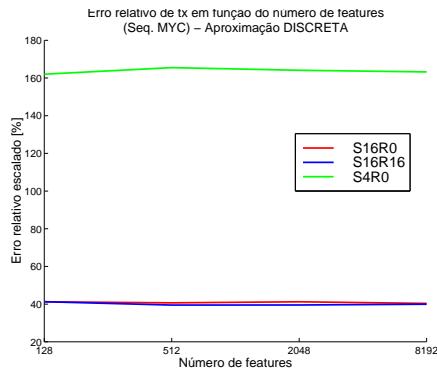
(a) ERM



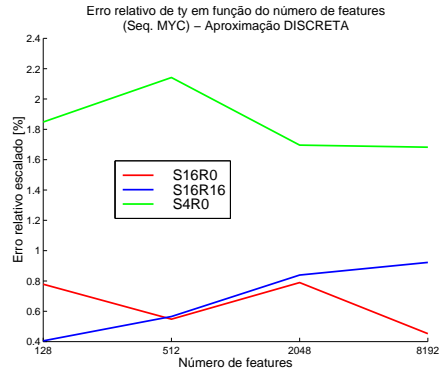
(b) DPM

Na generalidade dos casos, o ruído acrescentado às correspondências de pontos faz aumentar ligeiramente o erro de  $V_Z$ , bem como a sua dispersão. Esta afirmação é válida para ambos os métodos. O método DCCE apresenta piores resultados do que o método DV, especialmente para velocidades muito elevadas ( $S=16$ ).

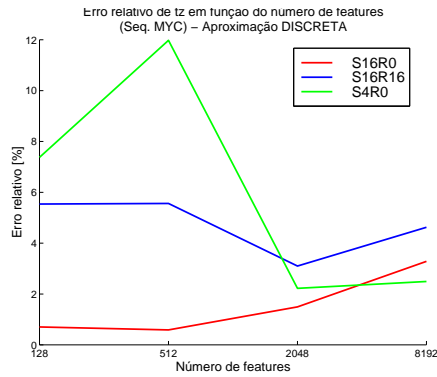
$\phi$	<b>Efeito do número de pontos de interesse</b>	Seq. sintética C DISC.
--------	--	---------------------------



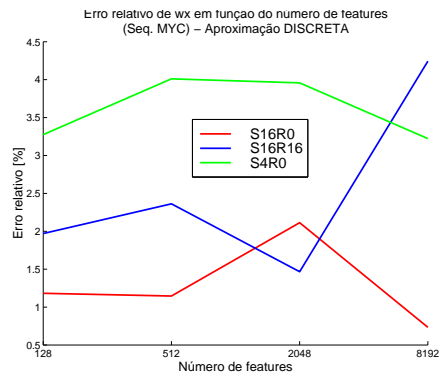
(a)  $t_x$



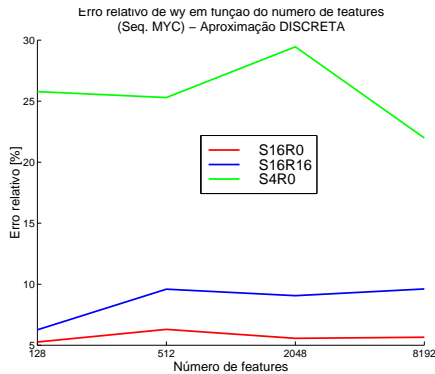
(b)  $t_y$



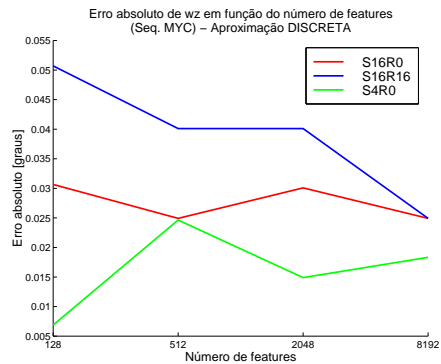
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$

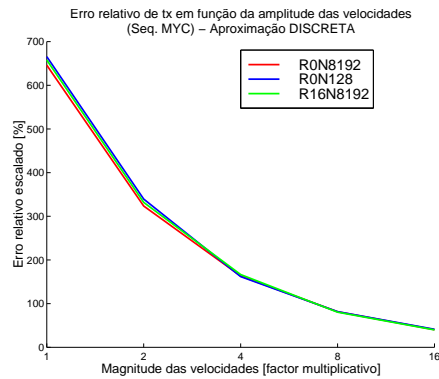


(f)  $\Omega_z$

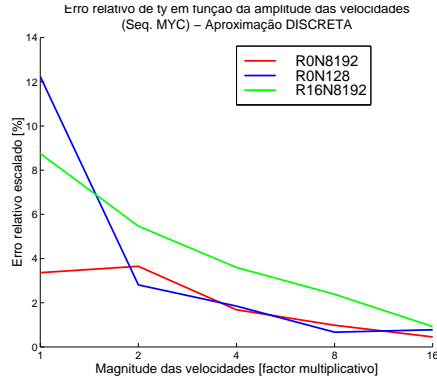
O erro relativo e absoluto de todos os parâmetros do movimento sofre muito poucas alterações para os valores do número de pontos de interesse testados. O erro mantém-se sensivelmente constante.

Exceptuando para o parâmetros  $t_X$ , que sofre de problemas de condicionamento numérico, o erro de estimação de todos os outros parâmetros apresenta valores reduzidos.

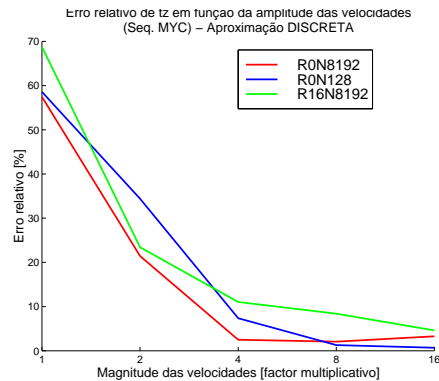
$\vec{\phi}$	<b>Efeito da magnitude das velocidades</b>	Seq. sintética C DISC.
--------------	--	---------------------------



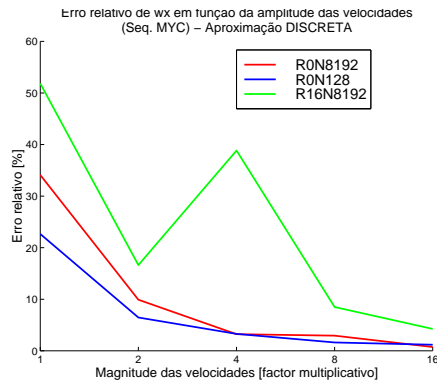
(a)  $t_X$



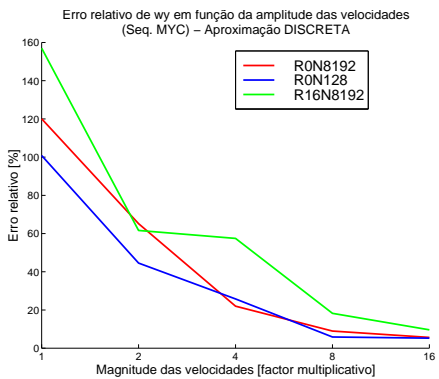
(b)  $t_Y$



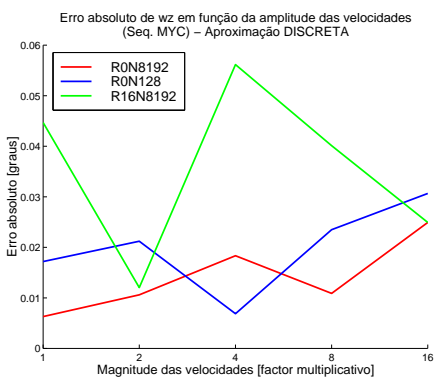
(c)  $t_Z$



(d)  $\Omega_X$



(e)  $\Omega_Y$

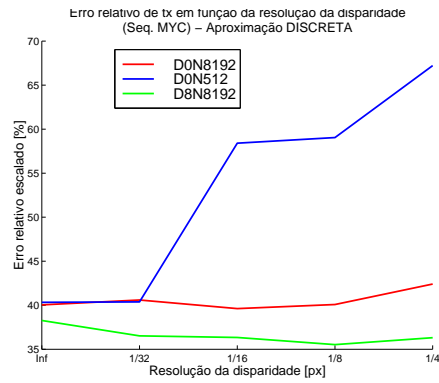


(f)  $\Omega_Z$

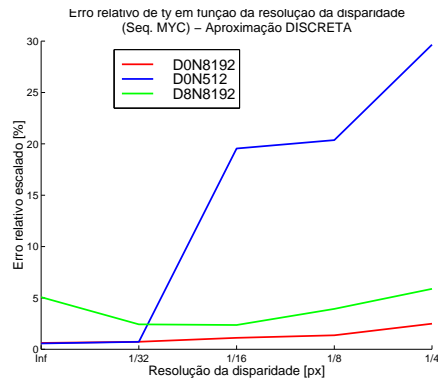
Em todos os parâmetros do movimento diferentes de zero, para deslocamentos maiores entre as imagens o erro de estimação dos parâmetros é menor. Os erros dos parâmetros  $t_Y$ ,  $t_Z$ ,  $\Omega_X$  e  $\Omega_Y$  são, para deslocamentos grandes, todos inferiores a 10%. O erro do parâmetro  $t_X$ , apesar de baixar com o aumento do deslocamento mantém-se sempre muito elevado. Quanto ao parâmetro  $\Omega_Z$ , o seu erro absoluto é relativamente pequeno (da ordem das centésimas de grau) mas não apresenta tendência de descida nem de subida.



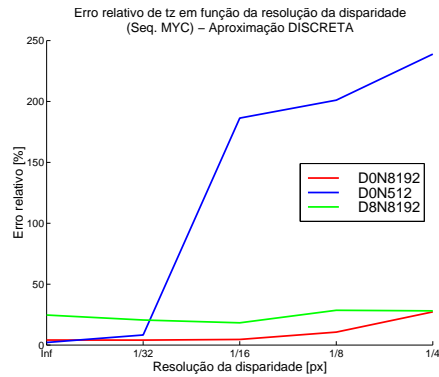
$\phi$	<b>Efeito da resolução da disparidade</b>	Seq. sintética C DISC.
--------	---	---------------------------



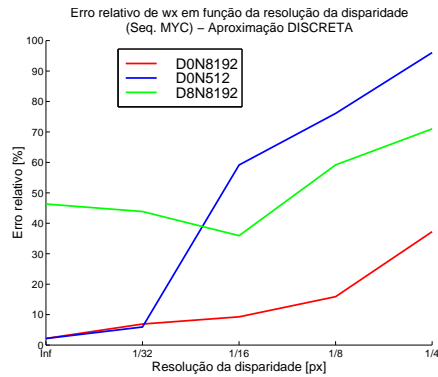
(a)  $t_x$



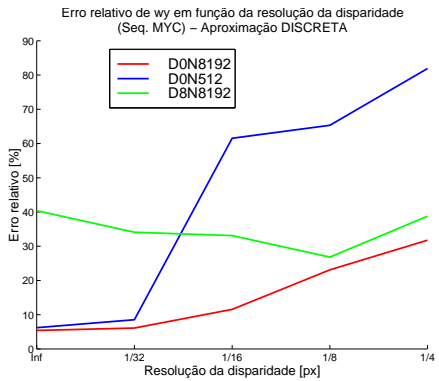
(b)  $t_y$



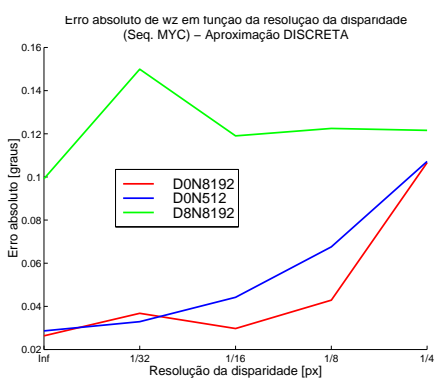
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$

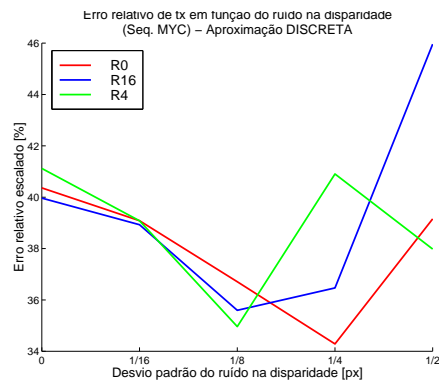


(f)  $\Omega_z$

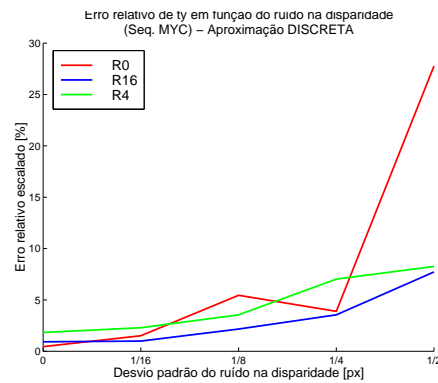
Apesar de apresentar valores de erro de estimação relativamente reduzidos, para todos os parâmetros de movimento há uma subida do seu valor com a redução da resolução da disparidade.

Um efeito interessante, que pode ser observado neste painel, é o facto de, para um número de pontos de interesse relativamente baixo (512), a sensibilidade com a resolução da disparidade ser muito superior do que se forem usados mais pontos de interesse. Na verdade, este facto pode justificar-se com o cancelamento dos erros de quantização que se torna mais eficaz se houver um maior número de pontos de interesse.

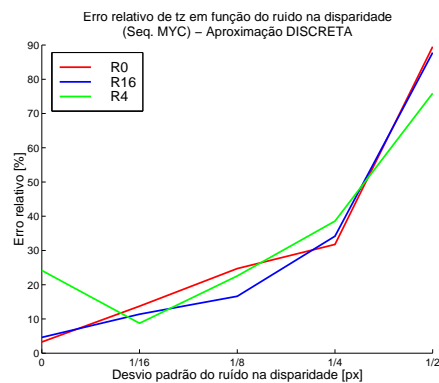
$\vec{\phi}$	<b>Efeito do ruído aleatório da disparidade</b>	Seq. sintética C DISC.
--------------	---	---------------------------



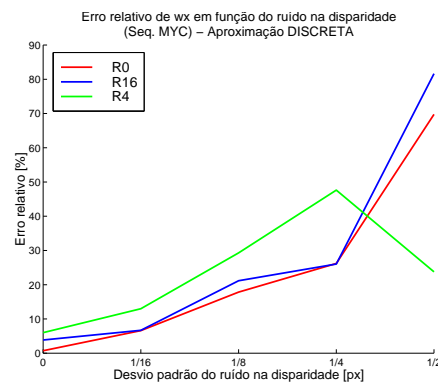
(a)  $t_X$



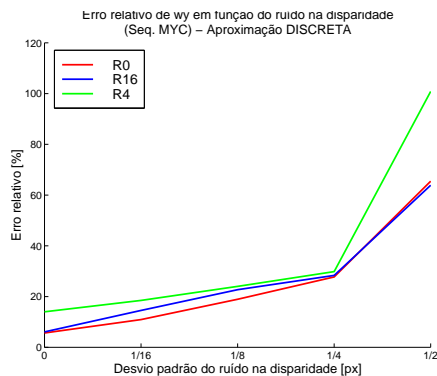
(b)  $t_Y$



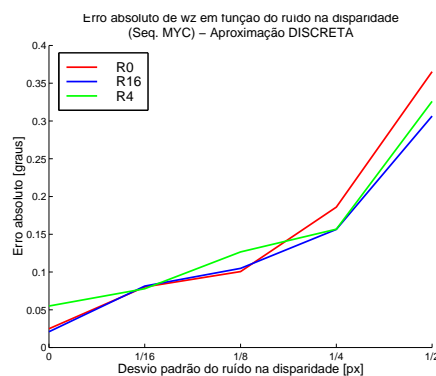
(c)  $t_Z$



(d)  $\Omega_X$



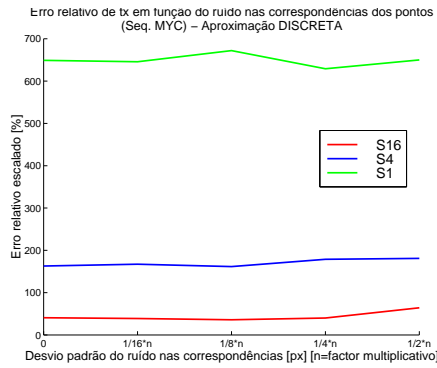
(e)  $\Omega_Y$



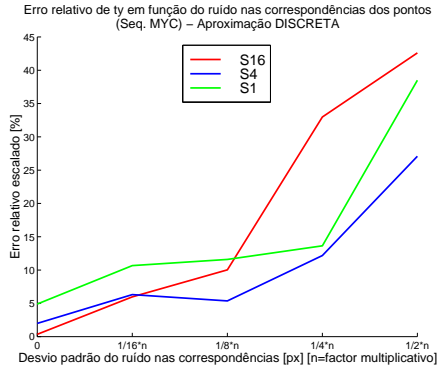
(f)  $\Omega_Z$

Para todos os parâmetros, o erro relativo e absoluto de estimação cresce com o aumento do desvio padrão do ruído aleatório adicionado ao mapa de disparidades. Na quase totalidade dos parâmetros o erro de estimação alcança rapidamente valores elevados.

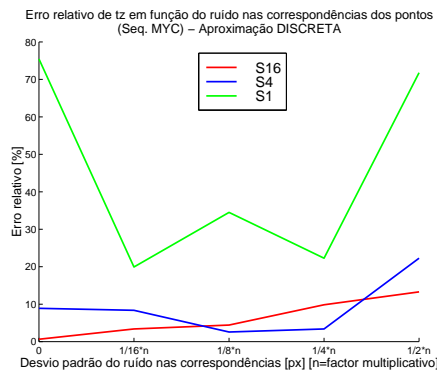
$\phi$	<b>Efeito do ruído aleatório nas correspondências dos pontos</b>	Seq. sintética C DISC.
--------	--	---------------------------



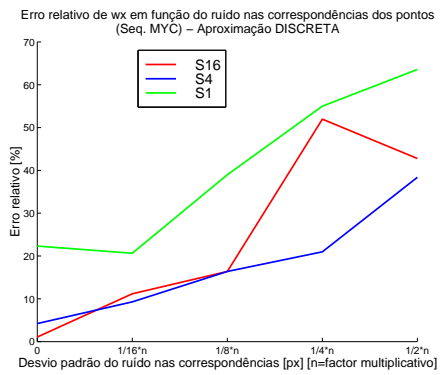
(a)  $t_X$



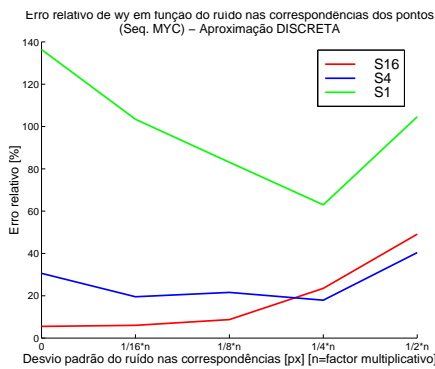
(b)  $t_Y$



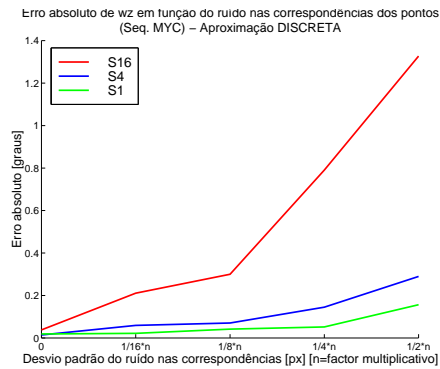
(c)  $t_Z$



(d)  $\Omega_X$



(e)  $\Omega_Y$



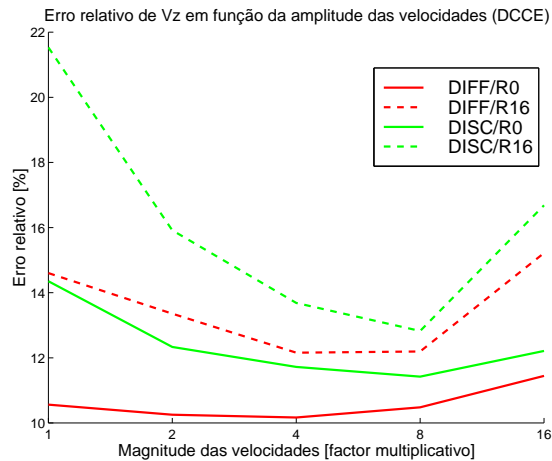
(f)  $\Omega_Z$

O comportamento da estimação dos parâmetros de movimento perante um crescente ruído aleatório adicionado às correspondências dos pontos de interesse apresenta, na generalidade dos casos, um crescimento do erro. Para velocidades reduzidas ( $S=1$ ), em alguns parâmetros o erro descrece para os primeiros valores do ruído aleatório e volta a crescer para os seus maiores valores. Contrariamente aos restantes parâmetros, no caso de  $t_X$ , o erro é muito elevado.

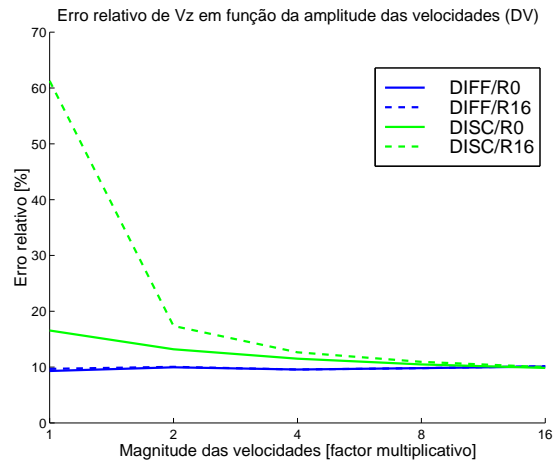
## 8.6 Diferencial *versus* Discreta

Nesta secção, são comparadas as aproximações diferencial e discreta para cada um dos métodos, DCCE e DV, independentemente. Os resultados correspondem à sequência de imagens sintética C.

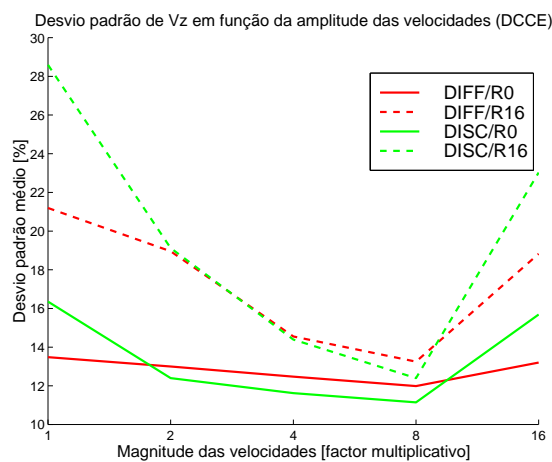
$V_z$	<b>Efeito da magnitude do deslocamento</b>	DIF vs. DISC
-------	--	--------------



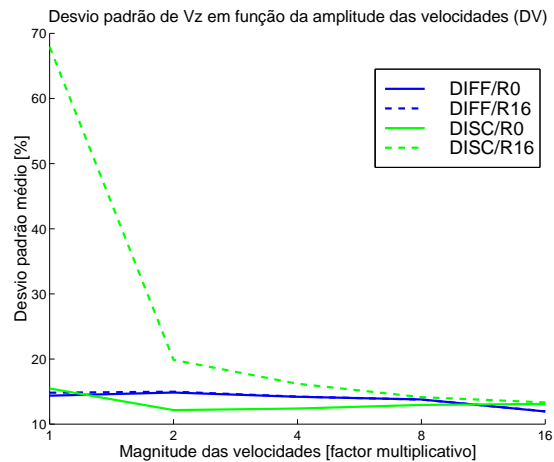
(a) ERM - DCCE



(b) ERM - DV



(c) DPM - DCCE



(d) DPM - DV

Pretendemos comparar os métodos DCCE e DV nas suas formulações diferenciais e discretas. Podemos, então, verificar pela análise deste painel que as formulações discretas apresentam valores de erro relativo médio ERM superior à sua formulação

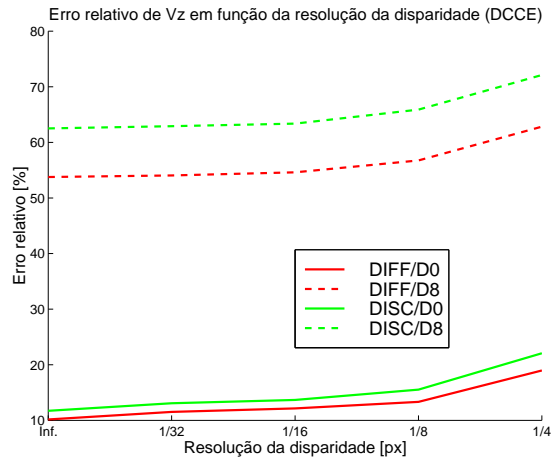


diferencial correspondente.

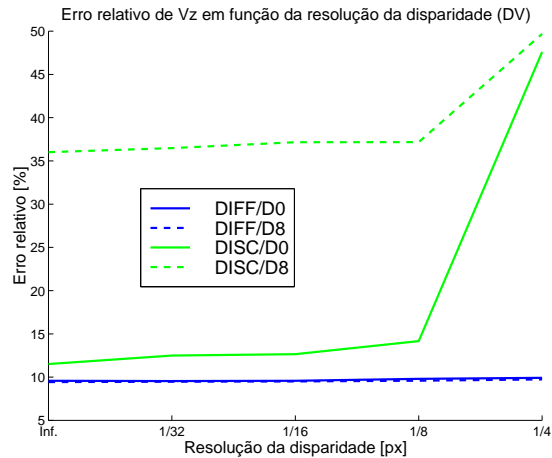
Verificamos que, tal como já tinha sido referido, o ponto mínimo do ERM corresponde a um factor multiplicativo entre 4 e 8, para a maioria das situações.

Quanto ao desvio padrão, podemos afirmar que as formulações diferenciais são, de um modo geral, melhores do que as correspondentes discretas. Contudo, notamos uma convergência dos valores, tanto do erro ERM como do desvio padrão DPM, para valores crescentes do factor multiplicativo das velocidades.

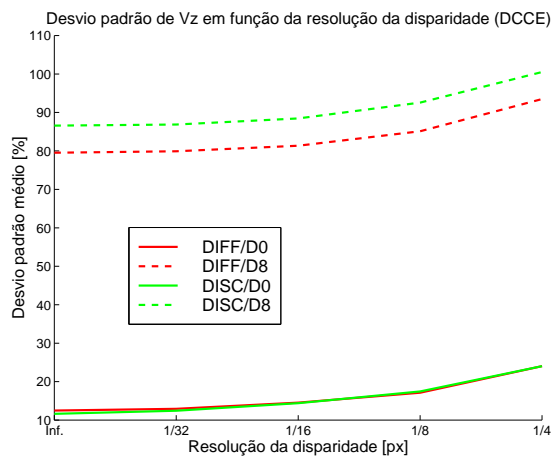
$V_Z$	<b>Efeito da resolução da disparidade</b>	DIF vs. DISC
-------	---	--------------



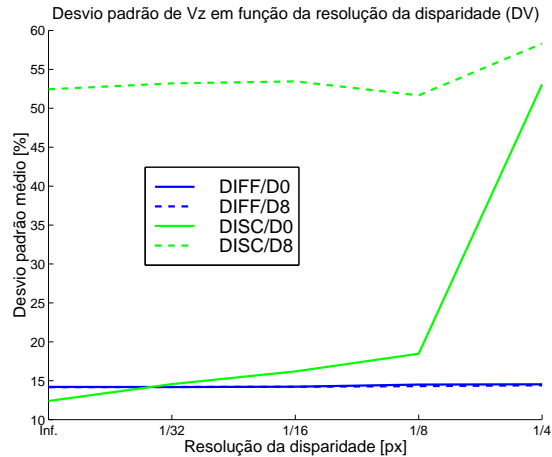
(a) ERM - DCCE



(b) ERM - DV



(c) DPM - DCCE

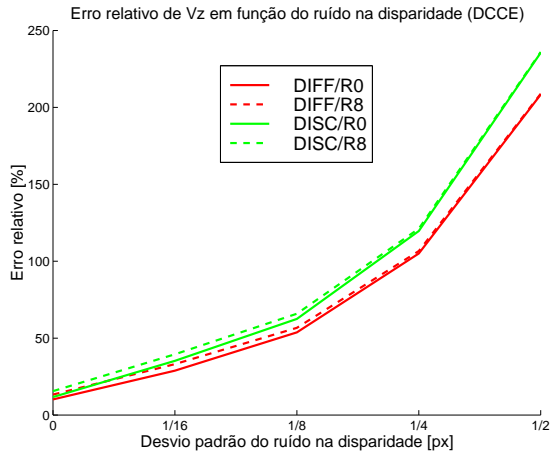


(d) DPM - DV

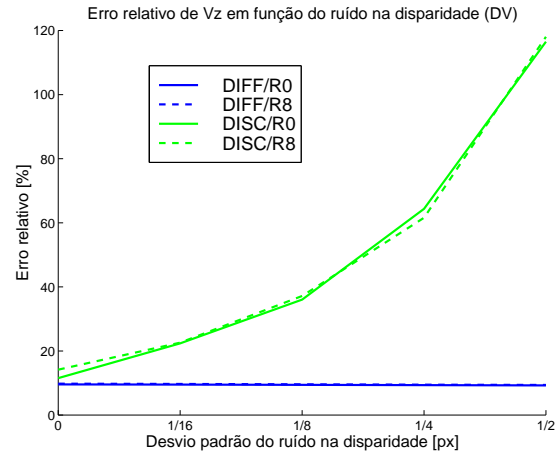
Podemos observar que, ao reduzir a resolução da disparidade, as formulações discretas de ambos os métodos continuam a apresentar valores de erro superiores aos apresentados pelas correspondentes formulações diferenciais.

Notamos ainda que para resoluções muito baixas, no método DV, as formulações discretas são mais sensíveis do que as diferenciais, apresentando, portanto, valores de erro e desvio padrão muito superiores.

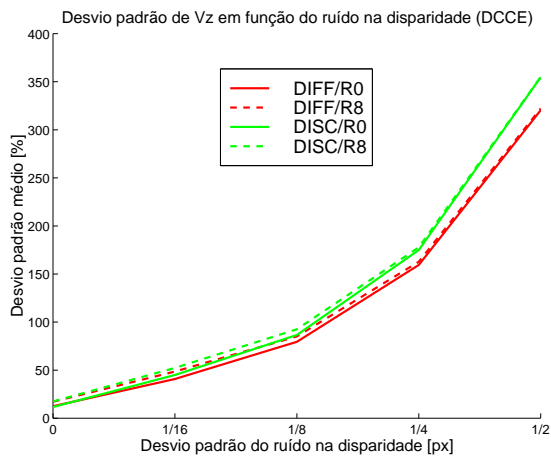
$V_z$	<b>Efeito do ruído aleatório da disparidade</b>	DIF vs. DISC
-------	---	--------------



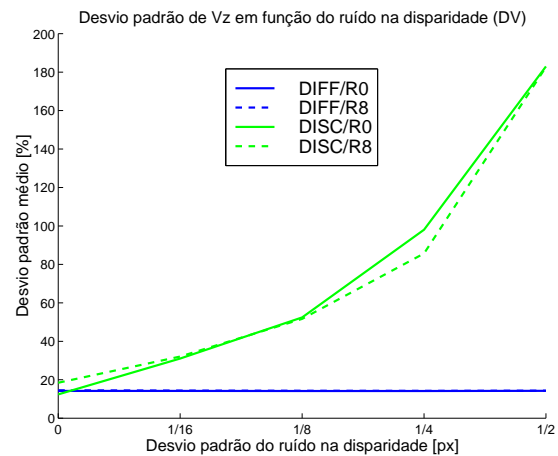
(a) ERM - DCCE



(b) ERM - DV



(c) DPM - DCCE

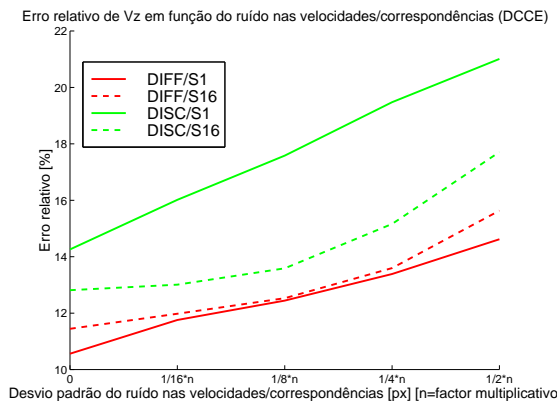


(d) DPM - DV

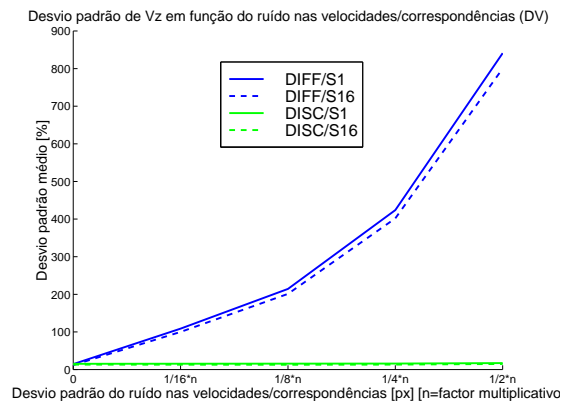
Nota-se pela análise deste painel que, no método DCCE, ambas as aproximações têm o mesmo comportamento, isto é, apresentam elevada sensibilidade ao ruído na disparidade. No método DV, a aproximação discreta apresenta muito maior sensibilidade do que a aproximação diferencial, cujo crescimento é acentuado.

A dispersão do erro - DPM, tem o mesmo comportamento do que o erro ERM, pelo que as mesmas afirmações são válidas.

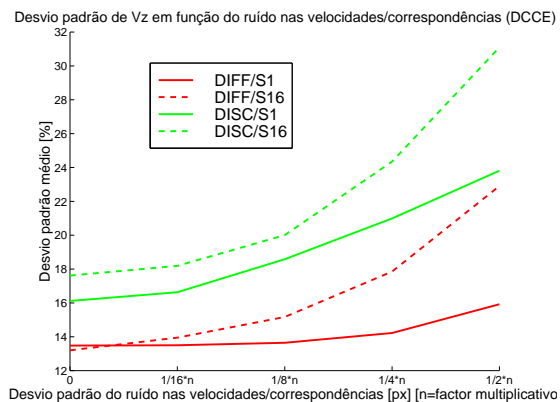
$V_Z$	<b>Efeito do ruído aleatório nas velocidades/correspondências</b>	DIF vs. DISC
-------	---	--------------



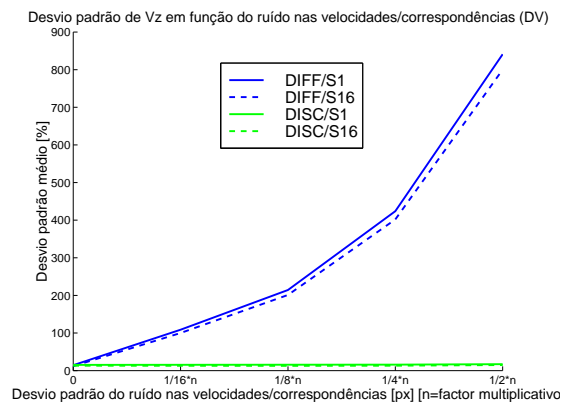
(a) ERM - DCCE



(b) ERM - DV



(c) DPM - DCCE



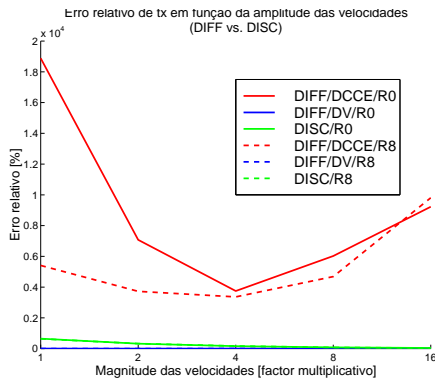
(d) DPM - DV

Notamos, relativamente ao método DCCE, um crescimento do erro relativo de  $V_Z$ , tanto na aproximação discreta, como na aproximação diferencial. A aproximação discreta apresenta resultados ligeiramente piores do que a aproximação diferencial.

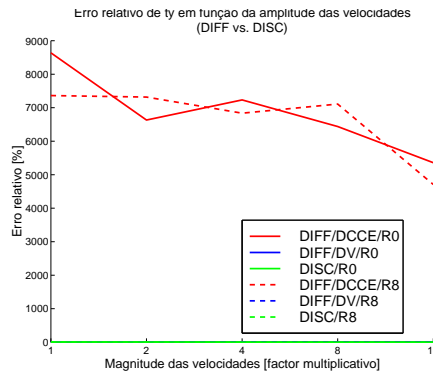
Quanto ao método DV, tanto no erro relativo ERM como no desvio padrão DPM, há um crescimento muito acentuado na aproximação diferencial e um crescimento

muito ligeiro destas duas estatísticas na aproximação discreta, que se mostra praticamente insensível ao ruído aleatório nas correspondências, tal como havia sido previsto pelo estudo de propagação da incerteza.

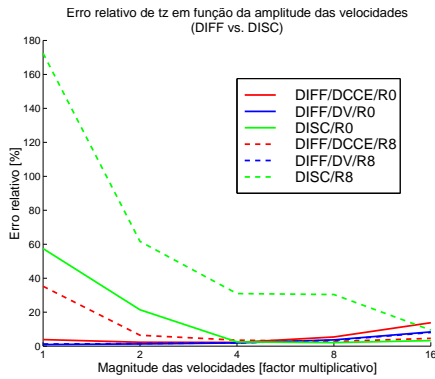
$\phi$	<b>Efeito da magnitude do deslocamento</b>	DIF vs. DISC
--------	--	--------------



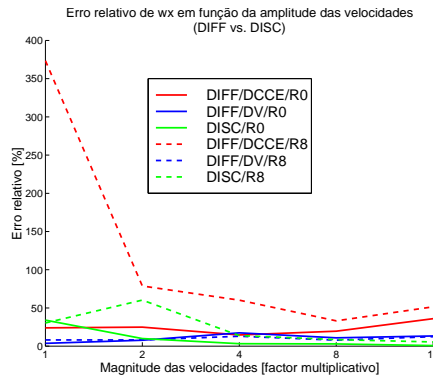
(a)  $t_x$



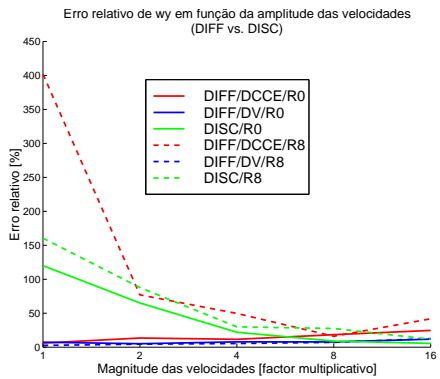
(b)  $t_y$



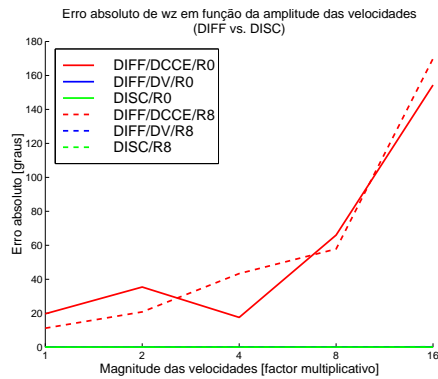
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



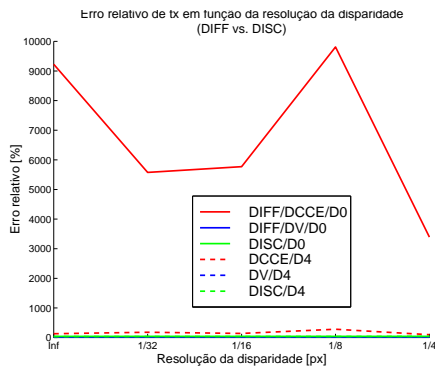
(e)  $\Omega_y$



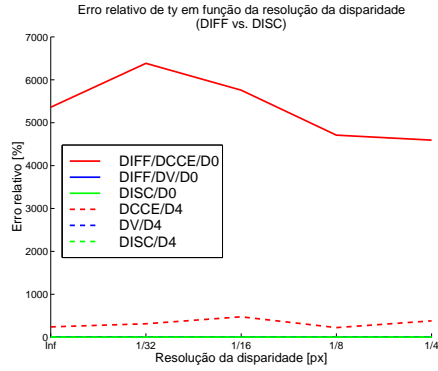
(f)  $\Omega_z$

De um modo geral, os métodos de aproximação diferencial apresentam melhores resultados do que o método de aproximação discreta para os parâmetros com melhor estabilidade numérica:  $t_Z$ ,  $\Omega_X$  e  $\Omega_Y$ . Relativamente aos restantes parâmetros, a aproximação discreta apresenta piores resultados do que o método DV (aproximação diferencial) e melhores do que o método DCCE (aproximação diferencial) - (nota: este efeito é pouco visível nos gráficos mas pode ser confirmado nos ficheiros de saída dos algoritmos).

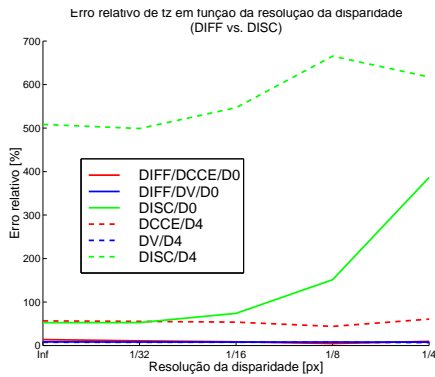
$\phi$	<h2 style="margin: 0;">Efeito da resolução da disparidade</h2>	<h3 style="margin: 0;">DIF vs DISC</h3>
--------	--	---



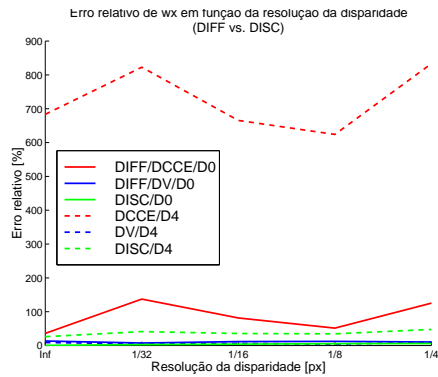
(a)  $t_x$



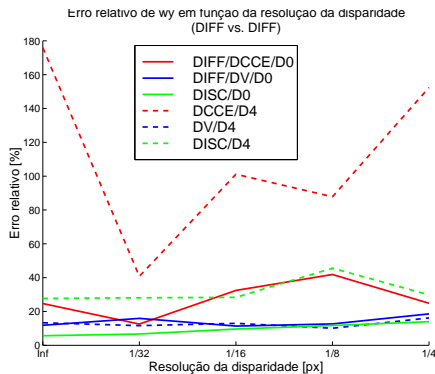
(b)  $t_y$



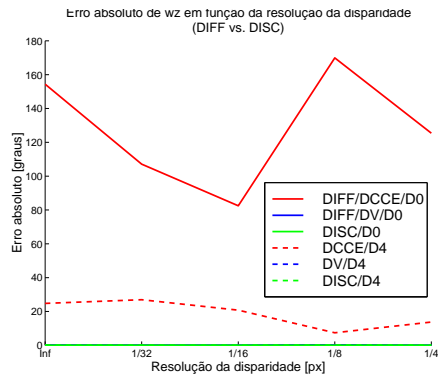
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$

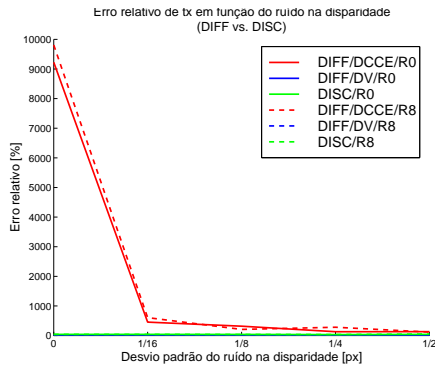


(f)  $\Omega_z$

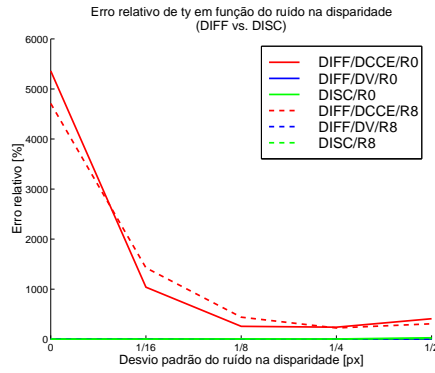


Quando se varia a resolução da disparidade, nalguns parâmetros a aproximação discreta comporta-se melhor do que as aproximações diferenciais (DCCE e DV) -  $\Omega_X$  e  $\Omega_Y$ , piores do que ambas nos parâmetros  $t_Z$  e  $\Omega_Z$  e, pior do que o método DV e melhor do que o método DCCE nos restantes parâmetros -  $t_X$  e  $t_Y$ .

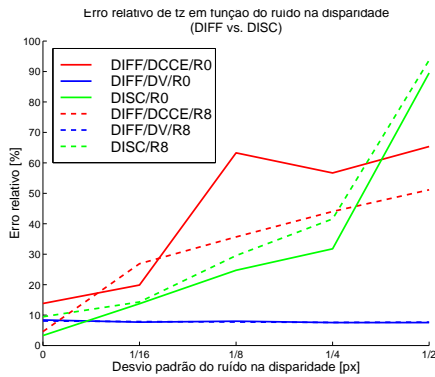
$\phi$	<h2 style="margin: 0;">Efeito do ruído aleatório da disparidade</h2>	<h2 style="margin: 0;">DIF vs. DISC</h2>
--------	--	--



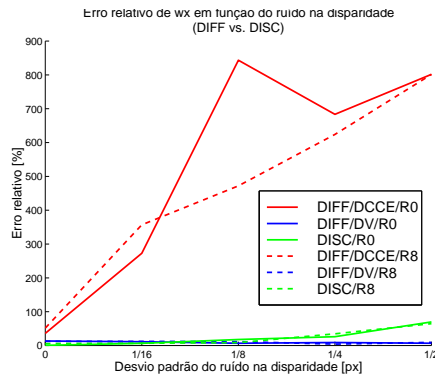
(a)  $t_x$



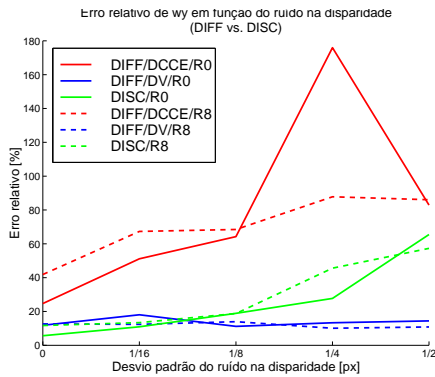
(b)  $t_y$



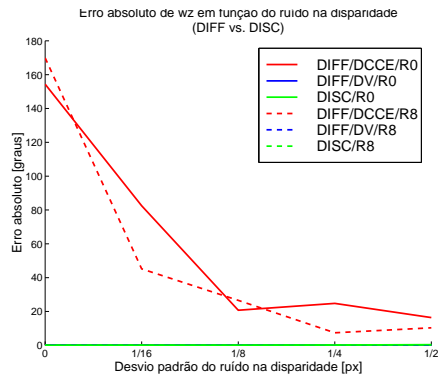
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



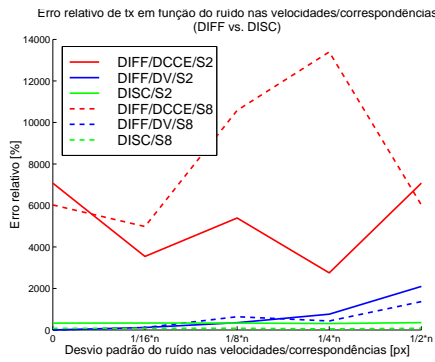
(e)  $\Omega_y$



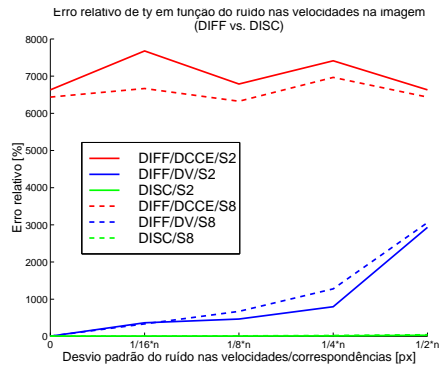
(f)  $\Omega_z$

A aproximação discreta, apresenta erro de estimação, em todos os parâmetros, piores do que o método DV (aproximação diferencial) e melhores do que o método DCCE (aproximação diferencial). Exceptuando no parâmetro  $t_Z$ , em todos os outros parâmetros, o erro de estimação da aproximação discreta é mais próximo do método DV, que apresenta erros mais baixos, do que do método DCCE.

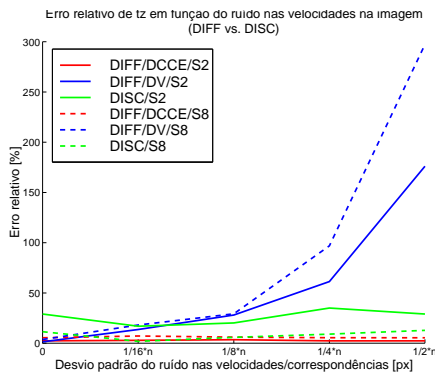
$\phi$	<h2 style="margin: 0;">Efeito do ruído aleatório nas velocidades/correspondências</h2>	<h3 style="margin: 0;">DIF vs. DISC</h3>
--------	--	--



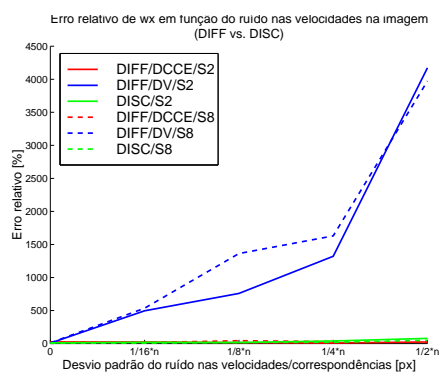
(a)  $t_x$



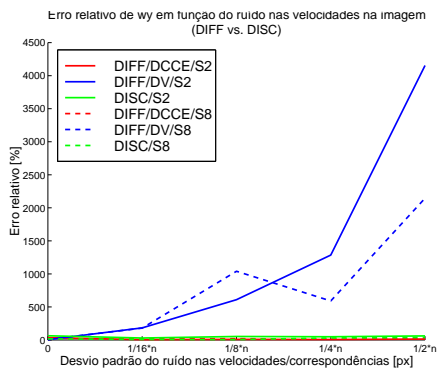
(b)  $t_y$



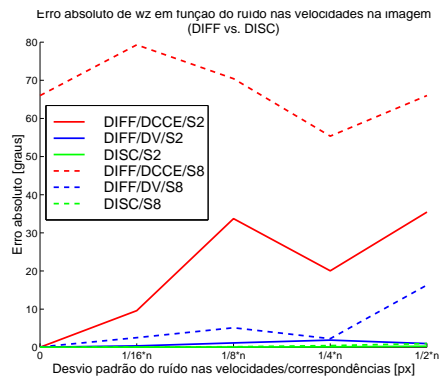
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$



(f)  $\Omega_z$

Genericamente, a aproximação discreta, é menos sensível a este tipo de erro, apresenta melhores resultados do que os dois métodos de aproximação diferencial, sobretudo, relativamente ao método DV, devido à sua elevada instabilidade quanto a este ruído, já mencionada diversas vezes. O método DCCE (aproximação diferencial) apesar de não mostrar uma sensibilidade elevada a este ruído, apresenta valores de erro de estimação elevados.



# Capítulo 9

## Sequências Reais

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos na estimação de  $V_Z$  e na estimação dos parâmetros do movimento, usando sequências de imagens reais. Devido às especificidades das sequências reais, a apresentação de resultados é feita de forma diversa da efectuada nas sequências sintéticas. Apresentamos, em primeiro lugar, os resultados para a aproximação diferencial e depois para a aproximação discreta. Para cada uma das aproximações são resumidos os resultados obtidos para cada uma das sequências em tabelas e, posteriormente, são apresentados, em gráfico, os resultados por grupos de sequências de forma a evidenciar o comportamento dos métodos em relação à variação de alguns parâmetros. No final, é apresentada uma análise comparativa dos resultados obtidos nas duas aproximações.

São, de seguida, discutidas algumas questões relacionadas com as sequências propriamente ditas e com a apresentação dos resultados.

### 9.1 Parâmetros das imagens reais

Os parâmetros do movimento e valores verdadeiros de  $V_Z$  das sequências de imagens reais analisadas, e cujos resultados são aqui reportados, discriminam-se na tabela 9.1.

Seq.	$t_X$	$t_Y$	$t_Z$		$\Omega_X$	$\Omega_Y$	$\Omega_Z$		$V_Z$
A	0.0	0.0	0.0	mm/frame	0.0	-0.25	0.0	°/frame	$0.25^\circ \cdot X$
B	0.0	0.0	0.0	mm/frame	0.0	-0.5	0.0	°/frame	$0.5^\circ \cdot X$
C	0.0	0.0	0.0	mm/frame	0.0	-1.0	0.0	°/frame	$1^\circ \cdot X$
D	0.0	0.0	0.0	mm/frame	0.0	-2.0	0.0	°/frame	$2^\circ \cdot X$
E	0.0	0.0	1.0	mm/frame	0.0	0.0	0.0	°/frame	1.0
F	0.0	0.0	5.0	mm/frame	0.0	0.0	0.0	°/frame	5.0
G	0.0	0.0	10.0	mm/frame	0.0	0.0	0.0	°/frame	10.0
H	0.0	0.0	20.0	mm/frame	0.0	0.0	0.0	°/frame	20.0
I	0.0	0.0	40.0	mm/frame	0.0	0.0	0.0	°/frame	40.0
J	0.0	5.0	10.0	mm/frame	0.0	0.0	0.0	°/frame	10.0
L	0.0	10.0	20.0	mm/frame	0.0	0.0	0.0	°/frame	20.0
M	0.0	5.0	5.0	mm/frame	0.0	-0.25	0.0	°/frame	$5.0 + 0.25 \cdot X$

Tabela 9.1: Parâmetros do movimento das sequências reais.

O sistema de visão usado tem as seguintes características: distância focal igual a 3.6 mm, *baseline* igual a 130 mm, píxeis quadrados de 11.0  $\mu\text{m}$ .

## 9.2 Apresentação dos resultados

A apresentação dos resultados para  $V_Z$  é feita, à semelhança do exposto para as sequências sintéticas, através de duas estatísticas principais: o erro relativo médio (ERM) e o desvio padrão médio (DPM). A estatística ERM dá-nos, pois, o valor médio amostral do erro relativo positivo calculado em todos os pontos válidos, em valor absoluto, não havendo, portanto, cancelamento do erro. A estatística DPM dá-nos o desvio padrão amostral de ERM.



É usada, adicionalmente, uma estatística. O erro relativo da média de  $V_Z$  (ERMédia), isto é, o erro relativo do valor médio de  $V_Z$ , calculado em todos os pontos da imagem onde os valores de  $V_Z$  são válidos e, individualmente, em todas as imagens da sequência. Esta última estatística só é usada nas sequências onde o valor de  $V_Z$  é igual para todos os pontos da imagem, ou seja, para as sequências de translação ou para as sequências cujos parâmetros de rotação sejam reduzidos relativamente à componente de translação.

Para reduzir a influência dos *outliers*, tal como efectuado nas sequências de imagens sintéticas, decidimos retirar os primeiros e últimos decis das distribuições de  $V_Z$ . A ordenação é feita segundo o valor de  $V_Z$  estimado. Os valores mais elevados em valor absoluto são retirados antes de calculadas as estatísticas.

A apresentação dos resultados para os parâmetros do movimento (três velocidades de translação e três velocidades de rotação) é feita usando o erro relativo médio (ERM) para cada parâmetros e em cada par de imagens da sequência, bem como o erro absoluto médio (EAM).

No caso dos parâmetros cujo valor verdadeiro é zero, usamos, como alternativa ao ERM, o EAM.

A partir dos valores estimados para  $V_Z$ , ERM, ERMédia e STD para cada imagem e a partir dos valores estimados dos parâmetros do movimento, por imagem, são calculados os valores correspondentes para a sequência através da mediana (salienta-se o facto de vários autores apontarem a mediana como um estimador de primeira ordem superior à média; ver, por exemplo [26]).

As sequências de translação pura e de rotação pura serão agrupadas entre si ( $tz = 1; 5; 10; 20; 40mm/frame$  e  $\Omega_Y = -0.25; -0.5; -1; -2^\circ/frame$ ) de forma a ser possível estudar o comportamento dos métodos apresentados em função da amplitude das velocidades de translação e rotação respectivamente.

São apresentados neste capítulo os gráficos com os resultados das medidas ERM

e STD em função da amplitude das velocidades de translação (série de sequências E-F-G-H-I) e rotação (série de sequências A-B-C-D), primeiro para as aproximações diferencial e discreta, evidenciando a comparação entre os métodos da restrição de profundidade e da restrição do fluxo binocular e, depois, para a comparação entre ambas as aproximações.

O valor de ERM e DPM para todos os pares de imagens das sequências é apresentado em apêndice.

A estimação dos seis parâmetros do movimento pode subdividir-se em quatro grupos principais, tal como, em parte, se fazia no caso das imagens sintéticas. Esta subdivisão resulta do facto de o processo de regressão linear múltipla ter condicionamentos diferentes para parâmetros diferentes, resultando em instabilidade numérica de alguns deles. Além disso, o método DV estima em primeiro lugar os parâmetros  $t_Z$ ,  $\Omega_X$  e  $\Omega_Y$  para numa segunda fase utilizar estes valores para estimar os restantes parâmetros. Desta forma, analisando as equações usadas nos estimadores e os gráficos dos resultados, podemos distinguir os seguintes quatro grupos:  $\{t_X; t_Y\}$ ,  $\{t_Z\}$ ,  $\{\Omega_X; \Omega_Y\}$  e  $\{\Omega_Z\}$ .

Os gráficos da apresentação de resultados são legendados usando as seguintes siglas:

- DCCE - método da restrição de profundidade.
- DV - método da restrição do fluxo binocular.
- DIF. - aproximação diferencial
- DISC. - aproximação discreta.

## 9.3 Aproximação Diferencial

Os resultados obtidos para a estimação de  $V_Z$ , são mostrados na tabela 9.2, por sequência.

	Valor Estimado		Valor real	ERM		STD	
	DCCE	$\Delta v_x$		DCCE	$\Delta v_x$	DCCE	$\Delta v_x$
A	—	—	—	586.98	3010.7	1898.5	8178.7
B	—	—	—	216.85	1573.8	574.38	5024.4
C	—	—	—	290.18	1698.0	782.49	4990.3
D	—	—	—	230.60	722.29	560.62	2204.5
E	0.556	1.048	1.0	-44.39	4.75	1715.6	714.22
F	5.491	8.022	5.0	9.82	60.45	250.51	211.29
G	6.520	10.391	10.0	-34.80	3.91	182.69	110.53
H	12.763	17.374	20.0	-36.18	-13.13	182.83	85.36
I	40.765	34.918	40.0	1.91	12.71	128.47	102.15
J	10.427	16.043	10.0	4.27	60.43	138.94	153.78
L	21.621	27.251	20.0	8.10	36.26	83.09	116.79
M	3.097	3.549	$\approx 5.0$	-38.06	-29.03	4159.1	4413.0

Tabela 9.2: Estimação de  $V_Z$  - sequências reais

Os resultados obtidos para a estimação de  $\vec{\phi}$ , são mostrados na tabela 9.3, por sequência.

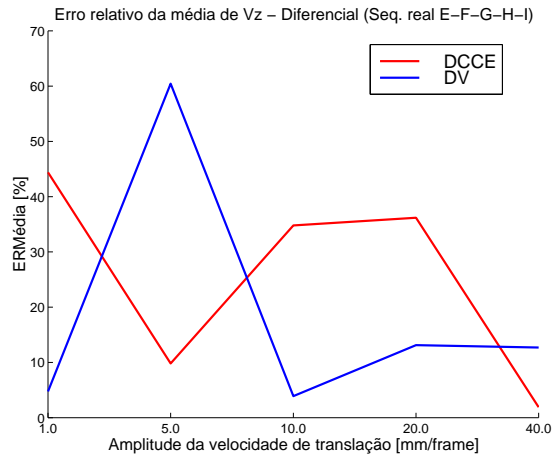
		$t_X$	$t_Y$	$t_Z$	$\Omega_X$	$\Omega_Y$	$\Omega_Z$
A	Exacto	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.25	0.0
	DCCE	249.90	15.01	0.67	0.041	-0.160	0.069
	DV	12.10	2.79	-0.15	0.074	-0.224	-0.038

		$t_X$	$t_Y$	$t_Z$	$\Omega_X$	$\Omega_Y$	$\Omega_Z$
B	Exacto	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.50	0.0
	DCCE	258.62	57.05	-1.81	-0.018	-0.124	16.936
	DV	-24.81	-72.52	-5.49	-2.455	0.860	-0.128
C	Exacto	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00	0.0
	DCCE	-621.67	-99.28	2.86	0.842	0.786	-16.819
	DV	-10.76	-58.70	-4.26	-1.352	0.208	0.531
D	Exacto	0.0	0.0	0.0	0.0	2.00	0.0
	DCCE	-222.20	0,0	11.05	0.606	-0.187	-0.781
	DV	-45.91	-36.72	-13.70	-0.889	1.159	0.488
E	Exacto	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0
	DCCE	-9.66	6.23	-0.71	-0.003	-0.013	2.096
	DV	-4.32	-0.45	-1.77	-0.015	0.083	0.008
F	Exacto	0.0	0.0	-5.0	0.0	0.0	0.0
	DCCE	-30.41	21.64	-4.11	-0.018	0.038	0.696
	DV	-4.88	-8.41	-7.12	-0.194	0.126	0.173
G	Exacto	0.0	0.0	-10.0	0.0	0.0	0.0
	DCCE	-27.60	1.05	-6.14	-0.006	-0.013	2.275
	DV	-7.41	-1.88	-10.73	-0.085	0.207	0.045
H	Exacto	0.0	0.0	-20.0	0.0	0.0	0.0
	DCCE	-99.25	-70.17	-12.78	0.067	-0.071	4.660
	DV	-31.39	10.60	-18.86	0.234	0.874	-0.122
I	Exacto	0.0	0.0	-40.0	0.0	0.0	0.0
	DCCE	-118.76	-130.54	-38.49	-0.515	0.020	-0.252
	DV	-110.39	-6.64	-40.00	-0.303	2.344	-0.148

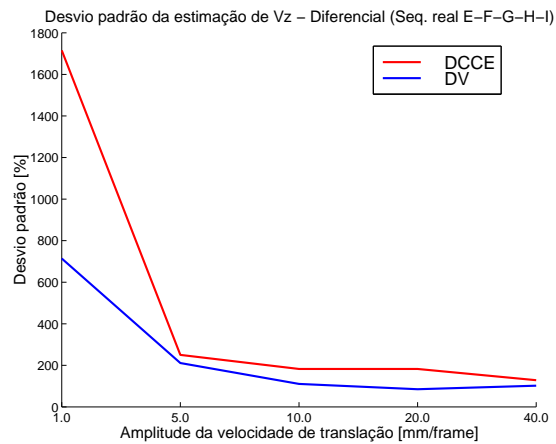
		$t_X$	$t_Y$	$t_Z$	$\Omega_X$	$\Omega_Y$	$\Omega_Z$
J	Exacto	0.0	5.0	-10.0	0.0	0.0	0.0
	DCCE	-42.65	86.22	-10.16	-0.115	0.042	1.574
	DV	-5.78	-28.29	-15.86	-0.475	0.141	0.228
L	Exacto	0.0	10.0	-20.0	0.0	0.0	0.0
	DCCE	-243.77	351.56	-19.41	-0.215	-0.029	22.193
	DV	-61.79	-61.04	-28.10	-1.068	1.333	1.030
M	Exacto	0.0	5.0	-5.0	0.0	0.25	0.0
	DCCE	-296.22	78.99	-5.94	-0.140	0.130	-8.490
	DV	25.71	110.80	8.35	2.436	0.702	-1.122

Tabela 9.3: Estimação de  $\vec{\phi}$  - sequências reais

$V_Z$	<b>Efeito da magnitude da velocidade de translação</b>	Seq. reais E a I DIF.
-------	--	--------------------------



(a) ERMédia

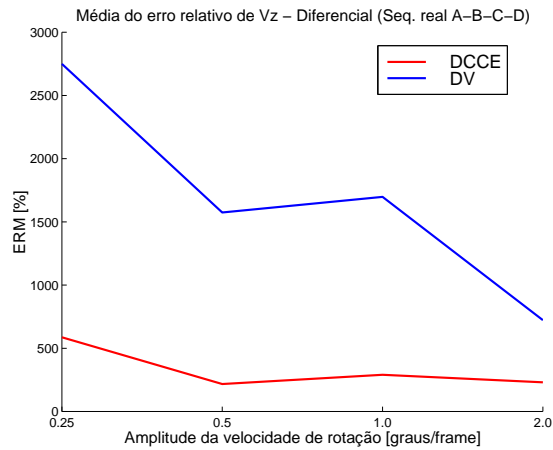


(b) STD

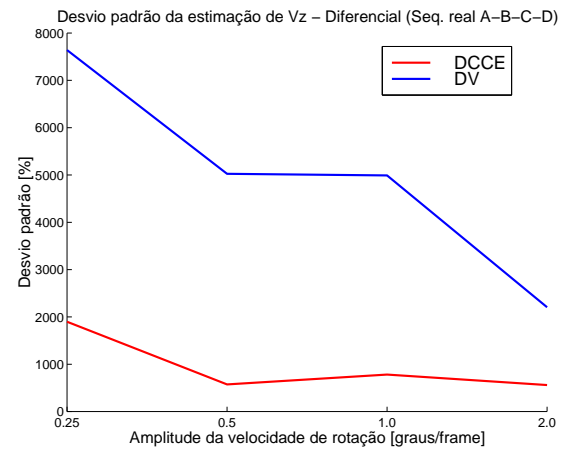
Com o aumento da velocidade de translação pode notar-se uma tendência de descida do erro médio de estimação de  $V_Z$ , sobretudo para os deslocamentos maiores. O método DCCE é melhor do que o método DV em duas situações e pior em três. É difícil afirmar qual dos métodos é, na generalidade dos casos, o melhor.

Relativamente ao desvio padrão da estimação de  $V_Z$ , observa-se uma forte descida do seu valor com o aumento da velocidade de translação. O método DV apresenta valores inferiores aos apresentados pelo método DCCE. Nota-se uma estabilização à volta dos 100%.

$V_Z$	<b>Efeito da magnitude da velocidade de rotação</b>	Seq. reais A a D DIF.
-------	---	--------------------------



(a) ERM

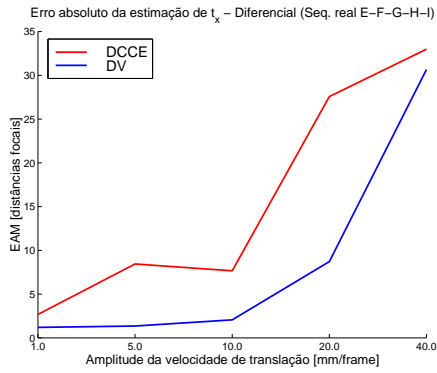
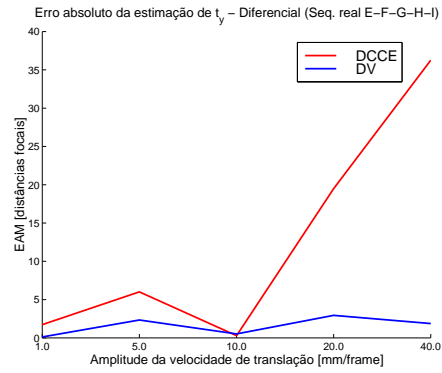
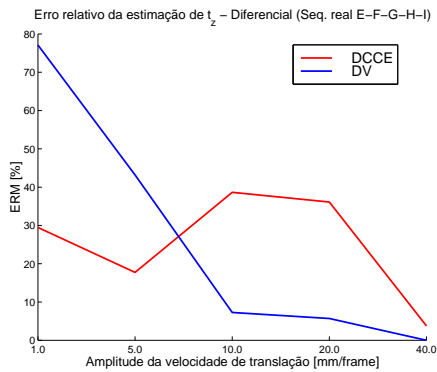
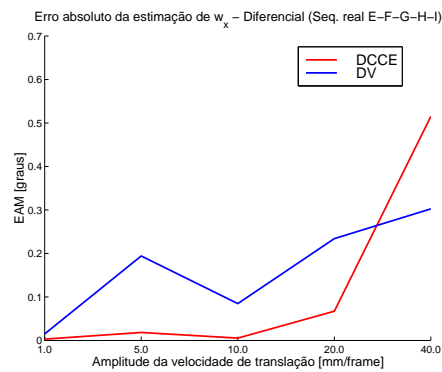
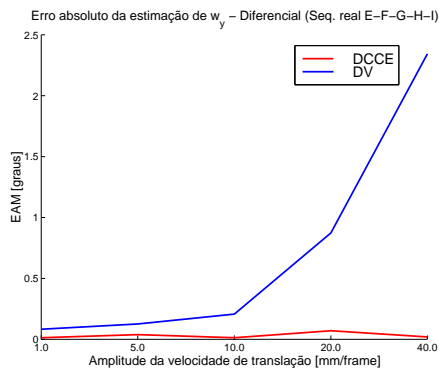
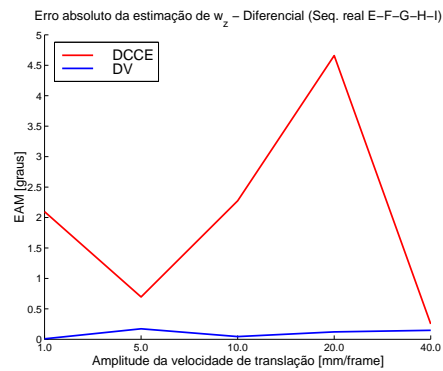


(b) STD

Nota-se, pela observação destes gráficos, que com o aumento da velocidade de rotação, há uma descida generalizada do erro relativo médio para ambos os métodos. Os valores apresentados são, contudo, muito elevados. O método DCCE apresenta resultados melhores do que o método DV.

As afirmações anteriores são também válidas para o desvio padrão da estimação de  $V_Z$ .

$\phi$	<b>Efeito da magnitude da velocidade de translação</b>	Seq. reais E a I DIF.
--------	--	--------------------------

(a)  $t_x$ (b)  $t_y$ (c)  $t_z$ (d)  $\omega_x$ (e)  $\omega_y$ (f)  $\omega_z$

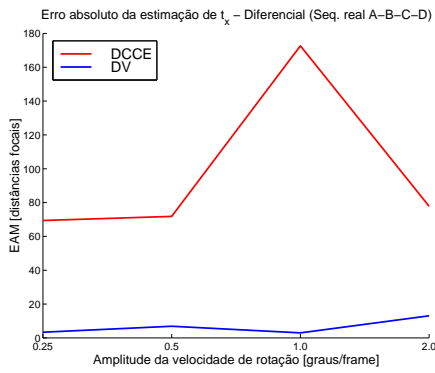


Observando os gráficos deste painel, pode observar-se que o erro absoluto dos parâmetros do primeiro grupo ( $t_X$  e  $t_Y$ ) é elevado em número de distâncias focais e crescente. O método DV apresenta melhores resultados. Relativamente ao segundo grupo, o valor estimado para a velocidade de translação segundo o eixo  $Z$  apresenta erro relativo decrescente e ambos os métodos convergem para um valor de cerca de 5%. O método DV apresenta resultados melhores do que o método DCCE para velocidades elevadas e piores para velocidades reduzidas.

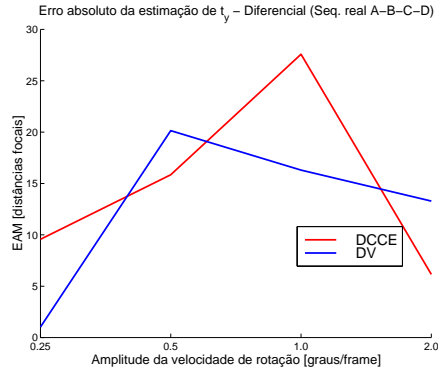
Na estimação dos parâmetros do terceiro grupo, ambos os métodos apresentam subida do erro absoluto (expresso em graus/frame) sendo o método DCCE aquele que obtém melhores resultados. O erro absoluto é na sua maioria correspondente a velocidades de rotação da ordem das décimas de grau por frame. Quanto ao último grupo -  $\Omega_Z$ , o seu erro absoluto de estimação não apresenta nenhuma tendência de subida ou descida. O método DV é neste caso o melhor, com elevada vantagem sobre o método DCCE.

Nota-se que, genericamente, o crescimento do erro absoluto médio é mais lento do que o crescimento das velocidades, ou seja, nesta situação a importância do erro torna-se menor, apesar de em termos absolutos crescer. Este efeito pode verificar-se noutros casos de erro absoluto crescente.

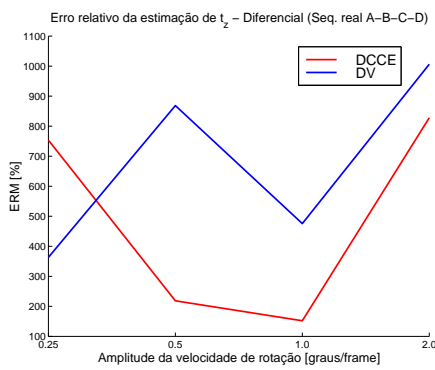
$\phi$	<b>Efeito da magnitude da velocidade de rotação</b>	Seq. reais A a D DIF.
--------	---	--------------------------



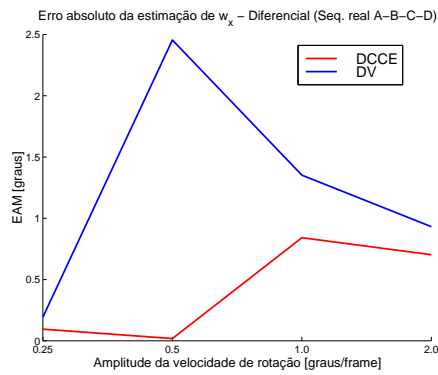
(a)  $t_x$



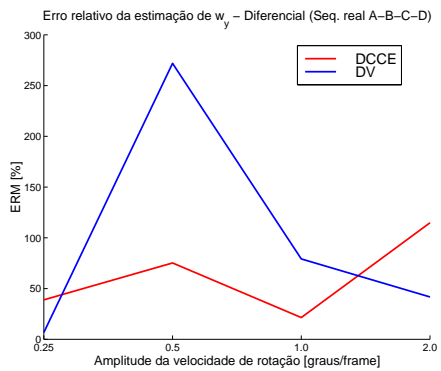
(b)  $t_y$



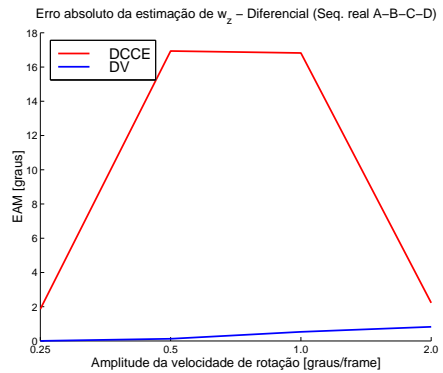
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$



(f)  $\Omega_z$

Quanto aos parâmetros do primeiro grupo, o erro absoluto é elevado e não apresenta uma tendência clara de subida ou descida. O método DV é o melhor dos dois métodos. A estimação de  $t_Z$  apresenta erros relativos muito elevados e com tendência de crescimento. O método DCCE é o que apresenta resultados menos maus.

Com relação aos parâmetros do terceiro grupo, observa-se um comportamento não muito claro, isto é, não há nem tendência de crescimento, nem tendência de decrescimento, da parte do método DV e há um ligeiro crescimento dos valores apresentados pelo método DCCE. O método DCCE é, contudo, o que melhores resultados apresenta. Quanto ao erro absoluto em  $\Omega_Z$ , o método DV apresenta valores mais reduzidos relativamente ao método DCCE e com crescimento monótono. O método DCCE apresenta valores muito elevados.

## 9.4 Aproximação Discreta

Os resultados obtidos para a estimação de  $V_Z$ , são mostrados na tabela 9.4, por sequência.

	Valor Estimado		Valor real	ERM		STD	
	DCCE	$\Delta v_x$		DCCE	$\Delta v_x$	DCCE	$\Delta v_x$
A	—	—	—	775.11	2599.6	2296.3	6407.0
B	—	—	—	376.49	1011.5	1012.6	2550.2
C	—	—	—	396.40	751.63	1012.9	1806.6
D	—	—	—	210.73	514.37	474.67	1207.8
E	0.823	3.131	1.0	-17.68	213.08	1220.5	649.67
F	5.205	6.437	5.0	4.09	28.73	225.14	130.09
G	6.547	6.824	10.0	-34.53	-31.77	156.48	54.29
H	12.991	13.532	20.0	-35.04	-32.34	176.97	64.05
I	43.513	43.034	40.0	8.78	7.58	123.43	37.45
J	11.395	11.121	10.0	13.05	11.21	151.52	83.39
L	24.444	18.578	20.0	22.22	-7.11	80.90	54.99
M	4.910	6.705	$\approx 5.0$	-1.81	34.10	348.90	327.04

Tabela 9.4: Estimação de  $V_Z$  - sequências reais

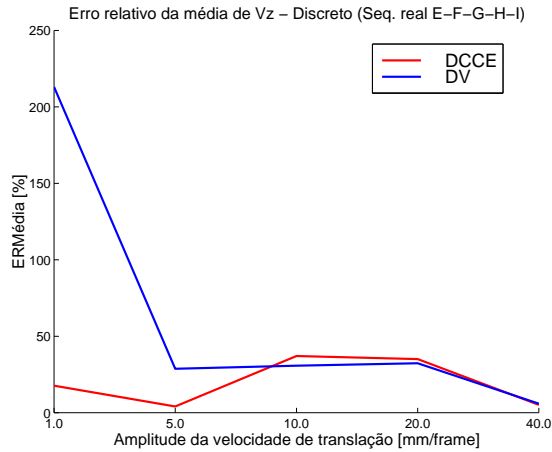
Os resultados obtidos para a estimação de  $\vec{\phi}$ , são mostrados na tabela 9.5, por sequência.

		$t_X$	$t_Y$	$t_Z$	$\Omega_X$	$\Omega_Y$	$\Omega_Z$
A	Exacto	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.25	0.0
	Estimado	1.59	1.52	0.00	0.200	-0.118	0.017

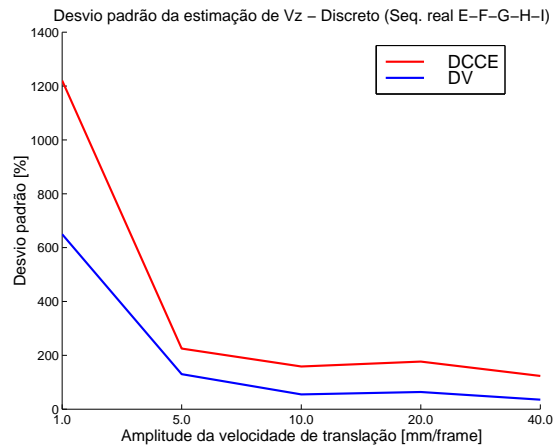
		$t_X$	$t_Y$	$t_Z$	$\Omega_X$	$\Omega_Y$	$\Omega_Z$
B	Exacto	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.5	0.0
	Estimado	0.97	-10.75	7.99	-0.138	-0.323	-0.226
C	Exacto	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
	Estimado	-17.66	18.13	233.35	0.607	1.395	0.105
D	Exacto	0.0	0.0	0.0	0.0	2.0	0.0
	Estimado	-15.28	35.49	136.00	0.800	2.683	0.461
E	Exacto	0.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	0.0
	Estimado	-3.39	0.07	4.90	0.185	0.207	0.028
F	Exacto	0.0	0.0	-5.0	0.0	0.0	0.0
	Estimado	-3.52	-0.54	5.32	0.169	0.179	0.016
G	Exacto	0.0	0.0	-10.0	0.0	0.0	0.0
	Estimado	-2.01	-1.84	-12.18	0.105	0.164	0.022
H	Exacto	0.0	0.0	-20.0	0.0	0.0	0.0
	Estimado	3.62	-3.46	-28.53	-0.081	0.107	-0.006
I	Exacto	0.0	0.0	-40.0	0.0	0.0	0.0
	Estimado	-5.74	-2.29	-44.91	0.164	0.340	-0.096
J	Exacto	0.0	5.0	-10.0	0.0	0.0	0.0
	Estimado	-2.74	-0.19	-12.13	0.093	0.235	-0.006
L	Exacto	0.0	10.0	-20.0	0.0	0.0	0.0
	Estimado	-0.15	6.44	-17.83	0.156	0.201	0.067
M	Exacto	0.0	5.0	-5.0	0.0	0.25	0.0
	Estimado	-5.42	-3.99	-6.57	0.050	0.319	0.010

Tabela 9.5: Estimação de  $\vec{\phi}$  - seqüências reais

$V_Z$	<b>Efeito da magnitude da velocidade de translação</b>	Seq. reais E a I DISC.
-------	--	---------------------------



(a) ER Média

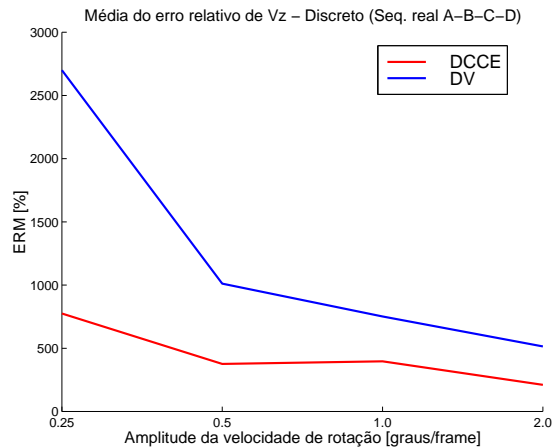


(b) STD

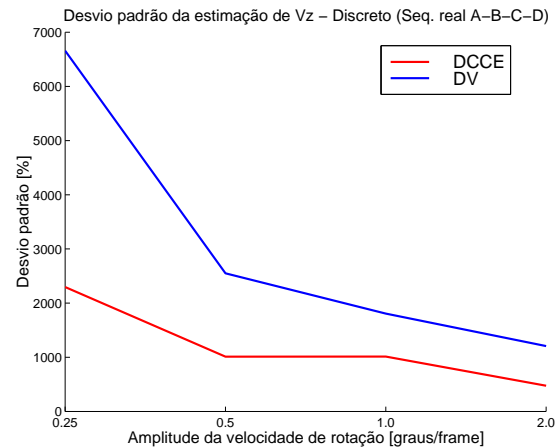
Na aproximação discreta, ambos os métodos apresentam valores decrescentes para o erro relativo médio da estimação de  $V_Z$ . Os valores de erro decrescem até um mínimo de cerca de 8%. O erro é menor no método DCCE.

Relativamente ao desvio padrão, o seu comportamento é também monótono decrescente. O método DV é o que apresenta menor dispersão relativamente ao seu valor central.

$V_Z$	<b>Efeito da magnitude da velocidade de rotação</b>	Seq. reais A a D DISC.
-------	---	---------------------------



(a) ERM

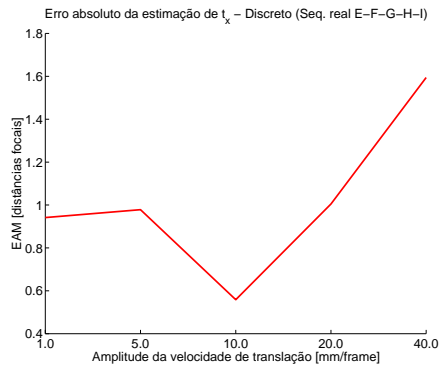
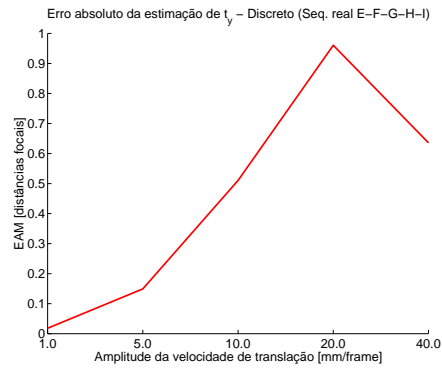
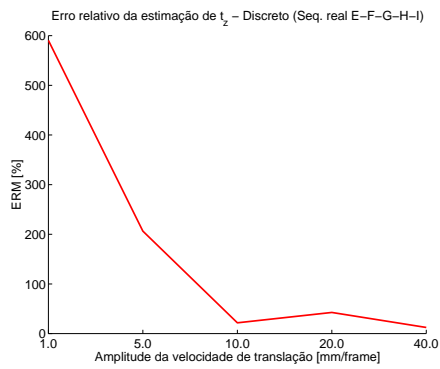
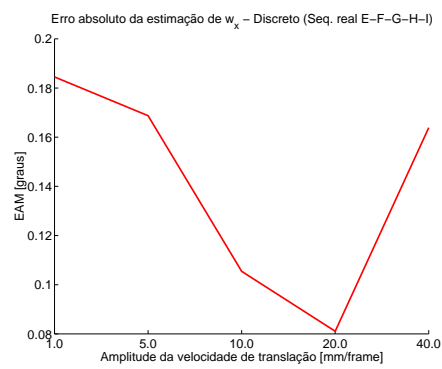
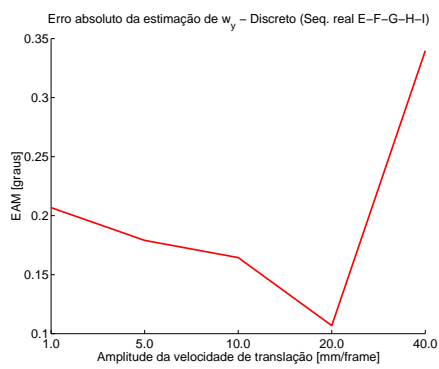
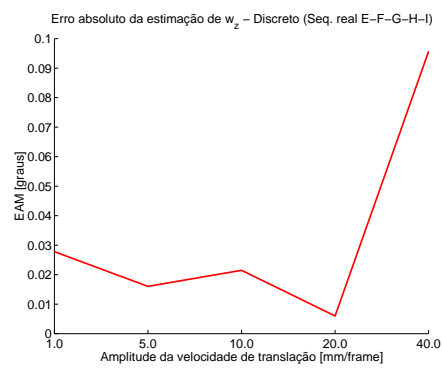


(b) STD

Nota-se, pela observação destes gráficos, que com o aumento da velocidade de rotação, há uma descida generalizada do erro relativo médio para ambos os métodos. Os valores apresentados são, contudo, muito elevados. O método DCCE apresenta resultados melhores do que o método DV.

As afirmações anteriores são também válidas para o desvio padrão da estimação de  $V_Z$ .

$\vec{\phi}$	<b>Efeito da magnitude da velocidade de translação</b>	Seq. reais E a I DISC.
--------------	--	---------------------------

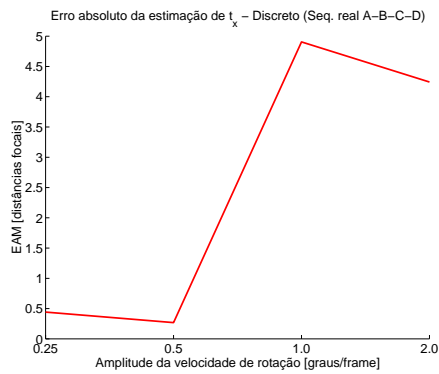
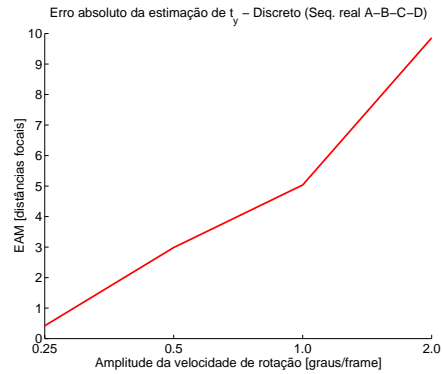
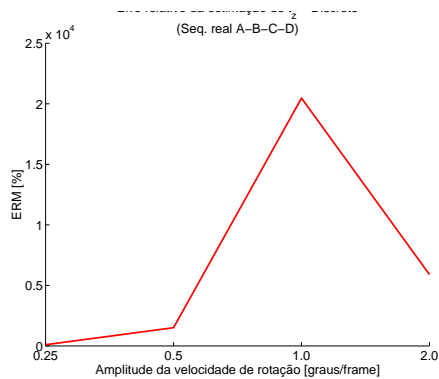
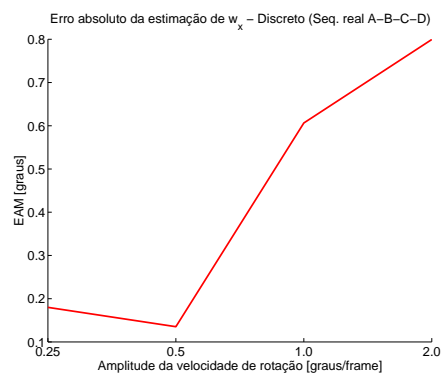
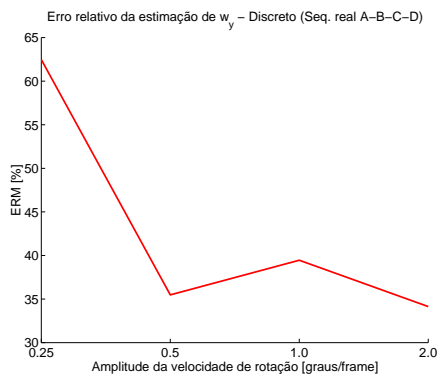
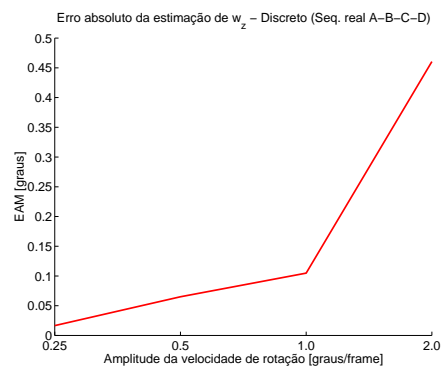
(a)  $t_X$ (b)  $t_Y$ (c)  $t_Z$ (d)  $\Omega_X$ (e)  $\Omega_Y$ (f)  $\Omega_Z$



Na estimação dos parâmetros do movimento, pela aproximação discreta, foi usada a equação 4.13 pelo que não há distinção entre método DCCE e DV.

Observa-se, na estimação dos parâmetros  $t_X$  e  $t_Y$ , um forte crescimento do seu erro absoluto. Os valores rondam o 1 mm/frame no primeiro caso e as décimas de grau/frame no segundo caso. Relativamente ao parâmetro  $t_Z$ , o erro relativo de estimação decresce com o aumento da velocidade de translação, mas mesmo para os valores de  $t_Z$  mais elevados, obtêm-se erros elevados. Quanto aos três parâmetros de rotação, o erro não apresentam uma tendência clara de subida ou descida e, para  $\Omega_X$  e  $\Omega_Y$  ronda as décima de grau/frame e para  $\Omega_Z$  as centésimas.

$\phi$	<b>Efeito da magnitude da velocidade de rotação</b>	Seq. reais A a D DISC.
--------	---	---------------------------

(a)  $t_x$ (b)  $t_y$ (c)  $t_z$ (d)  $\Omega_x$ (e)  $\Omega_y$ (f)  $\Omega_z$

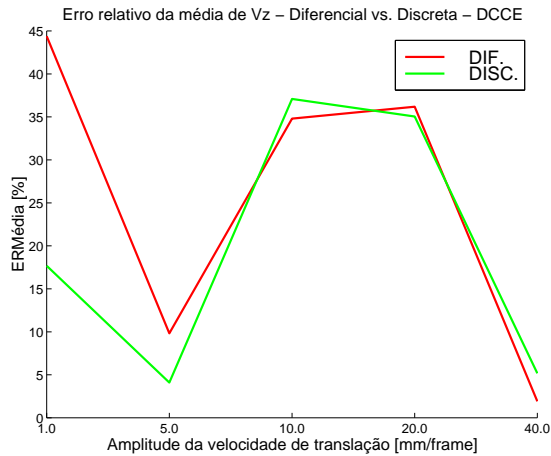
De um modo geral observa-se uma subida em todos os parâmetros do erro absoluto de  $t_X$ ,  $t_Y$ ,  $\Omega_X$  e  $\Omega_Z$  e do erro relativo de  $t_Z$ , com valores muito elevados do erro.

Contudo, para a estimação da velocidade de rotação em torno do eixo  $Y$ , observa-se uma descida acentuada do erro relativo que, partindo de um valor próximo do 60% de erro estabiliza nos cerca de 35%.

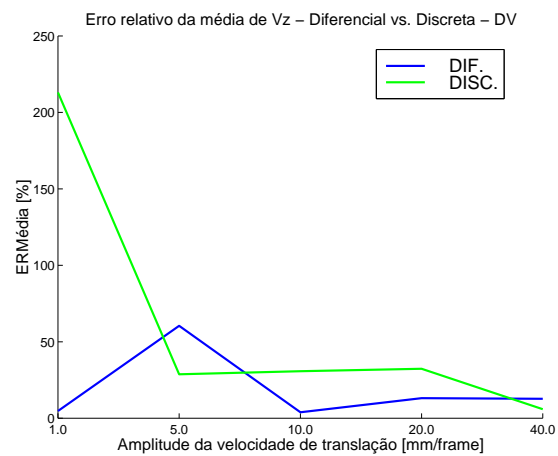
## 9.5 Diferencial *versus* discreta

Nesta secção são comparadas as aproximações diferencial e discreta de cada um dos métodos, independentemente, para as sequências de imagens reais.

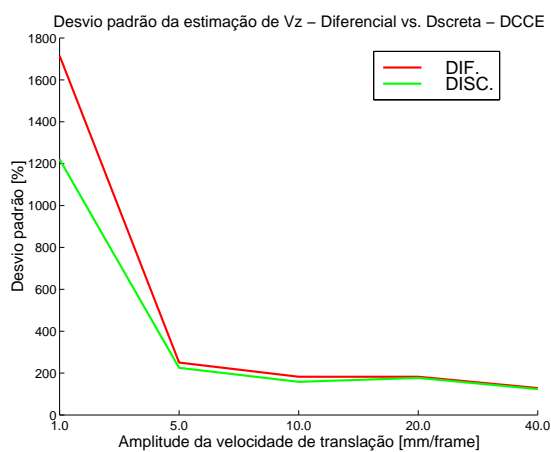
$V_z$	<b>Efeito da magnitude da velocidade de translação</b>	Seq. reais E a I DIF. vs. DISC.
-------	--	------------------------------------



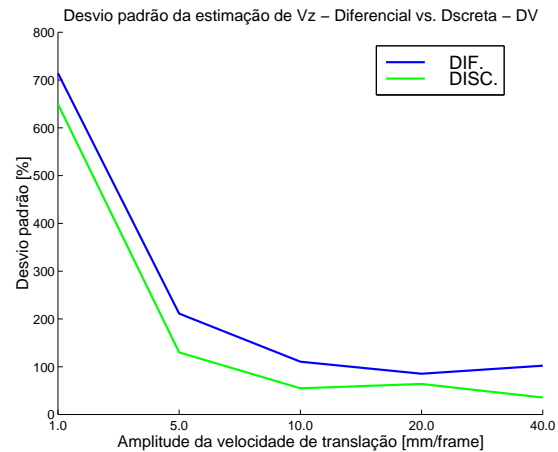
(a) ERMédia - DCCE



(b) ERMédia - DV



(c) STD - DCCE



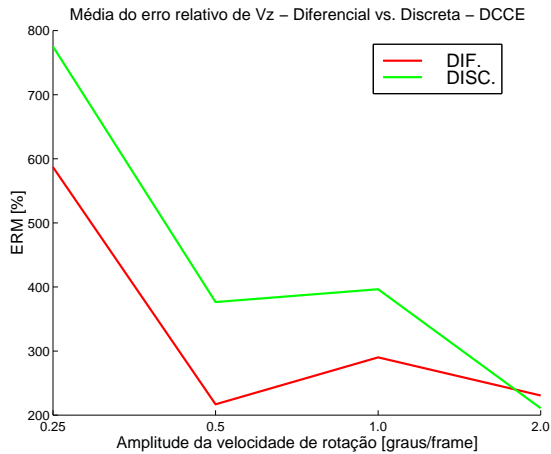
(d) STD - DV

No método DCCE, pode observar-se que a diferença entre as aproximações diferencial e discreta é reduzida, com ligeira vantagem para a última. Relativamente ao método DV, a aproximação diferencial é melhor do que a aproximação discreta. Esta última apresenta um valor de erro muito elevado para a menor velocidade de

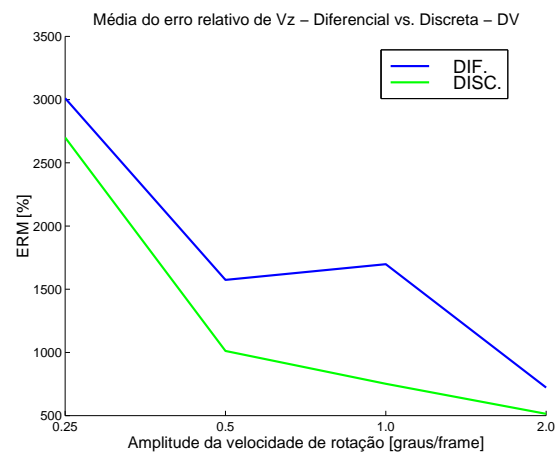
translação.

Quanto ao desvio padrão, pode observar-se que as diferenças entre as aproximações é muito reduzida, sendo a aproximação discreta a que apresenta resultados melhores.

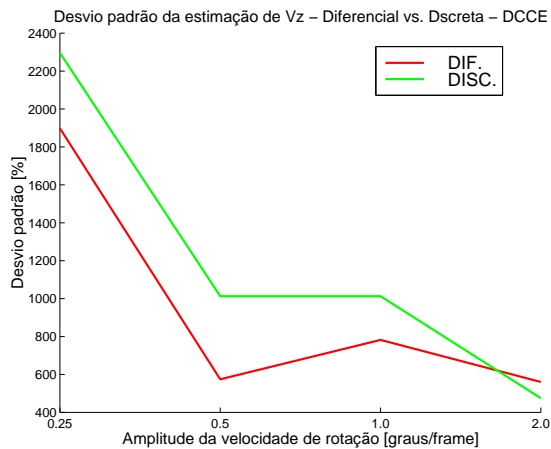
$V_z$	<b>Efeito da magnitude da velocidade de rotação</b>	Seq. reais A a D DIF. vs. DISC.
-------	---	------------------------------------



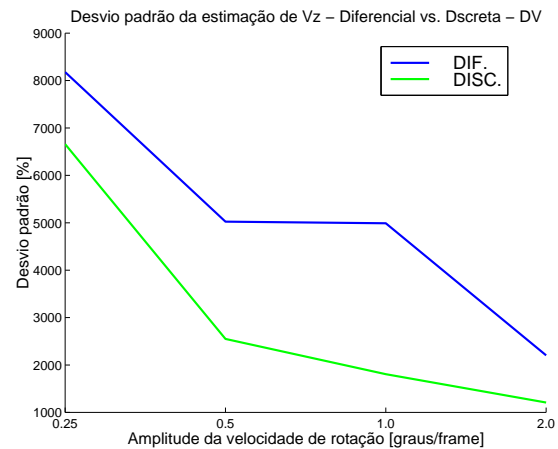
(a) ERM - DCCE



(b) ERM - DV



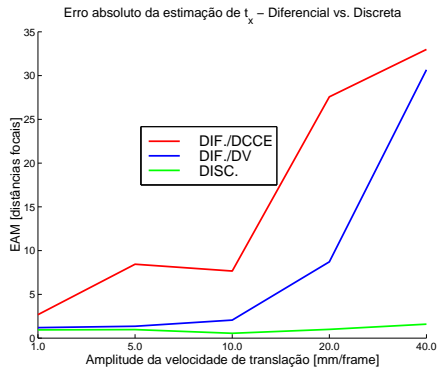
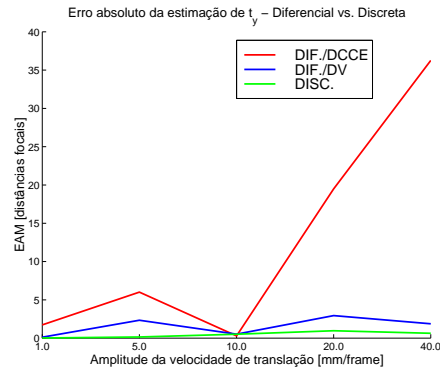
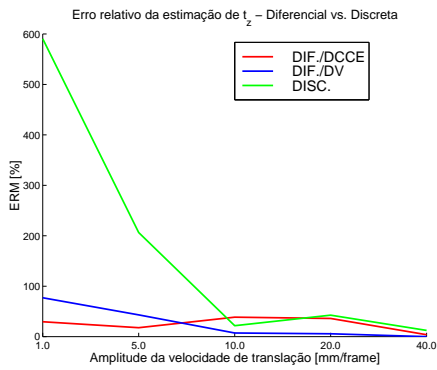
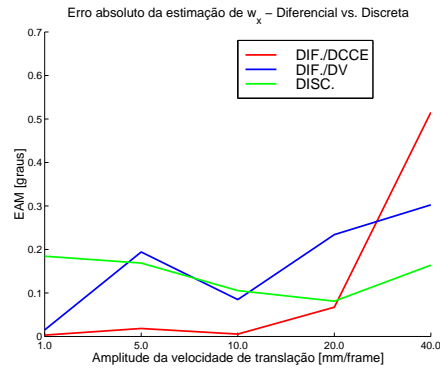
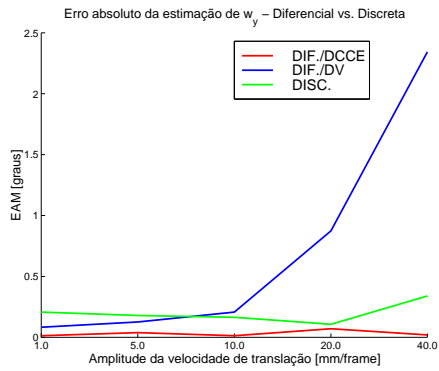
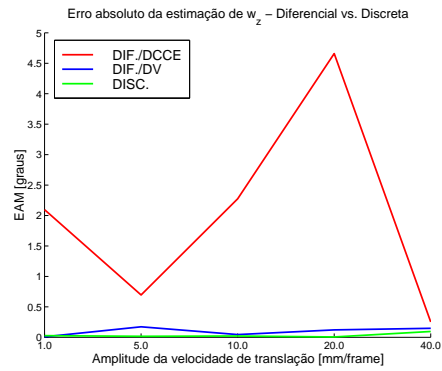
(c) STD - DCCE



(d) STD - DV

Com o aumento da velocidade de rotação, ambos os métodos, em ambas as aproximações, apresentam uma descida dos seus valores de erro relativo médio e desvio padrão. No método DCCE, a versão diferencial é melhor do que a versão discreta e no método DV observa-se o contrário, isto é, a aproximação discreta é melhor. Esta observação é também válida para os valores do desvio padrão.

$\phi$	<b>Efeito da magnitude da velocidade de translação</b>	Seq. reais E a I DIF. vs. DISC.
--------	--	------------------------------------

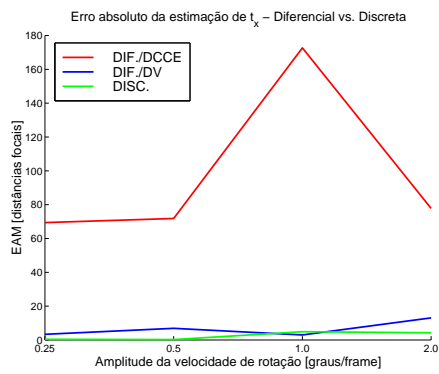
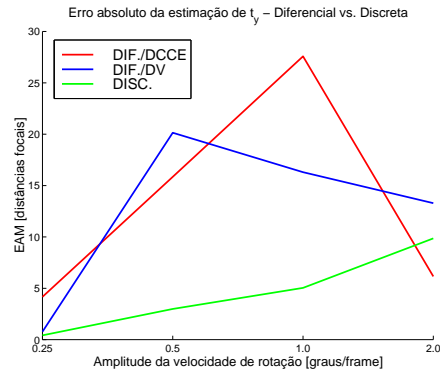
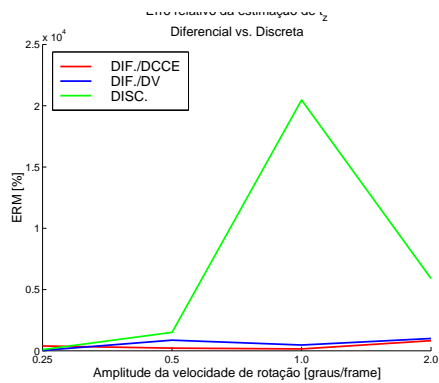
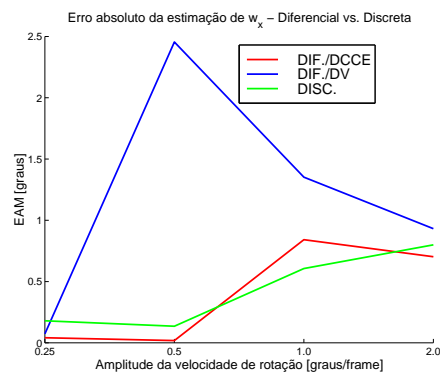
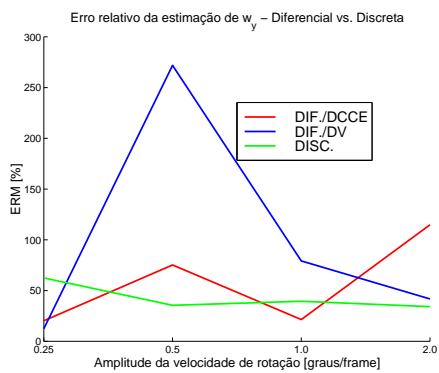
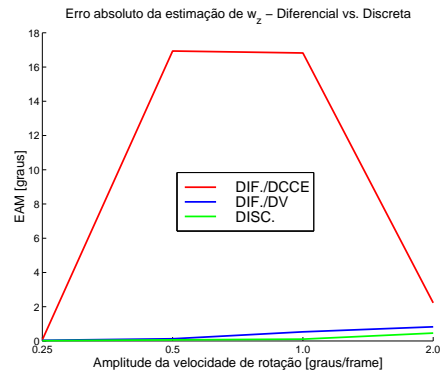
(a)  $t_x$ (b)  $t_y$ (c)  $t_z$ (d)  $\omega_x$ (e)  $\omega_y$ (f)  $\omega_z$



Na estimação dos parâmetros do movimento, em relação ao primeiro grupo ( $t_X$  e  $t_Y$ ), notamos um muito menor crescimento do erro absoluto na aproximação discreta relativamente a ambos métodos da aproximação diferencial. Quanto ao segundo grupo, o parâmetro  $t_Z$  apresenta piores resultados na aproximação discreta, com valores de erro muito elevados (da ordem das centenas de %).

Relativamente aos parâmetros  $\Omega_X$  e  $\Omega_Y$ , a aproximação discreta apresenta menor tendência de crescimento, especialmente em relação ao método DV (aproximação diferencial). Os valores de erro apresentados são quase sempre superiores aos do método DCCE e inferiores aos do método DV. Na estimação do parâmetro  $\Omega_Z$ , a aproximação discreta é a que apresenta melhores valores, sem tendência de crescimento.

$\phi$	<b>Efeito da magnitude da velocidade de rotação</b>	Seq. reais A a D DIF. vs. DISC.
--------	---	------------------------------------

(a)  $t_x$ (b)  $t_y$ (c)  $t_z$ (d)  $\Omega_x$ (e)  $\Omega_y$ (f)  $\Omega_z$

Tal como se observa nas sequências de translação, nas de rotação a estimação dos parâmetros  $t_X$  e  $t_Y$  é melhor da aproximação discreta que, também apresenta menor crescimento. Quanto ao parâmetro  $t_Z$ , a aproximação discreta é pior do que ambos os métodos da aproximação diferencial.

Para o parâmetro  $\Omega_X$ , o método DCCE apresenta valores muito semelhantes aos da aproximação discreta, com um crescimento em função do aumento da velocidade de rotação. Os valores convergem todos para o 1 grau/frame. Quanto ao parâmetro  $\Omega_Y$ , o método discreto é o que apresenta melhores resultados, não mostrando nenhuma tendência de subida ou descida. No parâmetro  $\Omega_Z$ , a aproximação discreta volta a ser a melhor.



Parte IV

**CONCLUSÃO**



# Capítulo 10

## Conclusões

A análise dos resultados das experiências com imagens sintéticas e reais permite tirar um conjunto de conclusões. As conclusões tiradas são também fruto de uma confrontação entre os resultados obtidos e as equações da propagação da incerteza.

Relativamente ao cálculo da componente segundo o eixo  $Z$  da velocidade 3D dos pontos da cena ( $V_Z$ ), pode concluir-se que o tipo de movimento (translação, rotação ou misto) tem uma elevada influência na qualidade da estimação.

Nos movimentos de translação, o valor de  $V_Z$  é igual para todos os pontos da cena (igual à velocidade de translação ao longo do eixo  $Z$ ). A qualidade da estimação de  $V_Z$ , para estas sequências, depende também da magnitude das velocidades. O erro de estimação tem tendência a descer com o aumento das velocidades de translação, o mesmo acontecendo com a dispersão dos valores estimados (desvio padrão). Verifica-se este comportamento para ambas as aproximações. Nas sequências reais observa-se que para movimentos de translação menores do que duas distâncias focais por frame, os resultados são de fraca qualidade e que, para velocidades, maiores o erro decresce rapidamente.

Note-se que a equação da restrição de profundidade - DCCE - depende fortemente dos gradientes da profundidade e, portanto, do mapa de disparidade, cujo erro de

discretização/quantização é decrescente com a magnitude das velocidades.

Nos movimentos de rotação, o valor de  $V_Z$  não é igual em todos os pontos, dependendo da velocidade de translação segundo o eixo  $Z$ , das velocidades de rotação segundo os eixos  $X$  e  $Y$  e das coordenadas 3D  $X$  e  $Y$  no referencial da câmara. A estimação desta quantidade não é fácil e os métodos estudados obtêm valores de estimação muito fracos. Nestas sequências de imagens, os resultados reais são diferentes dos resultados obtidos com imagens sintéticas. Em imagens reais, o método DCCE é melhor do que o método da restrição do fluxo binocular - DV. O erro relativo médio e o desvio padrão apresentam uma tendência de decrescimento com o aumento da magnitude das velocidades. Este comportamento observa-se tanto para a aproximação diferencial como para a aproximação discreta.

Na estimação dos seis parâmetros do movimento -  $\vec{\phi}$  - podem distinguir-se, quanto ao comportamento e qualidade de estimação, quatro grupos de parâmetros.

Em relação ao primeiro grupo -  $\{t_X; t_Y\}$  - pode observar-se, em todos os casos, que o erro relativo e/ou absoluto é muito elevado (pode atingir as centenas de distâncias focais por frame). A principal causa deste facto é a elevada instabilidade numérica de que sofrem os métodos de regressão linear múltipla nestes parâmetros. Com o aumento das velocidades de translação e rotação, existe uma tendência de crescimento do erro, mais acentuada no método DCCE (é de notar, contudo, que nem sempre o erro absoluto cresce mais rapidamente do que as velocidades, perdendo, pois, importância relativa). O método DV apresenta genericamente melhores resultados. Na aproximação discreta, a estimação dos parâmetros deste grupo apresenta resultados muito melhores do que a aproximação diferencial, mas igualmente com tendência de crescimento.

Na estimação do segundo grupo - o parâmetro  $t_Z$  - ambos os métodos apresentam valores de estimação muito próximos dos valores exactos, para sequências de translação. Para as sequências de rotação, contudo, os valores estimados são piores.



Este facto está de acordo com a estimação de  $V_Z$  que, para sequências de rotação, apresentava maus resultados em ambos os métodos. Os métodos DCCE e DV apresentam comportamentos muito semelhantes não sendo, portanto, fácil afirmar qual deles é o melhor, mas o método DV apresenta melhores resultados para velocidades elevadas nas sequências de translação e o método DCCE apresenta-se melhor para os restantes casos. Na aproximação discreta, os valores de erro são muito elevados e com tendência de crescimento.

Relativamente ao terceiro grupo de parâmetros -  $\{\Omega_X; \Omega_Y\}$  - pode observar-se que, nas sequências de translação, o erro apresenta, de um modo geral, tendência de crescimento, para a aproximação diferencial, e uma ligeira tendência de decréscimo, para a aproximação discreta. O método DCCE é na generalidade dos casos o que melhores valores apresenta. Nas sequências de rotação, o método DV é ainda o pior de todos e o método DCCE apresenta resultados muito idênticos aos da aproximação discreta. O erro tem uma ligeira tendência de crescimento com o aumento da velocidade de rotação.

No quarto grupo - o parâmetro  $\Omega_Z$  - o erro absoluto é reduzido e não apresenta comportamento de subida para os métodos DCCE e DV (aproximação diferencial). No caso da aproximação discreta, verifica-se que há um crescimento do erro com o aumento da velocidade, mas que se mantém inferior ao apresentado pela aproximação diferencial.

Além do efeito do aumento da magnitude das velocidades na estimação de  $V_Z$  e  $\vec{\phi}$ , foram ainda efectuados diversos estudos de sensibilidade dos métodos DCCE e DV em ambas as aproximações. Resumem-se, seguidamente, as principais conclusões tiradas dos respectivos resultados.

A resolução do mapa de disparidade, a partir do qual se calcula a profundidade  $Z$  dos pontos da cena, tem, na aproximação diferencial, uma influência acentuada no método DCCE e, reduzida influência no método DV. Com a diminuição da reso-

lução da disparidade, na aproximação diferencial, o erro relativo médio (ERM) e o desvio padrão da estimação de  $V_Z$  (STD) do método DV, praticamente não sofrem alterações, ao passo que o ERM e o STD do método DCCE aumentam fortemente. No caso da aproximação discreta, ambos os métodos pioram os resultados com a diminuição da resolução da disparidade.

Na estimação das componentes do vector  $\vec{\phi}$  observa-se que, de um modo geral, o método DCCE piora os seus resultados com a diminuição da resolução do mapa de disparidade, o método DV sofre poucas alterações e que o método da aproximação discreta também apresenta crescimento do erro de estimação com a diminuição da resolução da disparidade.

Um outro parâmetro para o qual foi feita análise de sensibilidade dos métodos é o ruído aleatório adicionado ao mapa de disparidade. Pela observação dos resultados, pode concluir-se que o método DCCE varia fortemente com o aumento do desvio padrão do ruído adicionado à disparidade, tanto para a aproximação diferencial como para a aproximação discreta. No caso do método DV, observa-se uma insensibilidade em relação ao mesmo parâmetro na versão diferencial, mas um forte crescimento do erro no caso da versão discreta. O método DCCE apresenta, no entanto, um crescimento de maior declive.

Estes resultados estão de acordo com as equações de propagação da incerteza 6.5, 6.11, 6.15 e 6.20 em função da profundidade  $Z$  ou, as mesma equações mas em função da disparidade - 6.28, 6.29, 6.30 e 6.31.

No que toca à estimação dos parâmetros do movimento, em função da variação do ruído aleatório adicionado à disparidade, pode concluir-se que, de um modo geral, a estimação através do método DCCE piora com esta variação, apresentando crescimento acentuado do erro na maioria dos parâmetros. Mais uma vez, e de acordo com o que sucedia na estimação de  $V_Z$ , o método DV apresenta apenas ligeiríssimas alterações dos seus valores estimados. O método da aproximação discreta, por seu

lado, apresenta também um crescimento acentuado do erro.

Observa-se, no entanto, que para o método DCCE (aproximação diferencial), os parâmetros que sofrem de maior instabilidade numérica ( $t_X$ ,  $t_Y$  e  $\Omega_Z$ ) apresentam em alguns casos um decréscimo do erro de estimação com o aumento do ruído na disparidade.

A análise de sensibilidade dos métodos em relação à variação do ruído aleatório adicionado às velocidades da imagem (na aproximação discreta o ruído é adicionado às correspondências entre pontos de interesse, que nos permite calcular as velocidade através da diferença de coordenadas) permite concluir que o método DV, na sua aproximação diferencial, é muito sensível a este ruído, obtendo-se um crescimento muito acentuado do seu erro relativo e do respectivo desvio padrão. Na aproximação discreta, o método DV apresenta um ligeiro crescimento do erro, sobretudo para as sequências de rotação, mas com muito menor declive relativamente à aproximação diferencial.

No caso do método DCCE, verifica-se que tem uma sensibilidade pequena nas sequências de translação em ambas as aproximações, e uma maior sensibilidade nos movimentos de rotação. O declive é pelo menos uma ordem de grandeza inferior ao declive do método DV (ap. diferencial).

Se se atentar às equações da propagação da incerteza do método DV, pode verificar-se que a versão discreta do método não depende directamente da incerteza nas velocidades, pelo que se justifica o facto de ter reduzida sensibilidade a este ruído. No caso da sua versão diferencial, verifica-se que tem uma dependência da ordem de uma potência quarta da profundidade, o que justifica a fortíssima reacção a este parâmetro.

Relativamente aos parâmetros do movimento, podemos verificar que o método DV (aproximação diferencial) apresenta, de um modo geral, crescimento do erro de estimação com o aumento do ruído nas velocidades. O método DCCE é mais in-

sensível, não apresentando grandes variações. O método da aproximação discreta apresenta crescimento do erro nas sequências de rotação, mas nos movimentos de translação apresenta um decréscimo do erro de estimação. Este decréscimo pode justificar-se com o aumento da estabilidade numérica do método, uma vez que este envolve a inversão de matrizes que, como é bem sabido, sofre de problemas de condicionamento numérico.

Por último, para a aproximação discreta, foi estudado o efeito do número de pontos de interesse usados. Verifica-se que, para a gama de valores testados ( $\{128, 512, 2048, 8192\}$ ) ambos os métodos apresentam uma ligeira redução do erro relativo médio e do respectivo desvio padrão, sobretudo para os movimentos de rotação (pura ou mista). Os dois métodos têm sensibilidade muito semelhante relativamente a este parâmetro.

No caso dos parâmetros do movimento, verifica-se uma variação semelhante, isto é, ligeira melhoria dos valores de estimação, sobretudo para as sequências de rotação.

No que respeita à confrontação das aproximações diferencial e discreta, pode concluir-se que, para a estimação de  $V_Z$ , as aproximações não apresentam diferenças significativas mas que, no caso dos movimentos de rotação a aproximação discreta do método DCCE é ligeiramente pior do que a versão diferencial e que, no caso do método DV, se passa o contrário, isto é, a aproximação discreta é ligeiramente melhor.

Quanto a esta confrontação na estimação de  $\vec{\phi}$ , conclui-se que a aproximação discreta é melhor dos que os dois métodos da aproximação diferencial nos parâmetros com baixa estabilidade numérica:  $t_X$ ,  $t_Y$  e  $\Omega_Z$ , pior do que ambos em  $t_Z$  e melhor do que o método DV em  $\Omega_X$  e  $\Omega_Y$  e semelhante ao método DCCE nestes mesmos parâmetros.

Em resumo, pode concluir-se deste trabalho que, no que respeita à estimação

de  $V_Z$ , nos movimentos de translação é possível estimar  $V_Z$  com alguma precisão (erros da ordem dos 10-30%), usando mapas de disparidade de baixa resolução. Nas sequências de rotação, a estimação é de fraca qualidade. O método DCCE é o que melhores resultados apresenta na maioria dos casos, especialmente para os movimentos rotacionais.

A aproximação discreta é muito semelhante, em termos de qualidade de estimação de  $V_Z$ , à aproximação diferencial.

O desvio padrão da estimação de  $V_Z$  é, na generalidade dos casos, elevado. Isto significa que, deverá ser usado um número elevado de pontos na sua estimação, para garantir a convergência para o valor médio.

Na estimação dos parâmetros do movimento -  $\vec{\phi}$ , existem problemas de instabilidade numérica e propagação de erro (método DV) em três parâmetros -  $\{t_X, t_Y, \Omega_Z\}$ . No que respeita a  $t_Z$ ,  $\Omega_X$  e  $\Omega_Y$ , é possível estimar os seus valores com algumas precisão. O método DCCE apresenta novamente melhores resultados.

A aproximação discreta é, na estimação de  $\vec{\phi}$ , melhor para os parâmetros com instabilidade numérica, pior em  $t_Z$  e muito semelhante ao método DCCE nos restantes parâmetros.

Conclui-se ainda que o método DCCE é muito sensível à resolução do mapa de disparidade e à incerteza nele contida, sendo a informação de disparidade o factor crítico na sua qualidade, tanto da aproximação diferencial como da aproximação discreta. O método DV, por seu lado, na aproximação diferencial é muito sensível ao ruído nas velocidades (factor crítico), sendo essa influência muito menor na aproximação discreta, onde o ruído na disparidade se torna no factor crítico.

Na utilização real dos métodos DCCE e DV, há um confronto entre a importância que toma o erro na disparidade para o primeiro e o erro nas velocidades para o segundo. Nos nossos testes, o método DCCE revelou-se ser ligeiramente superior ao método DV, mas pensamos que em situações em que o fluxo óptico seja calculado

com elevada precisão o método DV se revela superior ao método DCCE. O método que se comporta melhor é aquele que tiver os dados críticos de melhor qualidade.

### **Trabalho Futuro**

Vislumbramos algumas extensões possíveis a este trabalho. Pensamos que se poderia, juntando as vantagens de cada um dos métodos, propor uma combinação dos dois, tanto para a estimação de  $V_Z$  como para a estimação de  $\vec{\phi}$ , onde poderia ser também incluída a aproximação discreta. Poder-se-ia, também, usar um filtro de Kalman para otimizar a estimação. Outra extensão possível para este trabalho é a utilização das medidas estimadas no controlo de uma plataforma móvel, onde poderiam ser usados apenas alguns dos parâmetros comuns em navegação em planos: duas velocidades de translação e uma ou duas velocidades de rotação.

Parte V

**APÊNDICE**





# Apêndice A

## Sequências Sintéticas

Os parâmetros do movimento e valores verdadeiros de  $V_Z$  das sequências sintéticas analisadas e cujos resultados são neste apêndice reportados, discriminam-se na tabela A.1. As unidades em que se encontram as velocidades de translação e rotação são, respectivamente, *mm/frame* e *graus/frame*. Utiliza-se o anglicismo *frame* para designar cada uma das imagens da sequência.

Seq.	$t_X$	$t_Y$	$t_Z$		$\Omega_X$	$\Omega_Y$	$\Omega_Z$		$V_Z$
A	0.0	0.0	-5.0	mm/frame	0.0	0.0	0.0	graus/frame	-5.0
B	0.0	0.0	0.0	mm/frame	0.0	-0.25	0.0	graus/frame	0.25 X

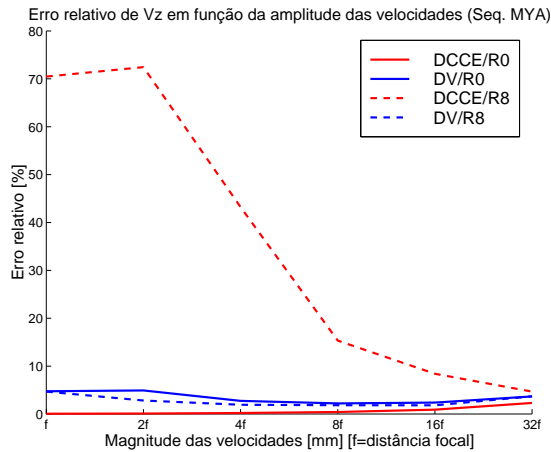
Tabela A.1: Parâmetros do movimento nas sequências sintéticas A e B.

Os resultados obtidos com estas sequências são, de seguida, apresentados.

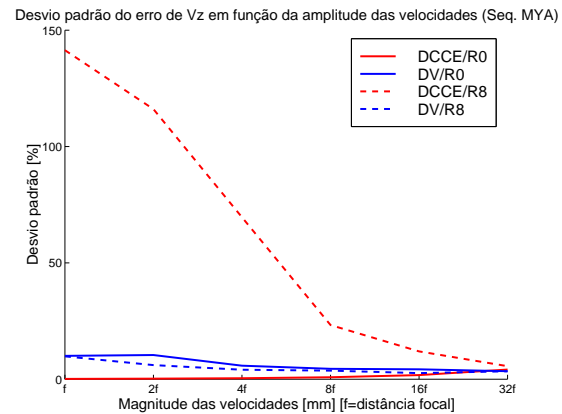
## A.1 Aproximação diferencial

São, de seguida, apresentados os resultados obtidos com as sequências de imagens sintéticas A e B, referentes a movimentos de translação ao longo do eixo  $Z$  e rotação em torno do eixo  $Y$ , respectivamente. Os resultados apresentados são referentes à aproximação diferencial.

$V_Z$	<b>Efeito da magnitude do deslocamento</b>	Seq. sintética A DIF.
-------	--	--------------------------



(a) ERM



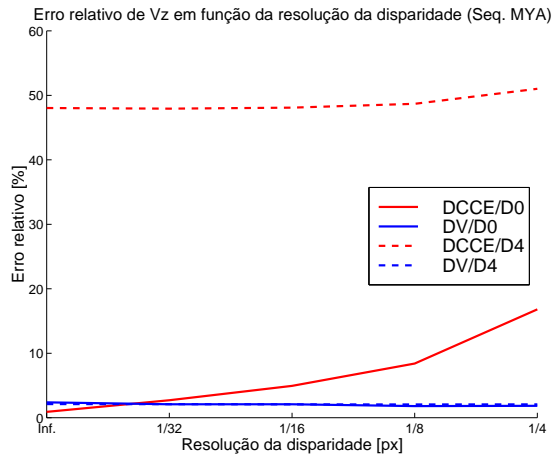
(b) DPM

Nestes gráficos, podemos verificar que o erro relativo médio tende a convergir para um valor relativamente baixo quando o deslocamento entre imagens consecutivas é maior. Na verdade, no método da restrição de profundidade - DCCE, como  $V_Z$  depende das derivadas espaciais e temporais da profundidade, para deslocamentos maiores os ruídos aleatórios tornam-se menos importantes, isto é, a relação sinal/ruído melhora. O mesmo se passa com o métodos da restrição do fluxo óptico - DV, mas em menor escala. O erro relativo médio é menor no método DV para resoluções baixas.

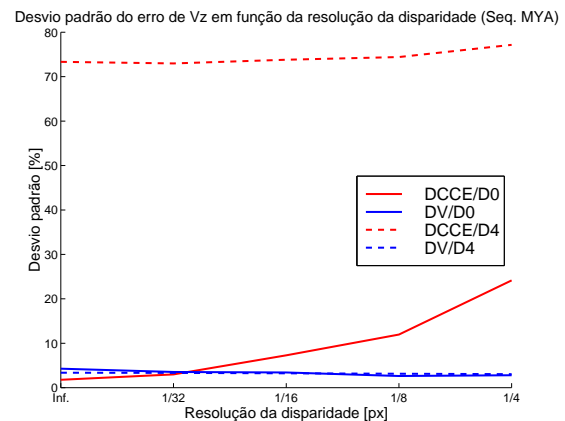
Quanto ao desvio padrão, podem repetir-se as anteriores afirmações. Observa-se que também o desvio padrão converge para um valor que ronda os 10% com o aumento da magnitude do deslocamento. Pode observar-se também que quando usamos baixas resoluções para a disparidade, o desvio padrão médio - DPM cresce muito em relação aos valores de DPM com resolução infinita.

Pode ainda concluir-se que o método DCCE é mais sensível aos efeitos da magnitude do deslocamento entre imagens consecutivas do que o método DV, sobretudo quando a resolução da disparidade é reduzida.

$V_Z$	<b>Efeito da resolução da disparidade</b>	Seq. sintética A DIF.
-------	---	--------------------------



(a) ERM



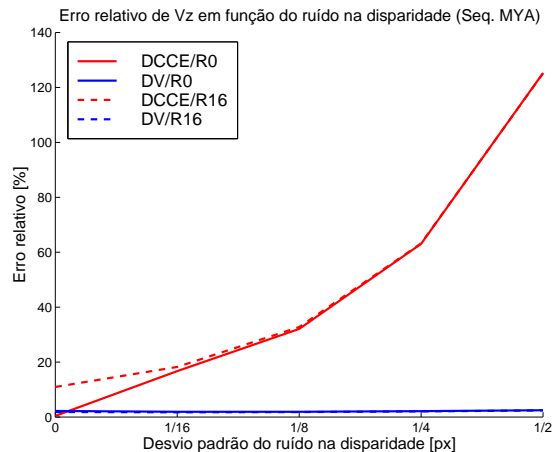
(b) DPM

Pela análise deste painel, podemos concluir que o método DCCE é mais sensível do que o método DV em relação ao número de níveis de disparidade, isto é, em relação à resolução da disparidade. Observa-se que as estatísticas para o método DV quase não se alteram para resoluções diferentes. O ERM para o método DCCE apresenta um crescimento acentuado quando a resolução da disparidade decresce.

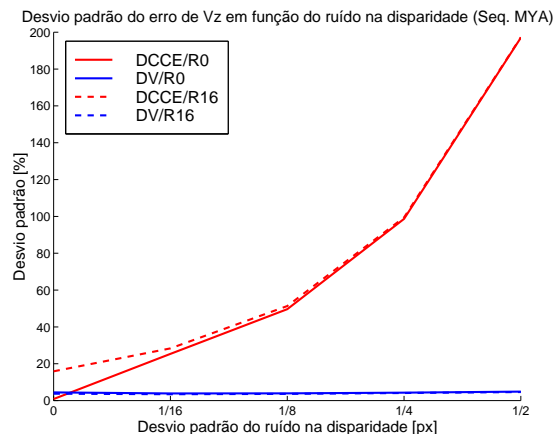
Quanto ao DPM, nota-se que este é claramente superior no método DCCE do que no método DV e que apresenta uma tendência de crescimento com a diminuição da resolução na disparidade.

O método DV é melhor do que o método DCCE nestas condições.

$V_Z$	<b>Efeito do ruído aleatório da disparidade</b>	Seq. sintética A DIF.
-------	---	--------------------------



(a) ERM

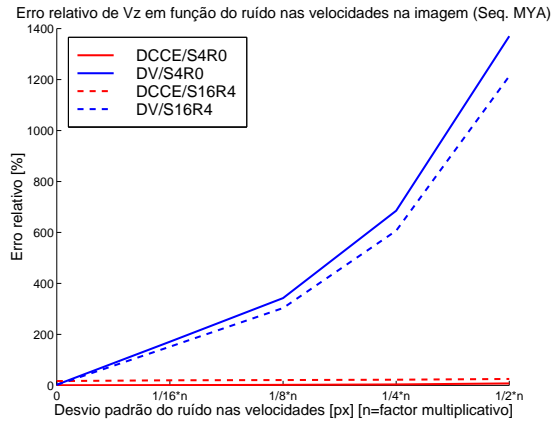


(b) DPM

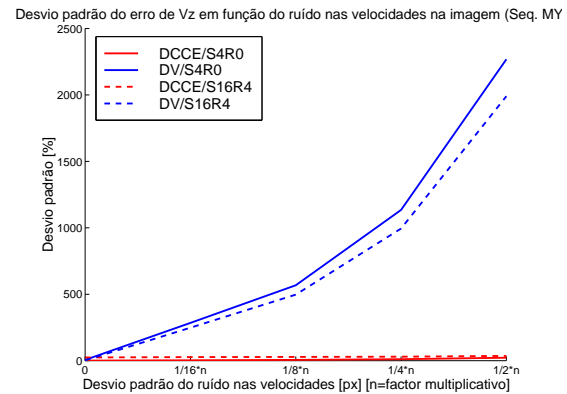
Os gráficos deste painel representam o efeito de aumentar o ruído aleatório no mapa de disparidades, para diferentes resoluções da própria disparidade. O que se pode observar em relação à estatística ERM é que para os níveis testados do desvio padrão do ruído na disparidade o método DV, contrariamente ao que sucede no método DCCE, não sofre grandes alterações no seu erro médio. Observa-se, contudo, um valor médio do ERM superior, e crescente, no caso do método DCCE, o que seria novamente de esperar devido à maior sensibilidade do método DCCE em relação à informação de disparidade.

Quanto ao DPM, observa-se que o método DV é praticamente insensível a este ruído mantendo os seus valores do DPM em valores aproximadamente iguais. Contrariamente, o método DCCE apresenta uma forte sensibilidade do seu desvio padrão médio em relação ao ruído na disparidade.

$V_Z$	<b>Efeito do ruído aleatório nas velocidades na imagem</b>	Seq. sintética A DIF.
-------	--	--------------------------



(a) ERM

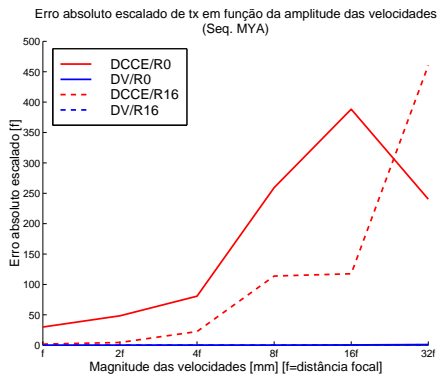


(b) DPM

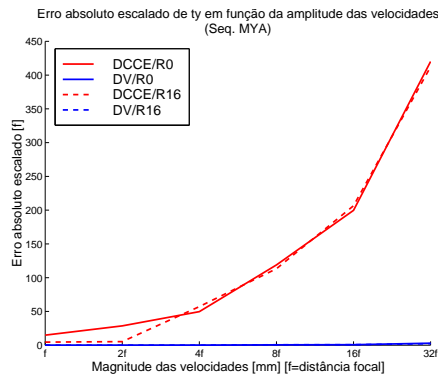
Da análise cuidada do painel do efeito do ruído nas velocidades podemos concluir que relativamente à estatística ERM, o método da restrição de profundidade - DCCE não apresenta variações importantes do seu valor quando o desvio padrão do ruído aumenta. O mesmo já não se passando com o método da restrição do fluxo binocular - DV.

Relativamente ao DPM, existe uma forte variação deste valor, sobretudo para menores deslocamentos entre imagens, para o método DV. Este facto pode perceber-se facilmente se atentarmos à equação da propagação da incerteza no método DV, que evidencia claramente como sendo as velocidades na imagem os parâmetros críticos neste método. Quanto ao método DCCE, o seu DPM não apresenta variações significativas.

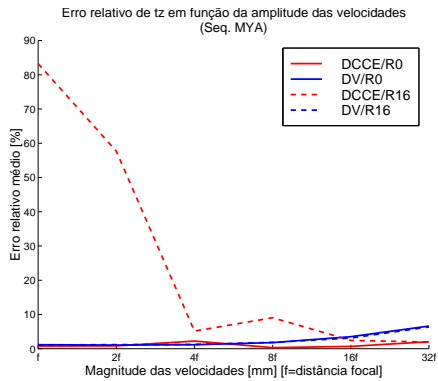
$\phi$	<b>Efeito da magnitude do deslocamento</b>	Seq. sintética A DIF.
--------	--	--------------------------



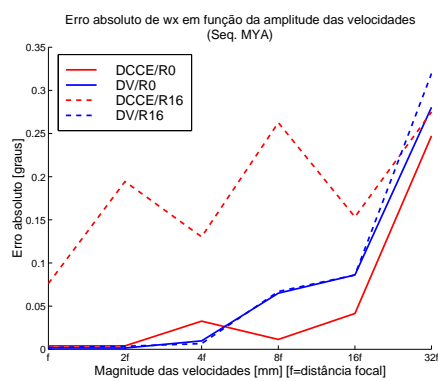
(a)  $t_x$



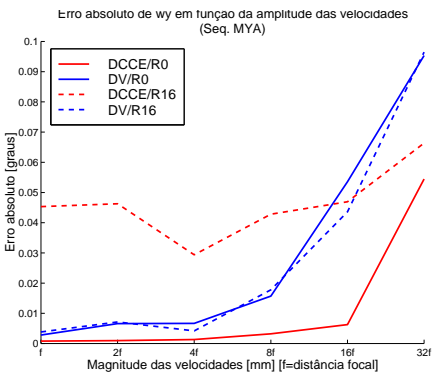
(b)  $t_y$



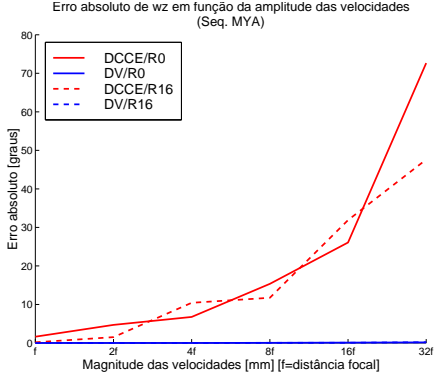
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$



(f)  $\Omega_z$



Neste painel, apresentam-se os erros relativos médios - ERM - do parâmetro  $t_Z$  que é o único diferente de zero para a sequência A e os erros absolutos para os restantes parâmetros, cujos valores verdadeiros são todos iguais a zero.

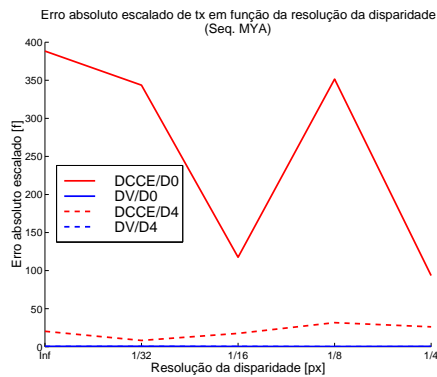
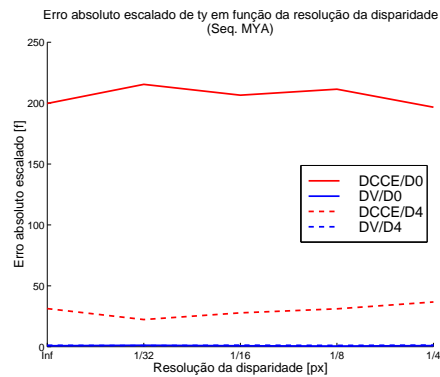
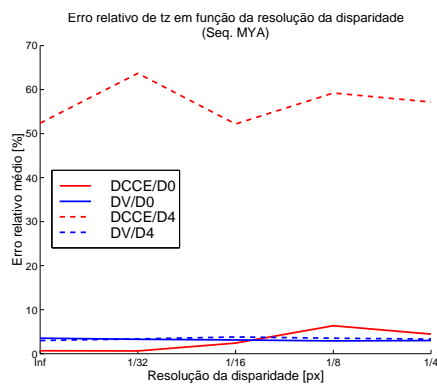
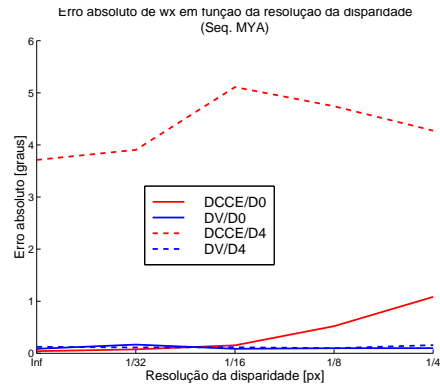
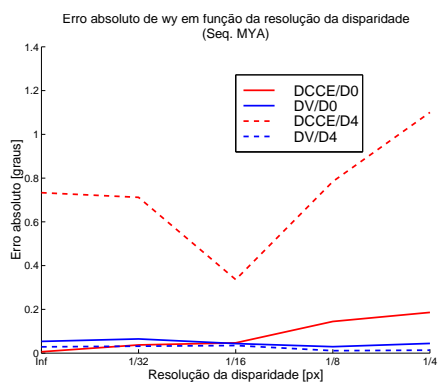
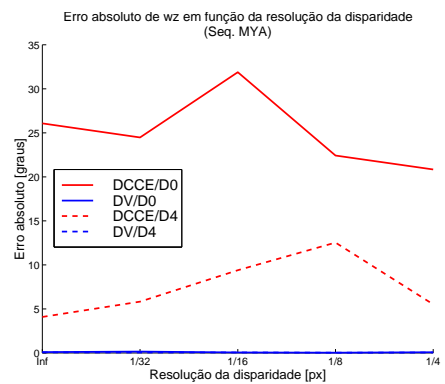
Pode observar-se que o método DV é melhor do que o método DCCE na quase totalidade das situações. Quanto aos parâmetros  $t_X$  e  $t_Y$ , sendo os seus valores iguais a zero, os resultados obtidos com o método DCCE são muito diferentes de zero (atingindo) a ordem das centenas de distâncias focais de erro. O método DV, contudo, obtém valores muito mais baixos para estes dois parâmetros. O seu valor não varia de forma acentuada para magnitudes diferentes do deslocamento.

A explicação para o facto de os valores obtidos, para estes parâmetros, usando o método DCCE, serem tão elevados, deve-se à instabilidade numérica dos métodos de regressão linear. Na verdade, as gamas de variação e as magnitudes dos coeficientes destes parâmetros são muito pequenas para que a sua estimação não sofra de instabilidade numérica.

Quanto ao parâmetro  $t_Z$ , o método DV mostra-se melhor do que o método DCCE para velocidades menores. No método DCCE, o erro relativo atinge valores muito elevados quando a resolução da disparidade é baixa.

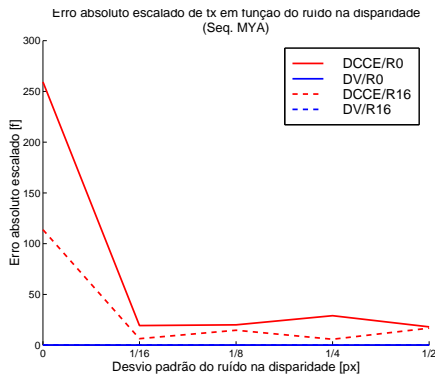
A variação do erro absoluto do parâmetros de rotação  $\Omega_Z$  em função da magnitude do deslocamento é mais pronunciado no método DCCE do que no método DV. Quanto aos restantes dois parâmetros de rotação, ambos os métodos aumentam o seu valor de erro absoluto.

$\phi$	<b>Efeito da resolução da disparidade</b>	Seq. sintética A DIF.
--------	---	--------------------------

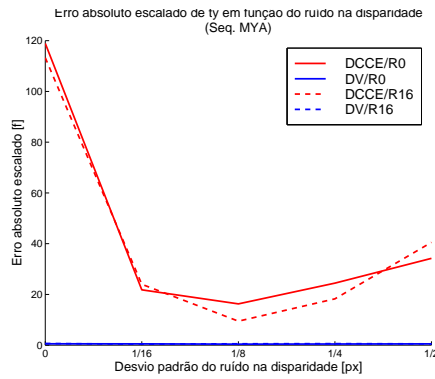
(a)  $t_x$ (b)  $t_y$ (c)  $t_z$ (d)  $\Omega_X$ (e)  $\Omega_Y$ (f)  $\Omega_Z$

Quanto ao efeito da resolução da disparidade na estimação dos parâmetros do movimento, podemos verificar que o método DV apresenta valores muito inferiores, tanto para o erro relativo em  $t_Z$ , como para o erro absoluto nos restantes parâmetros, relativamente ao método DCCE. Nota-se contudo que, à semelhança com o que sucedia no cálculo de  $V_Z$ , o erro não apresenta uma expressa tendência de subida na maioria dos parâmetros. Quanto ao parâmetro  $t_Z$ , nota-se uma ligeira subida do erro relativo com a diminuição da resolução da disparidade.

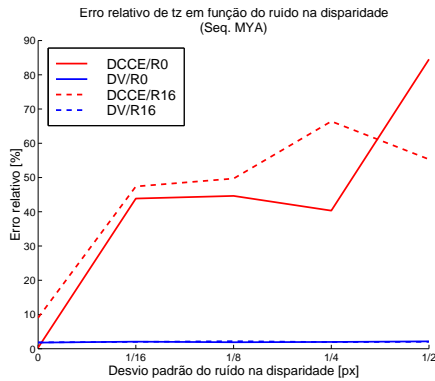
$\phi$	<b>Efeito do ruído aleatório da disparidade</b>	Seq. sintética A DIF.
--------	---	--------------------------



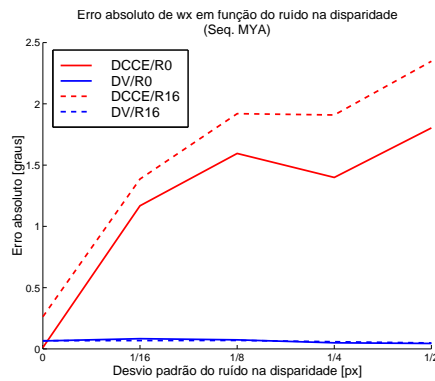
(a)  $t_x$



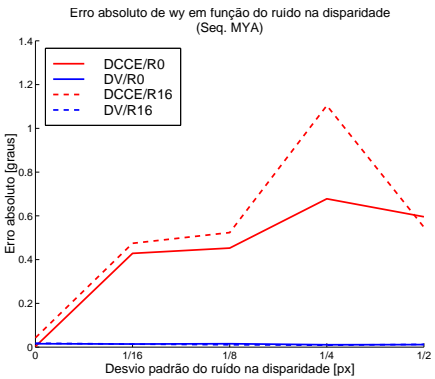
(b)  $t_y$



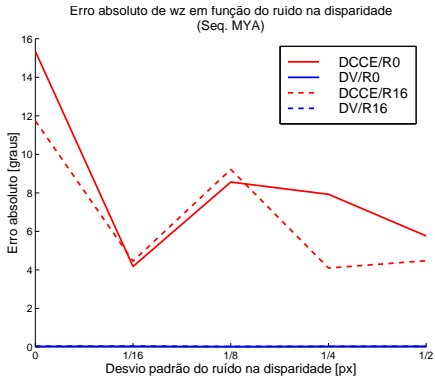
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$

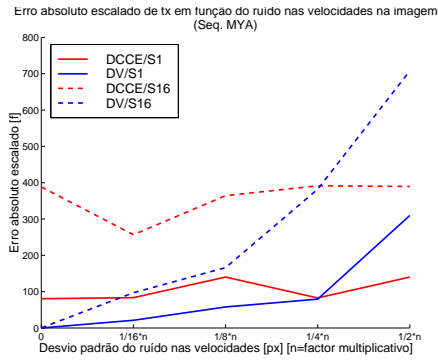


(f)  $\Omega_z$

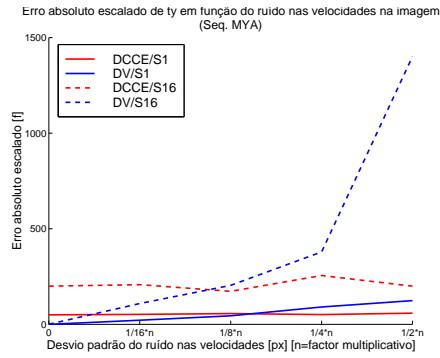
Destes gráficos, podemos novamente concluir que o método DV apresenta erros muito inferiores aos apresentados pelo método DCCE, para todas os parâmetros do movimento. Quanto ao parâmetro  $t_Z$ , notamos um forte crescimento do erro relativo do método DCCE com a diminuição da resolução na disparidade. O método DV não apresenta, contudo, crescimento significativo neste parâmetro.

Quanto aos restantes parâmetros, o erro absoluto do método DV mantém-se praticamente constante, em valores baixos. Apesar de ter erros absolutos elevados, e de ter fortes variações com a diminuição da resolução, o método DCCE tem uma tendência clara de subida do erro absoluto para alguns parâmetros e de descida para outros.

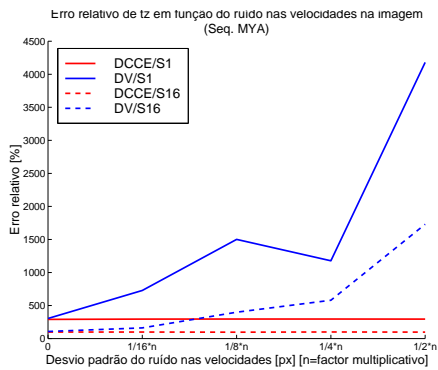
$\phi$	<b>Efeito do ruído aleatório nas velocidades na imagem</b>	Seq. sintética A DIF.
--------	--	--------------------------



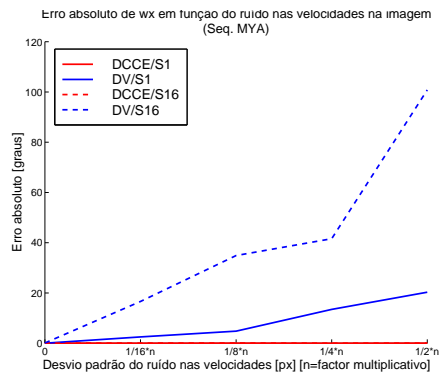
(a)  $t_x$



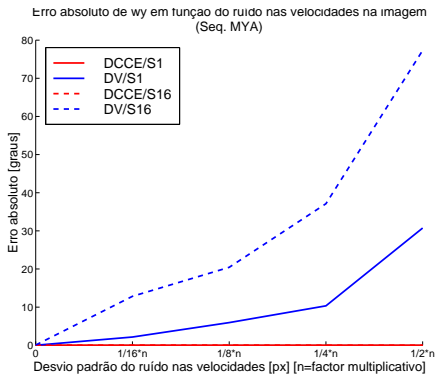
(b)  $t_y$



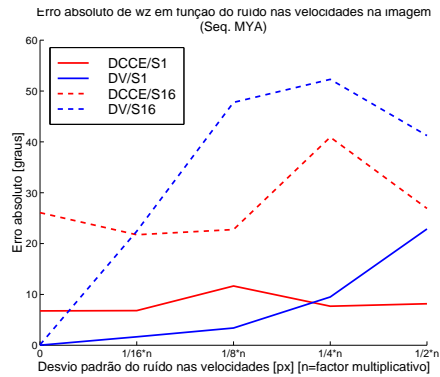
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$

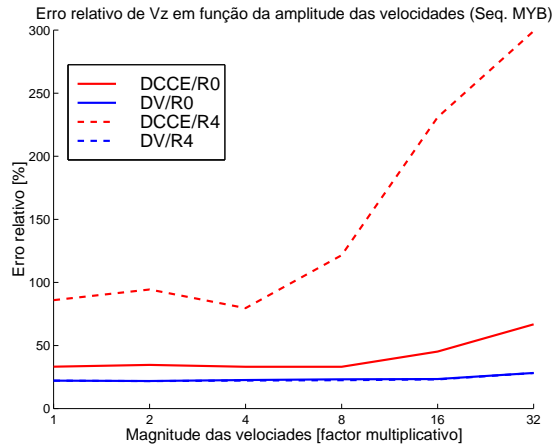


(f)  $\Omega_z$

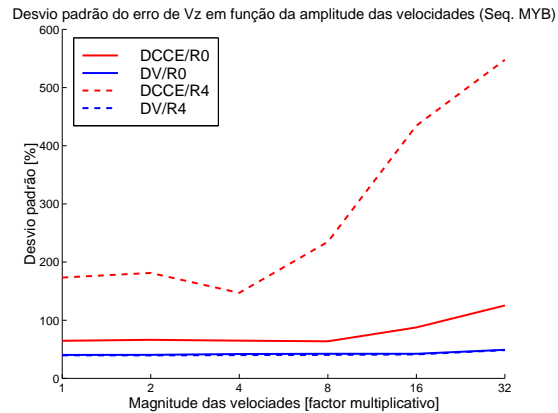
Ao analisar este painel, podemos observar diversos fenômenos. Em primeiro lugar, e relativamente aos parâmetros  $t_X$  e  $t_Y$ , podemos verificar que o erro absoluto do método DV aumenta fortemente com o aumento do desvio padrão, ao passo que o método DCCE aumenta apenas ligeiramente (isto é, com muito menor declive). Relativamente ao parâmetro  $t_Z$ , o método DCCE quase não apresenta variação do seu erro relativo enquanto que o erro relativo do método DV cresce rapidamente com o ruído nas velocidades.

Em relação aos parâmetros de rotação, nota-se que o método DV apresenta valores mais elevados para o erro absoluto, da ordem da dezena de graus de rotação por frame, o que é um valor bastante elevado. Além disso, este valor tende a aumentar com o ruído nas velocidades. O método DCCE apresenta valores de erro mais baixos e praticamente constantes.

$V_Z$	<b>Efeito da magnitude das velocidades</b>	Seq. sintética B DIF.
-------	--	--------------------------



(a) ERM



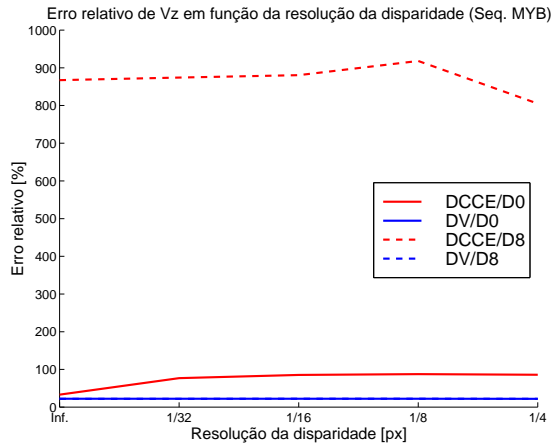
(b) DPM

Nas sequências de rotação, o erro relativo no cálculo de  $V_Z$  é mais elevado relativamente ao erro nas sequências de translação, sobretudo para o método DCCE. Nestes gráficos, podemos observar que o erro relativo aumenta com o aumento da velocidade de rotação, quer para o método DCCE, quer para o método DV. O método DV é, contudo, aquele que apresenta menor erro e menor crescimento.

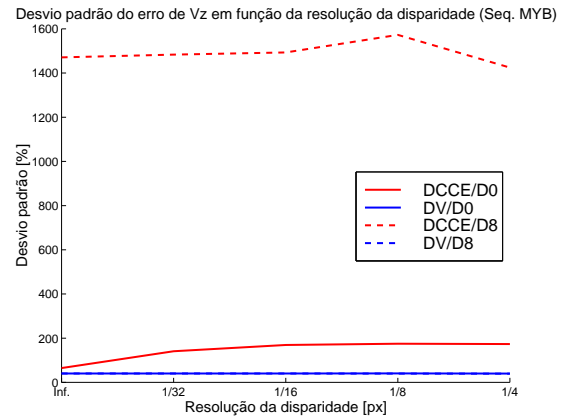
O comportamento do desvio padrão médio (DPM) é semelhante ao do erro relativo ERM, isto é, cresce bastante para o método DCCE e mais lentamente para o método DV.



$V_z$	<b>Efeito da resolução da disparidade</b>	Seq. sintética B DIF.
-------	---	--------------------------



(a) ERM

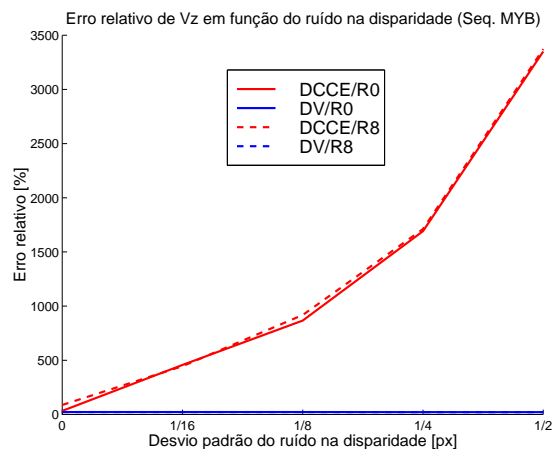


(b) DPM

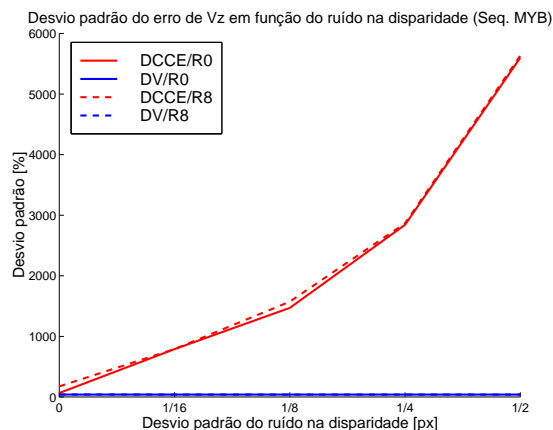
Quanto ao efeito da limitação na resolução da disparidade, podemos verificar que o erro do método DCCE aumenta com a diminuição da resolução e que o erro no método DV não apresenta variações significativas. Contudo, o valor do erro mantém-se muito elevado no método DCCE: da ordem dos 100%. Para o método DV, o erro é da ordem dos 20% para resoluções elevadas e 40% para resoluções baixas.

Quanto ao desvio padrão, este mantém-se em valores aproximadamente constantes, para o método DV, não apresentando sensibilidade à resolução. Para o método DCCE o erro apresenta crescimento. O método DCCE apresenta novamente valores do desvio padrão do erro muito superiores aos do método DV.

$V_Z$	<b>Efeito do ruído aleatório da disparidade</b>	Seq. sintética B DIF.
-------	---	--------------------------



(a) ERM

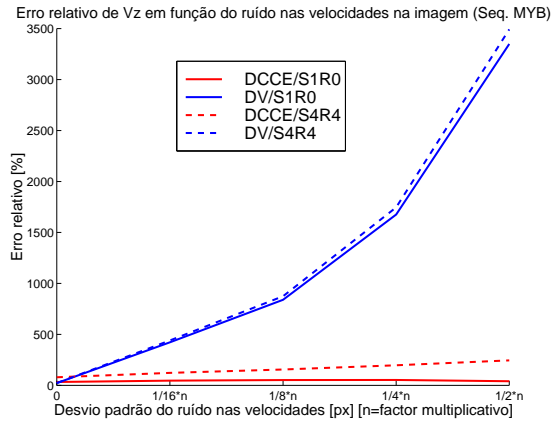


(b) DPM

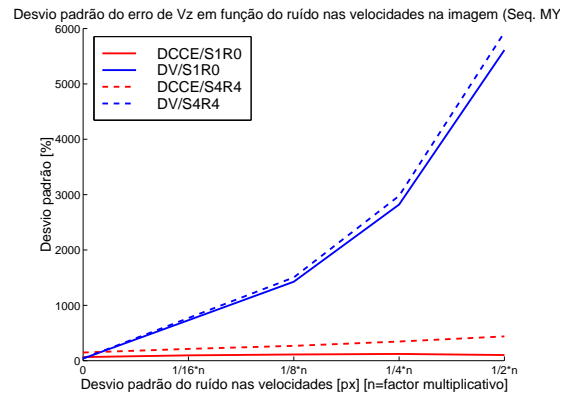
Quanto ao efeito da adição de ruído ao mapa de disparidade, podemos verificar que o erro relativo do método DV apresenta pequenas variações com o aumento do desvio padrão do erro. O método DCCE apresenta forte crescimento do erro ERM e erros muito elevados, superiores a 100%, o que torna impossível a sua utilização para estimar  $V_Z$ . O método DV, contudo, apresenta valores de erro relativos da ordem dos 20%.

Relativamente ao desvio padrão do erro, nota-se um crescimento muito acentuado com o aumento do desvio padrão do erro adicionado no método DCCE e, uma quase insensibilidade do desvio padrão do método DV em relação ao ruído na disparidade.

$V_z$	<b>Efeito do ruído aleatório nas velocidades na imagem</b>	Seq. sintética B DIF.
-------	--	--------------------------



(a) ERM

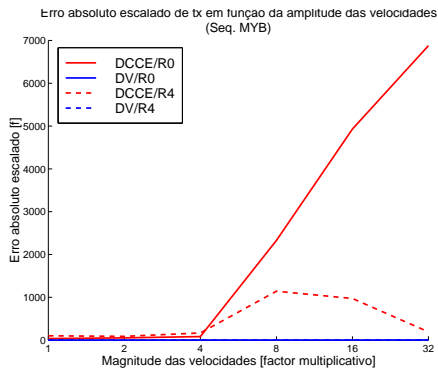


(b) DPM

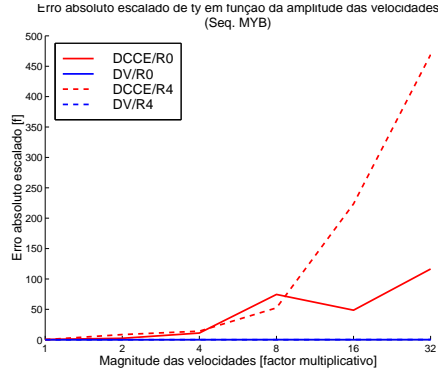
Nesta análise de sensibilidade, em relação ao desvio padrão do ruído adicionado às velocidades na imagem, notamos que é o método DV aquele que apresenta maior crescimento do erro. Na verdade, o método DCCE apresenta um crescimento com declive muito menor.

Quanto ao desvio padrão, o método DV volta a ser o mais afectado, apresentando um forte crescimento para valores crescentes da energia do ruído adicionado às velocidades. Mais uma vez, as variações apresentadas pelo método DCCE são de muito menor excursão.

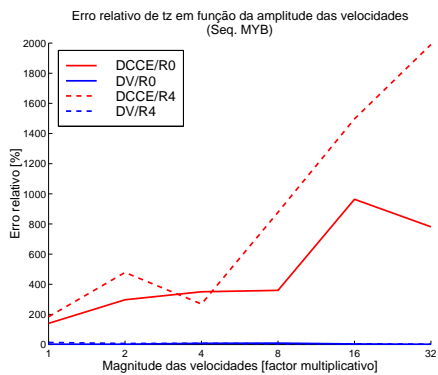
$\phi$	<b>Efeito da magnitude das velocidades</b>	Seq. sintética B DIF.
--------	--	--------------------------



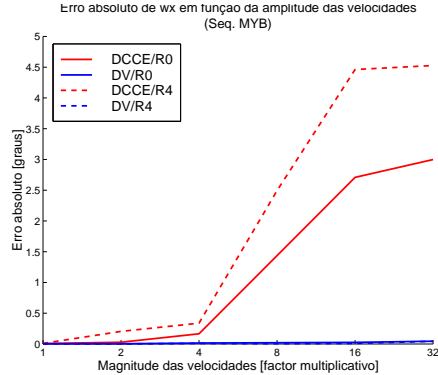
(a)  $t_x$



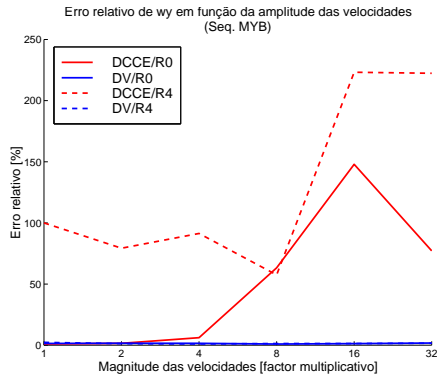
(b)  $t_y$



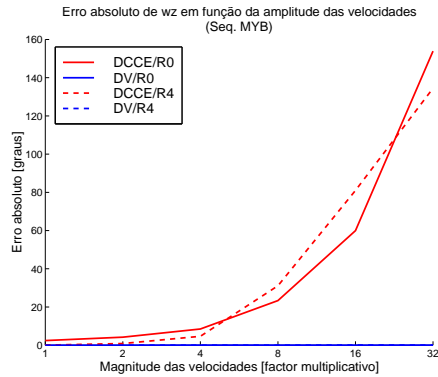
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$



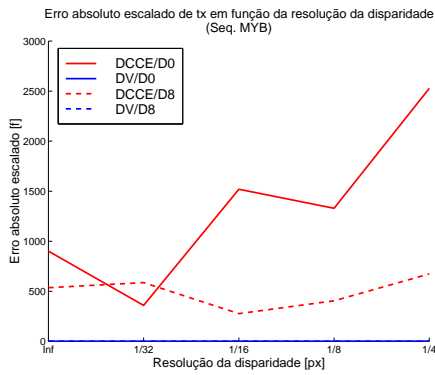
(f)  $\Omega_z$

Na estimação dos parâmetros do movimento, e em relação aos parâmetros cujo valor é igual a zero e, portanto, apenas podemos calcular o seu erro absoluto, nota-se uma tendência de crescimento do erro absoluto com o aumento da amplitude da velocidade de rotação, no método DCCE. No caso do método DV, os valores são muito próximo de zero e mantêm-se relativamente constantes.

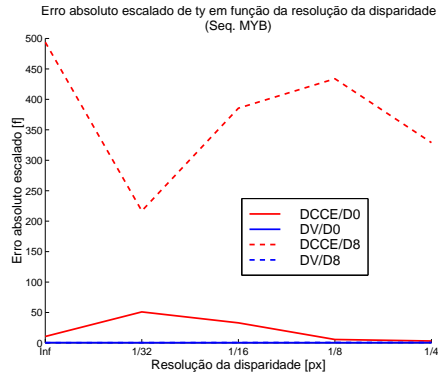
Relativamente ao parâmetro  $t_Z$ , notamos um crescimento, novamente no método DCCE, do erro relativo com o aumento da amplitude da velocidade de rotação e uma convergência para os 2-3% de erro no método DV. O método DCCE apresenta mais uma vez valores do erro muito superiores (quase sempre acima dos 100%).

O parâmetro  $\Omega_Y$  tem, no entanto, resultados diferentes. O método DV apresenta um valor de erro muito reduzido (inferior a 2%) e o método DCCE apresenta um valor de erro relativo elevado, crescente com o aumento da amplitude das velocidades.

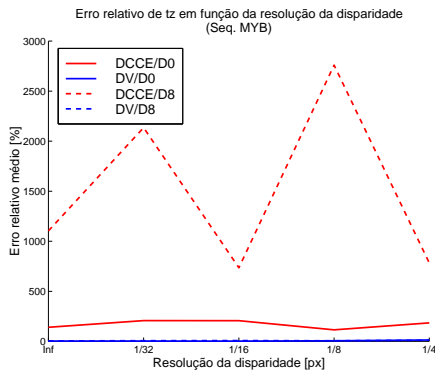
$\phi$	<h2>Efeito da resolução da disparidade</h2>	Seq. sintética B DIF.
--------	---	--------------------------



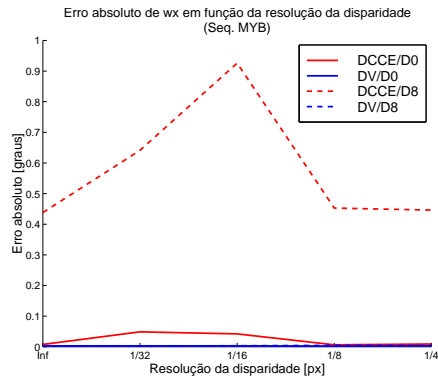
(a)  $t_x$



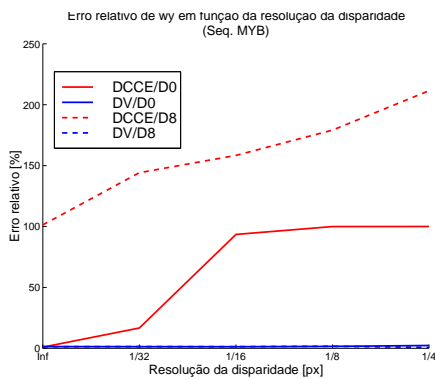
(b)  $t_y$



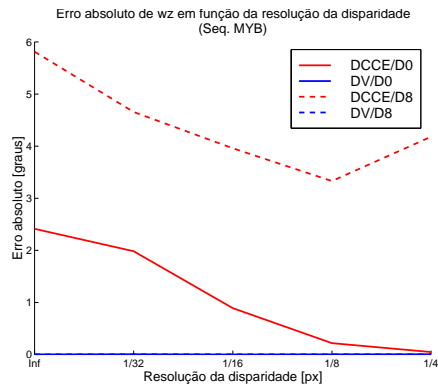
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_X$



(e)  $\Omega_Y$



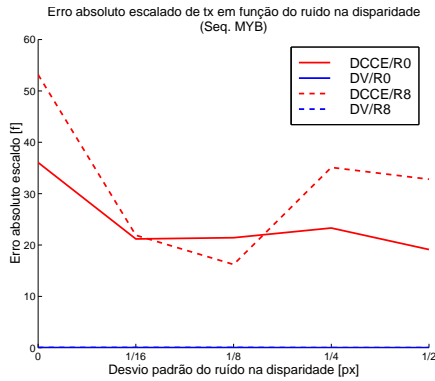
(f)  $\Omega_Z$

O efeito da resolução da disparidade sobre a estimação de parâmetros, nos parâmetros cujos valores são iguais a zero, é reduzido no método DV. No método DCCE, o erro absoluto destes parâmetros é mais elevado, mas não apresenta uma tendência clara de subida ou descida.

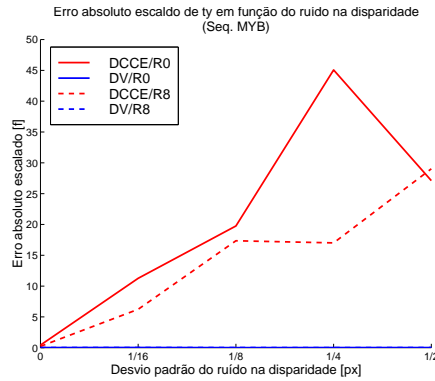
Quanto ao parâmetro  $t_Z$ , o método DV apresenta valores baixos para o erro relativo, com uma ligeira tendência de crescimento. O método DCCE, por seu lado, apresenta valores elevados para o erro relativo, novamente sem tendência de subida ou descida.

Em relação ao parâmetro  $\Omega_Y$ , o método DCCE apresenta um crescimento acentuado do seu erro ao passo que o método DV apresenta insensibilidade a estas variações. O método DCCE apresenta um valor de erro substancialmente mais elevado do que o método DV.

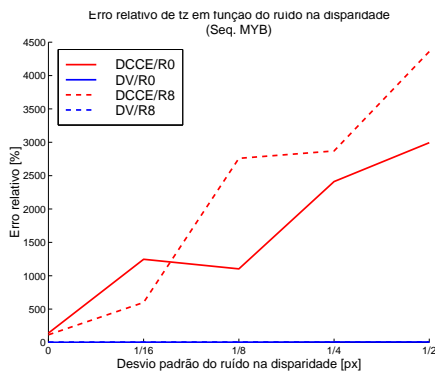
$\phi$	<b>Efeito do ruído aleatório da disparidade</b>	Seq. sintética B DIF.
--------	---	--------------------------



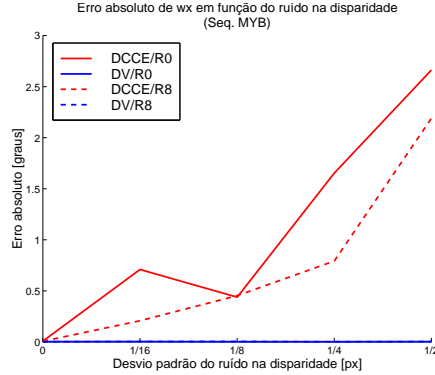
(a)  $t_X$



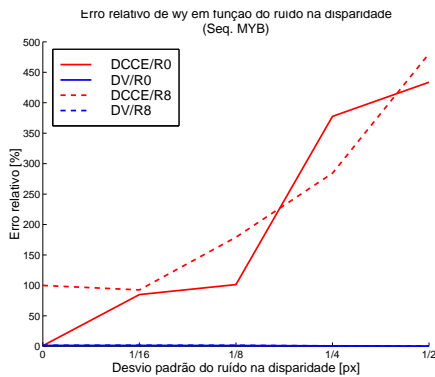
(b)  $t_Y$



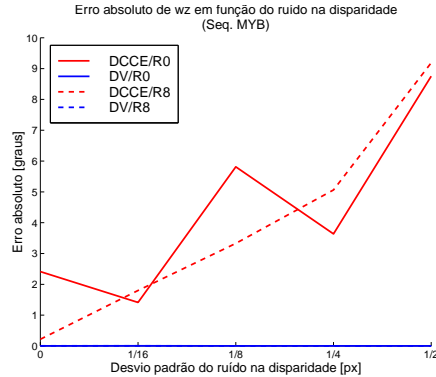
(c)  $t_Z$



(d)  $\Omega_X$



(e)  $\Omega_Y$



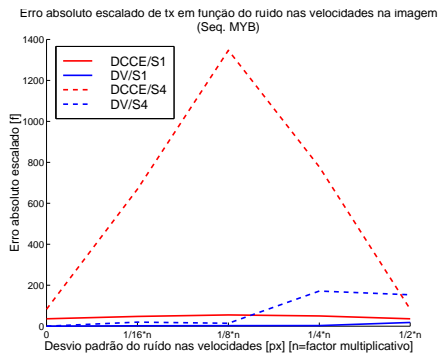
(f)  $\Omega_Z$



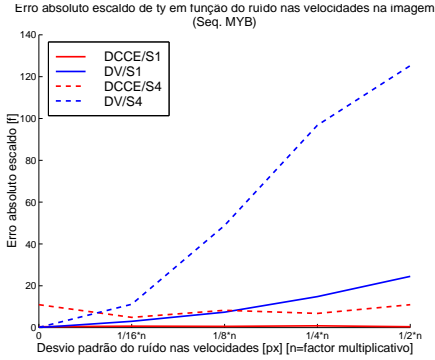
De um modo geral, o erro mantém-se para todos os parâmetros em valores muito baixos para o método DV, notando-se apenas uma ligeira subida no valor do erro relativo de  $t_Z$ . Quanto ao método DCCE, apresenta um forte crescimento com o aumento do desvio padrão do ruído adicionado ao mapa de disparidades, exceptuando no parâmetro  $t_X$ .

No caso dos parâmetros com erro relativo calculado,  $t_Z$  e  $\Omega_Y$ , podemos constatar que o valor do erro relativo, para o método DCCE, além de crescer muito rapidamente com o aumento do ruído na disparidade, tem valores muito elevados (da ordem dos milhares de % para o primeiro e da ordem das centenas de % para o segundo, o que corresponde a obter valores várias vezes superiores em módulo ao valor verdadeiro). Os erros absolutos também são elevados.

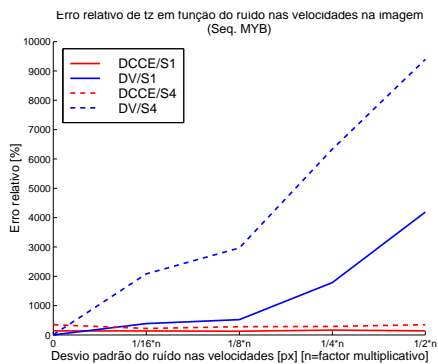
$\phi$	<b>Efeito do ruído aleatório nas velocidades na imagem</b>	Seq. sintética B DIF.
--------	--	--------------------------



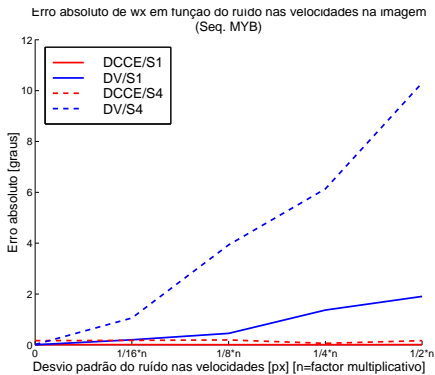
(a)  $t_x$



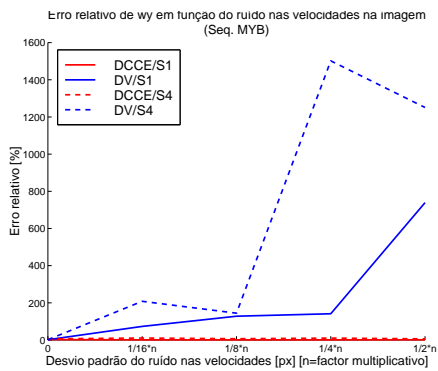
(b)  $t_y$



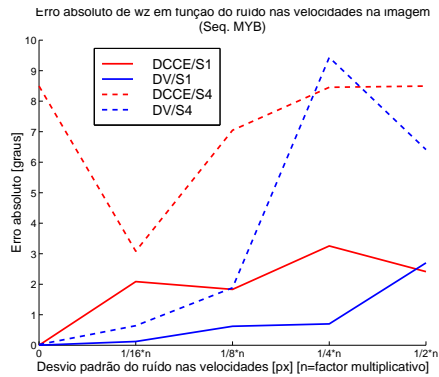
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$



(f)  $\Omega_z$

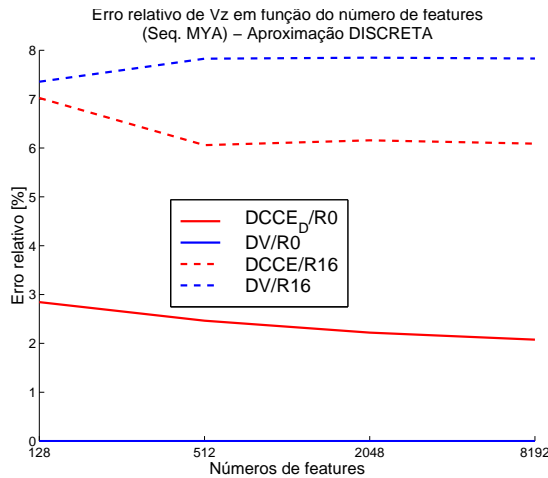
Ao variar o desvio padrão do ruído aleatório adicionado às velocidades na imagem, podemos verificar que o método DCCE é pouco sensível a esta variação, apresentando valores aproximadamente constantes ou então, em torno de um valor médio, não apresentando nenhuma tendência de subida ou descida do erro, quer absoluto, quer relativo. O erro relativo é elevado para o parâmetro  $t_Z$  mas, reduzido para o parâmetro  $\Omega_Y$ .

Contrariamente, o método DV apresenta uma forte variação do erro, quer absoluto, quer relativo, em função do ruído adicionado às velocidades. Nos parâmetros  $t_Z$  e  $\Omega_Y$ , o crescimento ascende a valores da ordem das centenas ou milhares de %.

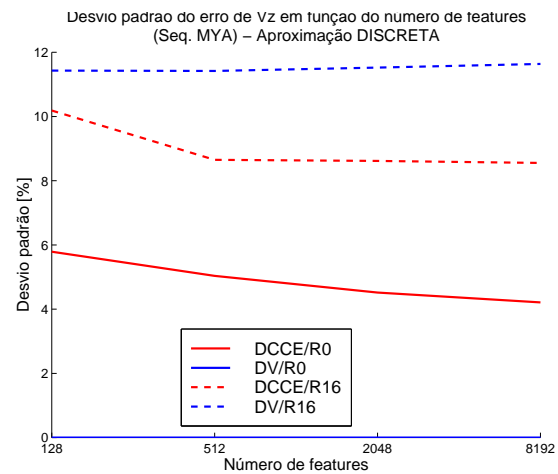
## A.2 Aproximação discreta

São, de seguida, apresentados os resultados obtidos com as sequências de imagens sintéticas A e B, referentes a movimentos de translação ao longo do eixo  $Z$  e rotação em torno do eixo  $Y$ , respectivamente. Os resultados apresentados são referentes à aproximação discreta.

$V_Z$	<b>Efeito do número de pontos de interesse</b>	Seq. sintética A DISC.
-------	--	---------------------------



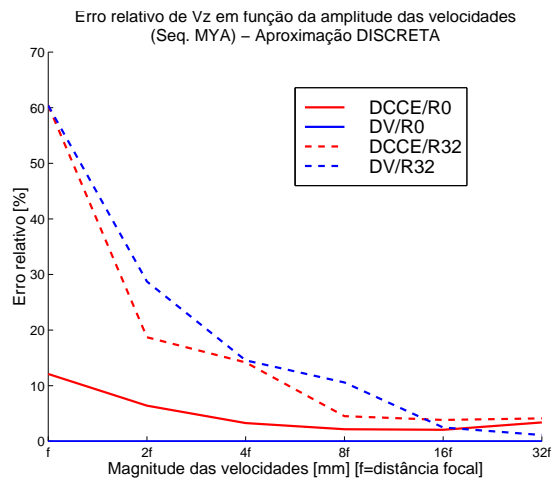
(a) ERM



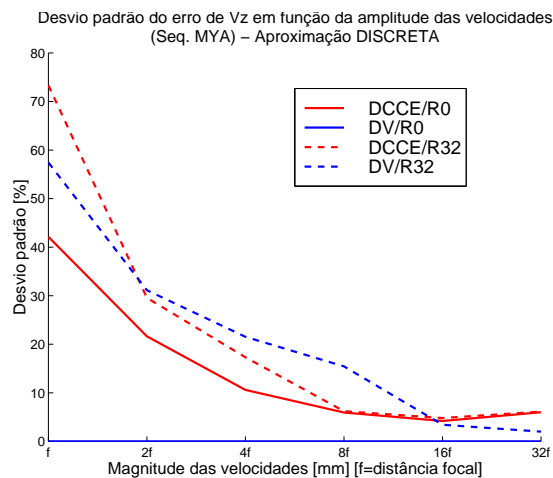
(b) DPM

Com o aumento do número de pontos de interesse (*features*) utilizados na estimação do valor de  $V_Z$ , verifica-se, para resolução infinita, que o erro e o desvio padrão do erro tendem a diminuir. Os valores apresentados pelo método DV são muito reduzidos (praticamente zero) e os apresentados pelo método DCCE são reduzidos (da ordem dos 2-3%). No entanto, quando a resolução da disparidade é de 1/16 píxeis, notamos um aumento do erro para ambos os métodos. Ambos os métodos apresentam pouca sensibilidade ao aumento do número de pontos de interesse para resoluções baixas. O desvio padrão tende também a manter-se aproximadamente constante para resoluções baixas.

$V_Z$	<b>Efeito da magnitude das velocidades</b>	Seq. sintética A DISC.
-------	--	---------------------------



(a) ERM



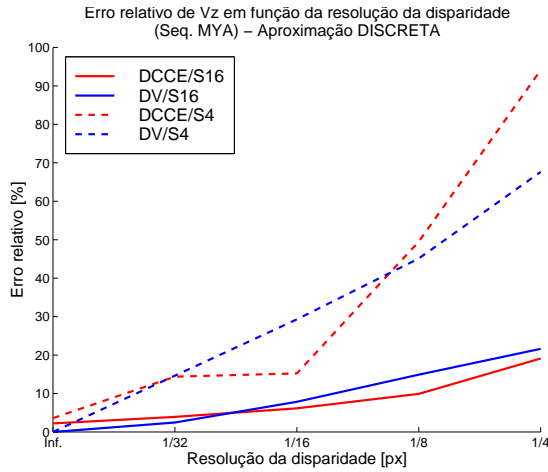
(b) DPM

Pode observar-se neste painel que o aumento da amplitude do deslocamento entre duas imagens consecutivas melhora a qualidade de estimação de  $V_Z$ . Esta melhoria deve-se ao facto de, sobretudo no método DCCE, as quantidades serem menos sensíveis a erros de quantização (arredondamento).

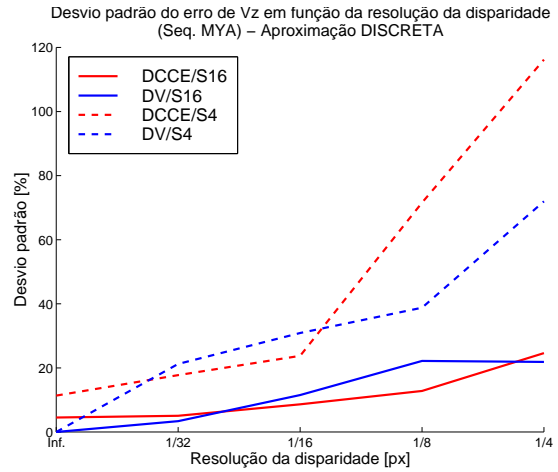
O método DV é melhor do que o método DCCE para resolução da disparidade infinita, apresentando valores de erros percentuais muito reduzidos. O método DCCE apesar de apresentar resultados piores do que o método DV, tem uma taxa de erro também relativamente baixa. Para resolução de  $1/32$  píxeis, os métodos apresentam resultados semelhantes, evidenciando a descida do erro para maiores deslocamentos.

Quanto ao desvio padrão, apresenta também uma tendência de descida do seu valor, para ambos os métodos. O método DCCE apresenta dispersões relativamente à média superiores do que o método DV para resolução da disparidade infinita e valores semelhantes para resolução de  $1/32$  píxeis.

$V_Z$	<b>Efeito da resolução da disparidade</b>	Seq. sintética A DISC.
-------	---	---------------------------



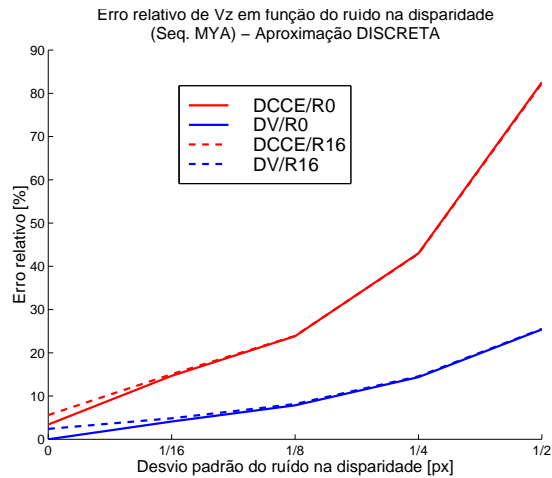
(a) ERM



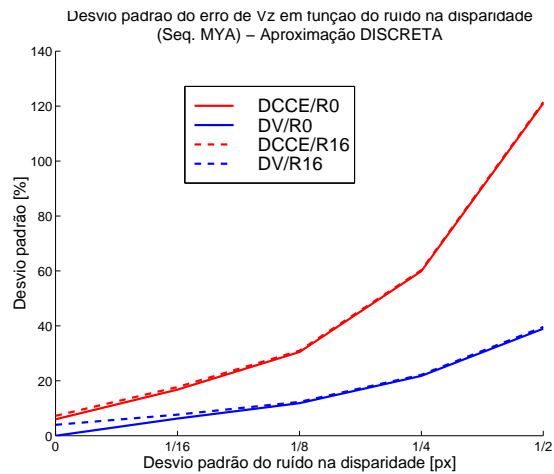
(b) DPM

Com a diminuição da resolução do mapa de disparidade, verifica-se um forte crescimento do erro relativo médio de  $V_Z$  e também do seu desvio padrão. Ambos os métodos apresentam comportamentos semelhantes, notando-se ainda que para velocidades de translação menores, o aumento do erro torna-se mais pronunciado.

$V_Z$	<b>Efeito do ruído aleatório da disparidade</b>	Seq. sintética A DISC.
-------	---	---------------------------



(a) ERM

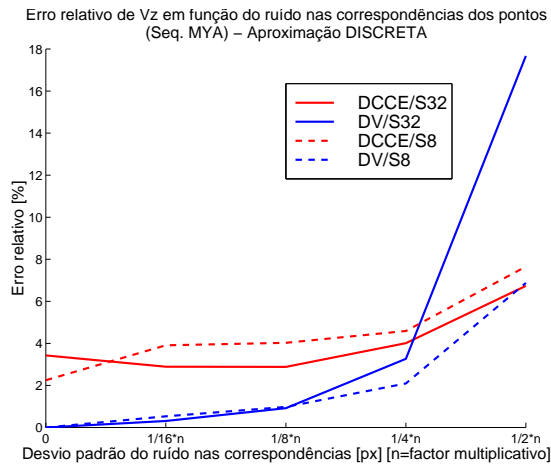


(b) DPM

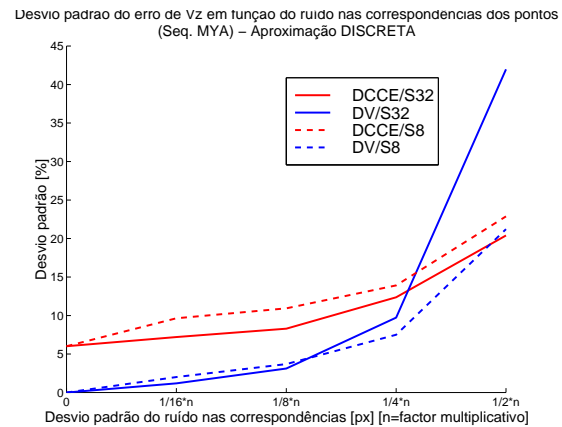
Quando é adicionado à disparidade ruído aleatório de energia crescente, verifica-se um aumento pronunciado tanto do erro relativo médio de  $V_Z$  como do desvio padrão. Ambos os métodos apresentam elevada sensibilidade a este parâmetro mas o método DCCE mostra-se mais instável. Verifica-se, ainda, que os valores do erro de desvio padrão para diferentes níveis de resolução da disparidade (infinita e 1/16 píxeis) são muito semelhantes.



$V_Z$	<b>Efeito do ruído aleatório nas correspondências de pontos</b>	Seq. sintética A DISC.
-------	---	---------------------------



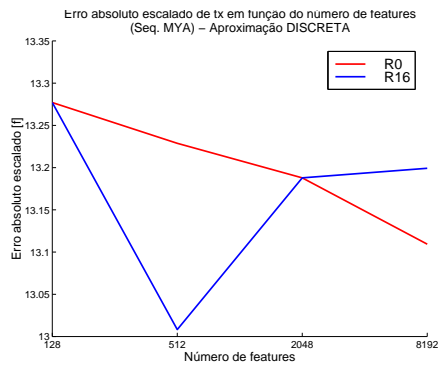
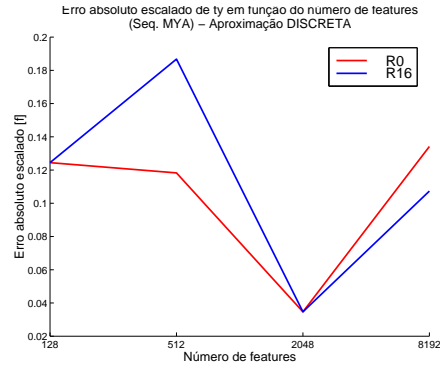
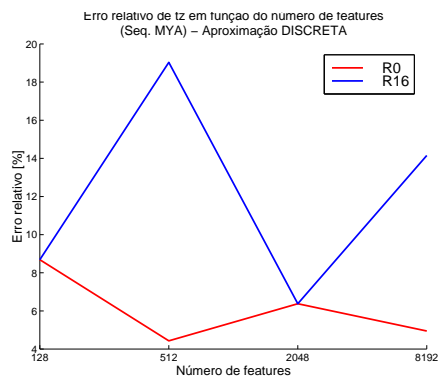
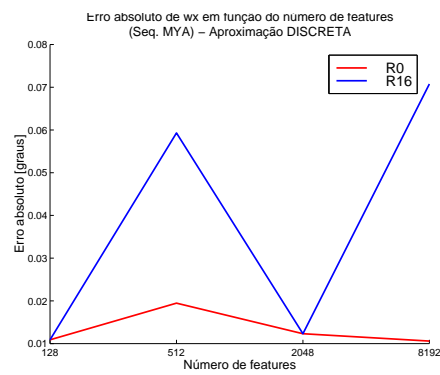
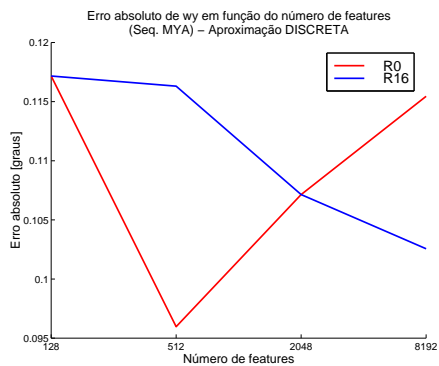
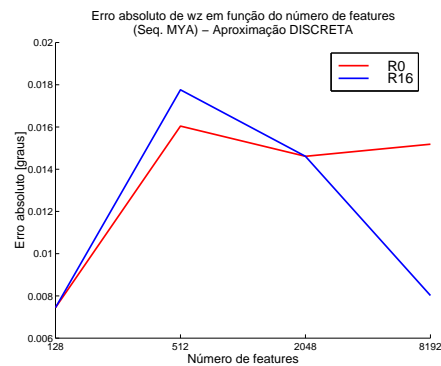
(a) ERM



(b) DPM

Com o aumento do ruído aleatório adicionado às correspondências entre os pontos, verifica-se um crescimento do erro de  $V_Z$  e também do desvio padrão. O método DCCE apresenta resultados superiores ao método DV para desvios padrão do ruído mais pequenos, mas quando o ruído adicionado às correspondências é elevado, o método DV apresenta um crescimento muito acentuado. Em termos relativos, o método DV apresenta maior variação em relação ao seu melhor valor. O método DV é, portanto, mais sensível do que o método DCCE ao ruído adicionado às correspondências, o que já era esperado, tendo em conta as equações de propagação da incerteza.

$\phi$	<b>Efeito do número de pontos de interesse</b>	Seq. sintética A DISC.
--------	--	---------------------------

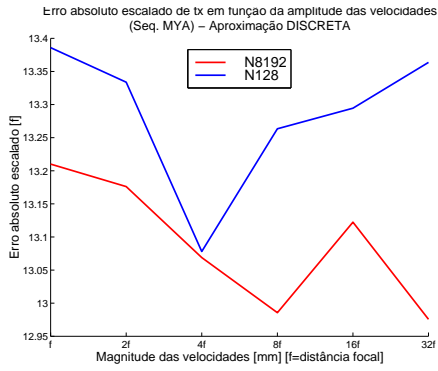
(a)  $t_x$ (b)  $t_y$ (c)  $t_z$ (d)  $\Omega_x$ (e)  $\Omega_y$ (f)  $\Omega_z$

Analisando este painel pode verifica-se que para o parâmetro  $t_X$ , o erro absoluto (que está escalado pela distância focal) é muito elevado (cerca de 13 distâncias focais), tanto para resolução do mapa de disparidade infinita como para resoluções baixas. Apresenta uma ligeira tendência de descida com o aumento do número de pontos de interesse. O parâmetro  $t_Y$ , tem um comportamento semelhante, isto é, uma ligeira descida do erro absoluto escalado mas, apresenta valores de erro muito mais baixos (cerca de 10% da distância focal).

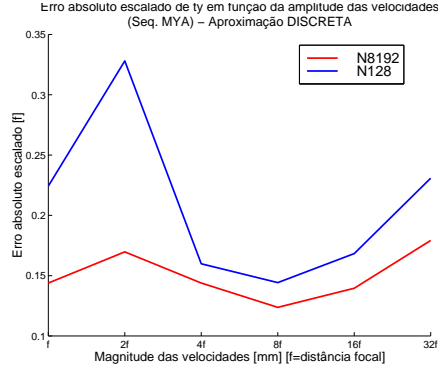
Quanto ao parâmetro  $t_Z$ , nota-se uma ligeira descida do erro para resolução do mapa de disparidade infinita e um valor incoerente para resoluções baixas. O erro ronda os 10-12%.

Para as velocidades rotacionais, não se nota nenhuma tendência de subida ou descida muito pronunciada mas, o valor médio dos erros absolutos de estimação é muito reduzido (da ordem da décima ou centésimas de grau).

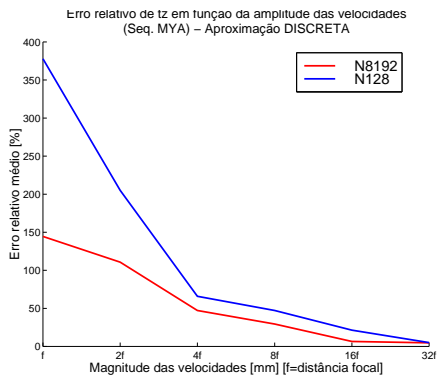
$\phi$	<b>Efeito da magnitude das velocidades</b>	Seq. sintética A DISC.
--------	--	---------------------------



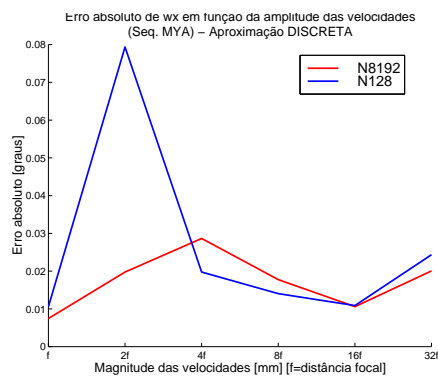
(a)  $t_x$



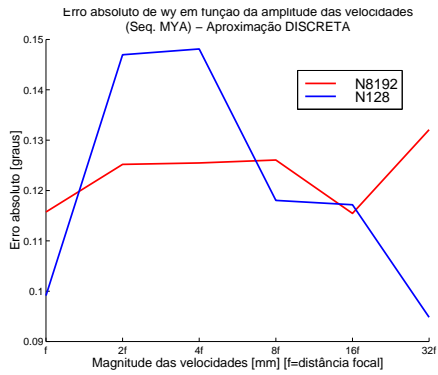
(b)  $t_y$



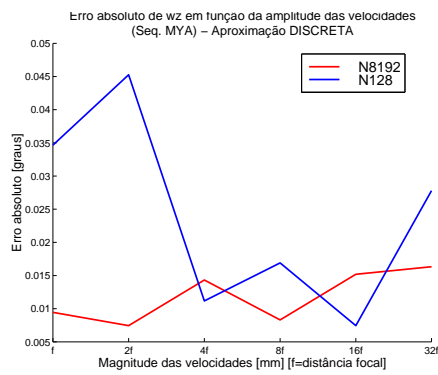
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$

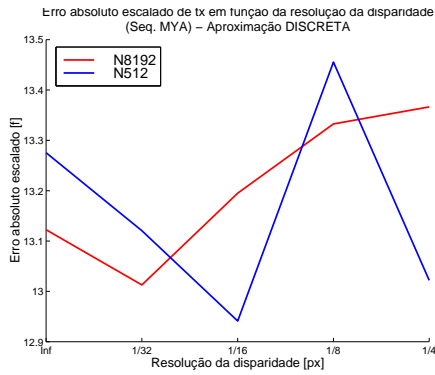


(f)  $\Omega_z$

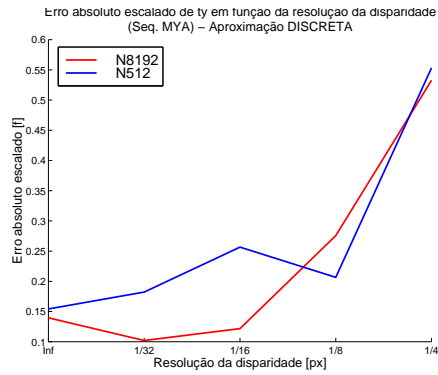
De um modo geral, pela análise deste conjunto de gráficos, podemos verificar que exceptuando para o parâmetro  $t_Z$ , não podemos observar nenhum comportamento marcadamente de subida ou descida do erro absoluto com o aumento das amplitudes das velocidades. O valor do erro de estimação para esses parâmetros é reduzido, exceptuando para o parâmetro  $t_X$ .

Quanto ao parâmetro  $t_Z$ , isto é, a velocidade de translação segundo o eixo  $Z$ , notamos um acentuado decréscimo do erro de estimação com o aumento das velocidades, neste caso de translação. Para 8192 pontos, só para deslocamentos superiores a 4 distâncias focais por imagem se obtêm estimações com menos de 50% de erro.

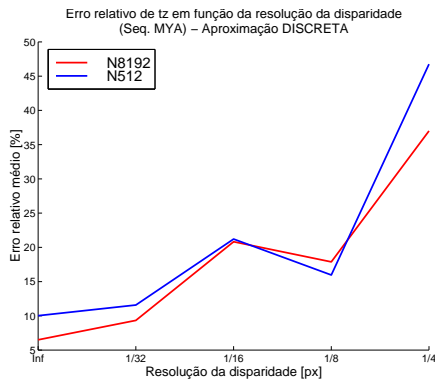
$\phi$	<b>Efeito da resolução da disparidade</b>	Seq. sintética A DISC.
--------	---	---------------------------



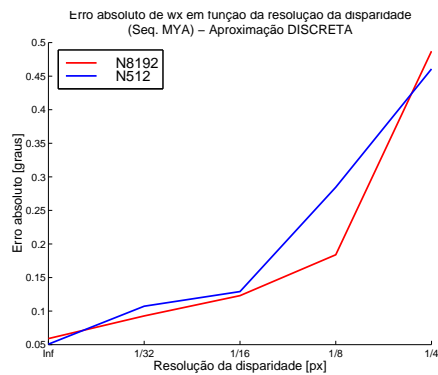
(a)  $t_X$



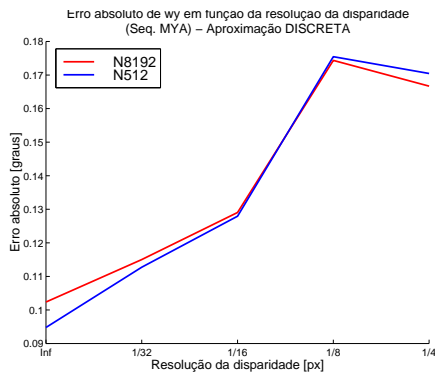
(b)  $t_Y$



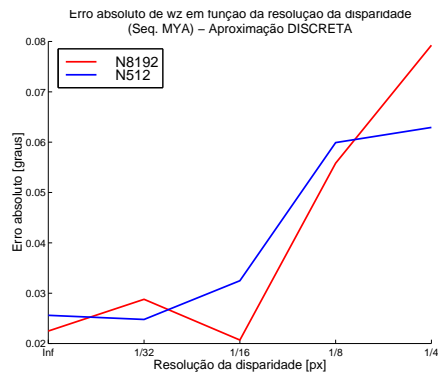
(c)  $t_Z$



(d)  $\Omega_X$



(e)  $\Omega_Y$

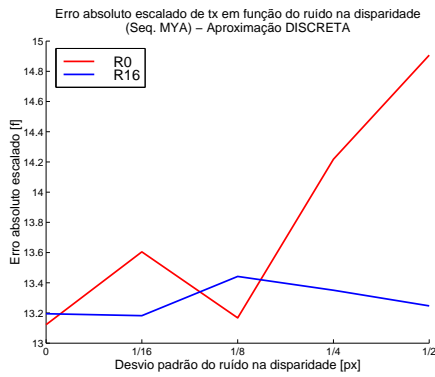


(f)  $\Omega_Z$

A resolução da disparidade tem um efeito visível e pronunciado na qualidade da estimação dos parâmetros do movimento. Para todos os parâmetros o erro relativo (de  $t_Z$ ) e absoluto (dos restantes) apresenta um forte crescimento com a diminuição da resolução da disparidade. Verifica-se que o aumento do número de pontos de interesse usados não melhora substancialmente os resultados. Essa melhoria, devida ao cancelamento do erro de quantização em alguns pontos, só se verifica em pequena escala.

Para resoluções de  $1/4$  de píxel, o erro relativo de  $t_Z$  atinge os 40-45%.

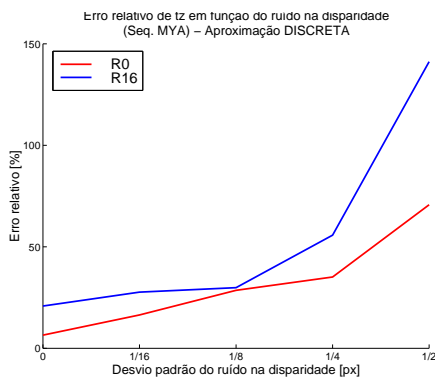
$\phi$	<p><b>Efeito do ruído aleatório da disparidade</b></p>	<p>Seq. sintética A DISC.</p>
--------	--	-----------------------------------



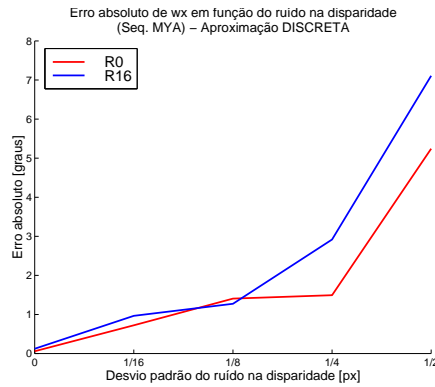
(a)  $t_x$



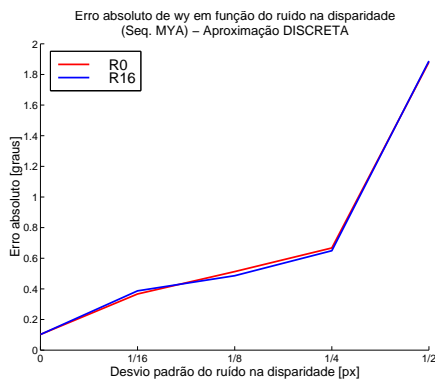
(b)  $t_y$



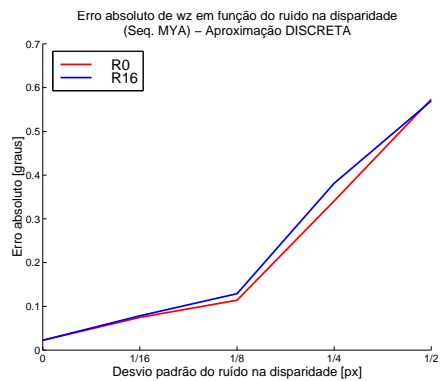
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$

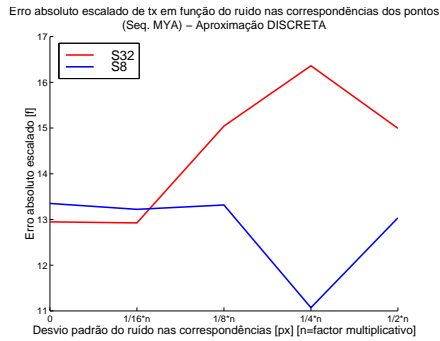


(f)  $\Omega_z$

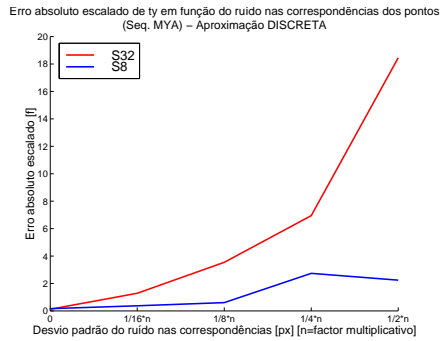


O ruído aleatório adicionado ao mapa de disparidades tem um efeito muito negativo na qualidade da estimação dos parâmetros do movimento. Para todos os parâmetros o erro relativo (de  $t_Z$ ) e absoluto (dos restantes) apresenta um forte crescimento com o aumento do ruído aleatório. Se a disparidade for também arredondada (resoluções baixas), nota-se uma degradação ainda superior dos valores do erro.

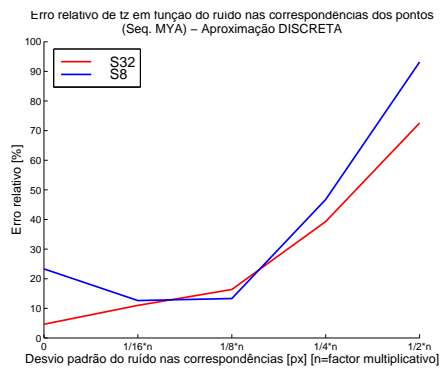
$\phi$	<b>Efeito do ruído aleatório nas correspondências dos pontos</b>	Seq. sintética A DISC.
--------	--	---------------------------



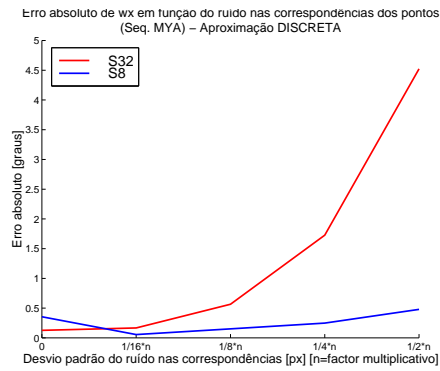
(a)  $t_x$



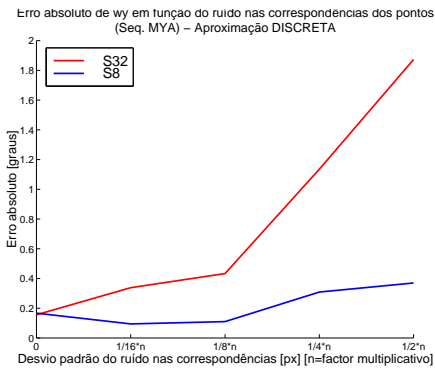
(b)  $t_y$



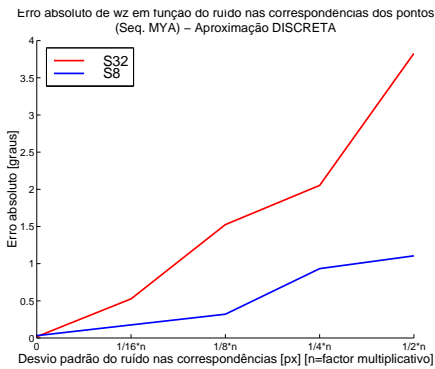
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$



(f)  $\Omega_z$

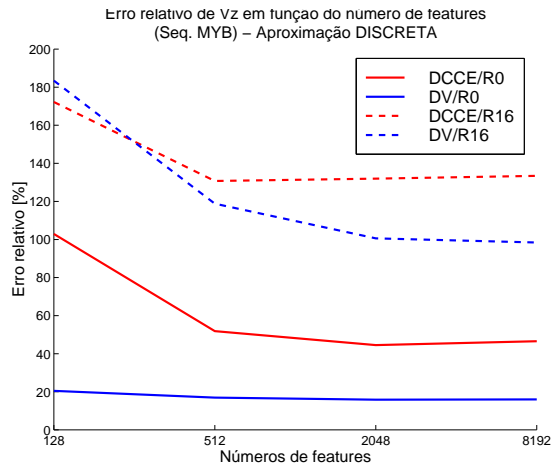
Pode verificar-se que os parâmetros  $t_X$  e  $t_Y$ , apesar de apresentarem valores de erro absoluto escalado díspares, apresentam tendência de subida com o aumento do ruído aleatório adicionado às correspondências de pontos.

O parâmetro  $t_Z$ , apresenta valores de erro inferiores para valores de ruído aleatório maiores. Este comportamento pode dever-se ao facto de um pequeno ruído aumentar a estabilidade numérica do método.

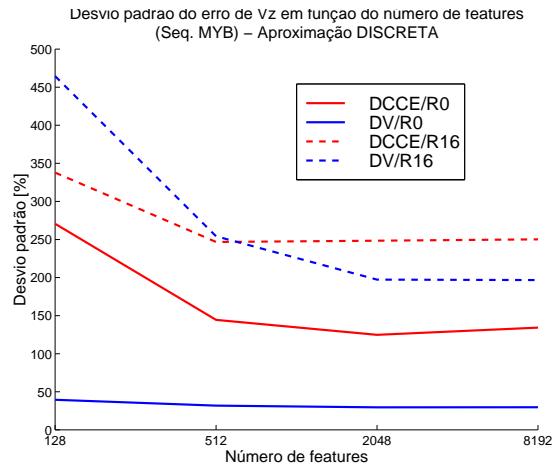
Quanto aos parâmetros de rotação, verifica-se que  $\Omega_X$  e  $\Omega_Y$  também têm comportamento de descida do erro absoluto e que  $\Omega_Z$  apresenta subida pronunciada com o aumento do ruído aleatório.

O erro relativo do parâmetro  $t_Z$  é da ordem das dezenas de %. O erro absoluto dos parâmetros  $t_X$  e  $t_Y$  é elevado, da ordem das dezenas de distâncias focais e dos parâmetros de rotação aproximadamente 1-2 graus.

$V_Z$	<b>Efeito do número de pontos de interesse</b>	Seq. sintética B DISC.
-------	--	---------------------------



(a) ERM

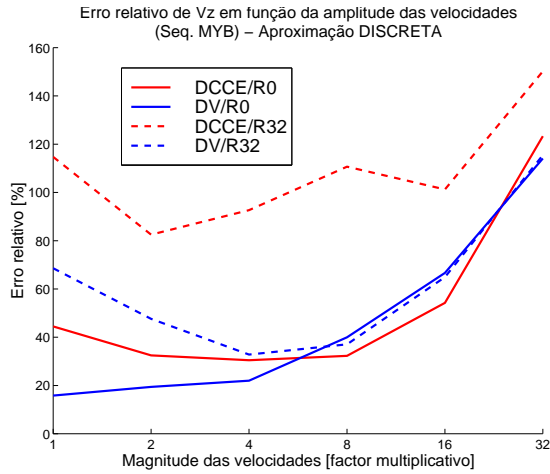


(b) DPM

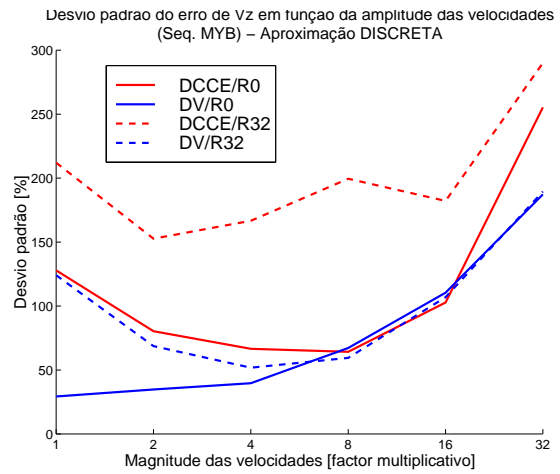
Verifica-se, ao analisar este painel, que há um decréscimo do erro de  $V_Z$  com o aumento do número de pontos de interesse. A partir de 512 pontos notamos, contudo, uma estagnação do erro. Estas afirmações são igualmente válidas para o desvio padrão.

O método DV apresenta melhores resultados do que o método DCCE, na generalidade das situações.

$V_Z$	<b>Efeito da magnitude das velocidades</b>	Seq. sintética B DISC.
-------	--	---------------------------



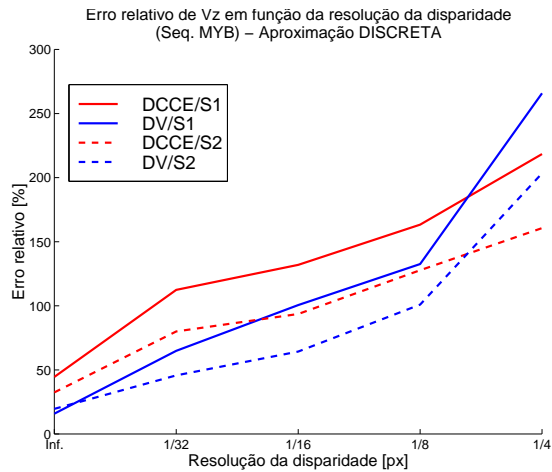
(a) ERM



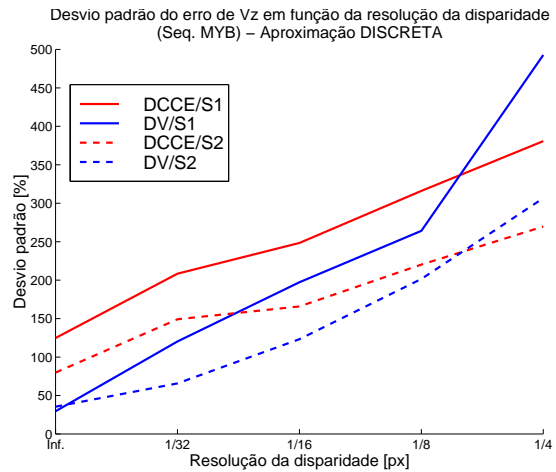
(b) DPM

O aumento da velocidade de rotação nesta sequência, provoca, de um modo geral o aumento do erro de estimação de  $V_Z$ , tanto para o método DCCE como para o método DV. Verifica-se, no entanto, que o mínimo do erro de  $V_Z$  ocorre para STEP=2, isto é, rotações de  $0.5^\circ$  por frame. Quando as velocidades de rotação ultrapassam este valor, o erro cresce rapidamente. De um modo geral, o método DV apresenta melhores resultados do que o método DCCE.

$V_Z$	<b>Efeito da resolução da disparidade</b>	Seq. sintética B DISC.
-------	---	---------------------------



(a) ERM

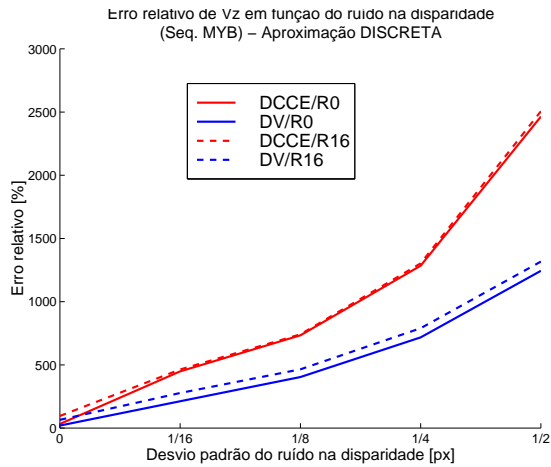


(b) DPM

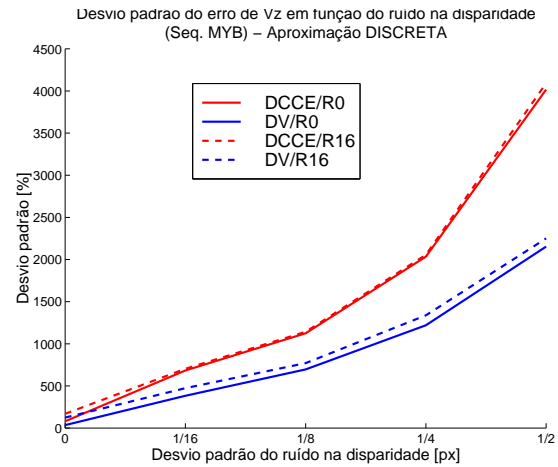
Com a redução da resolução da disparidade, nota-se um crescimento do erro de  $V_Z$ , na generalidade dos casos, para ambos os métodos. O erro atinge rapidamente valores muito elevados do erro (superiores a 100%).

O método DV produz melhores estimativas de  $V_Z$ , também na generalidade dos casos.

$V_Z$	<b>Efeito do ruído aleatório da disparidade</b>	Seq. sintética B DISC.
-------	---	---------------------------



(a) ERM

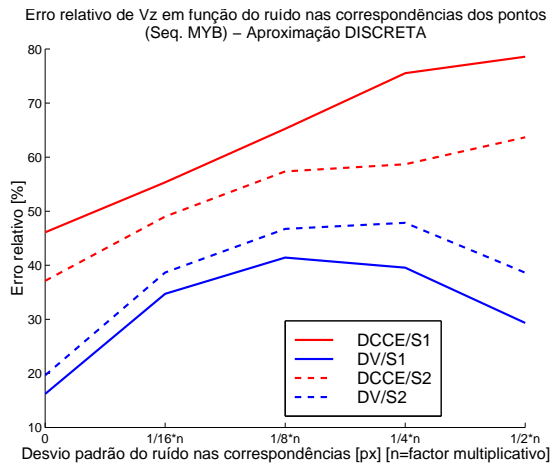


(b) DPM

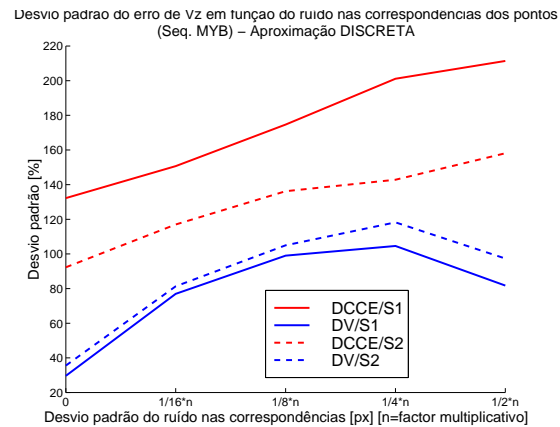
O crescimento do erro e do desvio padrão do erro com o crescimento do ruído aleatório adicionado ao mapa de disparidade é evidente e acentuado. Ambos os métodos apresentam forte sensibilidade a este parâmetro.

O método DV produz, contudo, melhores estimativas do que o método DCCE.

$V_Z$	<b>Efeito do ruído aleatório nas correspondências de pontos</b>	Seq. sintética B DISC.
-------	---	---------------------------



(a) ERM

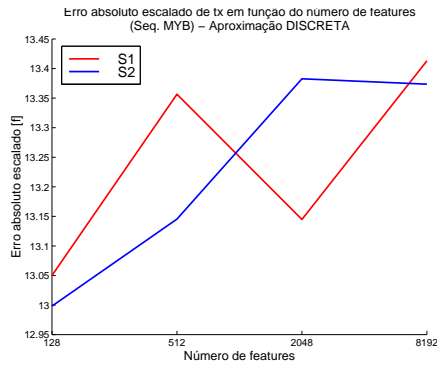


(b) DPM

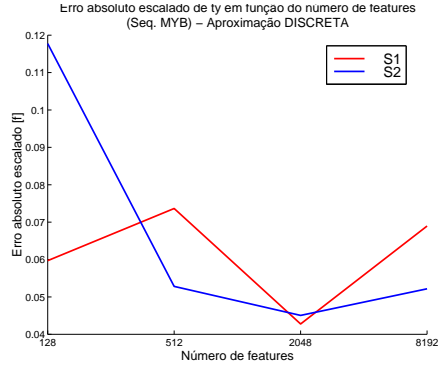
Analisando os gráficos deste painel, pode verificar-se que há um aumento generalizado do erro relativo médio de  $V_Z$  e do seu desvio padrão quando o desvio padrão do ruído aleatório adicionado às coordenadas das correspondências entre pontos aumenta. Há uma desaceleração do crescimento do erro e, para valores mais elevados do ruído existe mesmo um decréscimo do valor do erro e do desvio padrão. O método DCCE apresenta valores superiores aos apresentados pelo método DV, mas a variação é semelhante nos dois métodos. É de notar que, para maiores factores multiplicativos das velocidades, o erro aumenta, como foi mostrado do painel A.2.



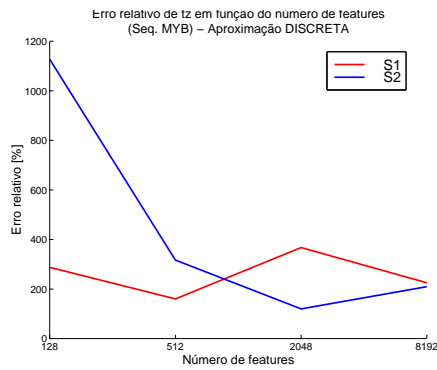
$\phi$	<b>Efeito do número de pontos de interesse</b>	Seq. sintética B DISC.
--------	--	---------------------------



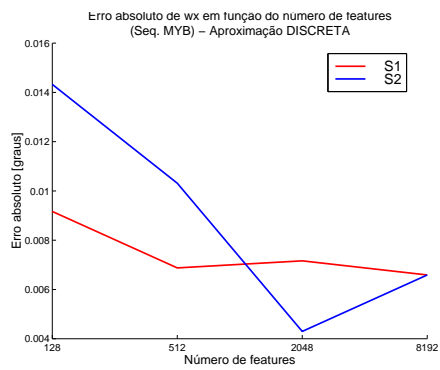
(a)  $t_X$



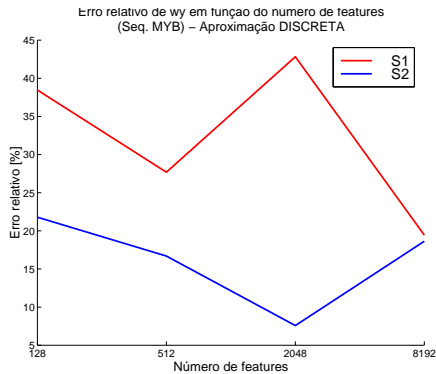
(b)  $t_Y$



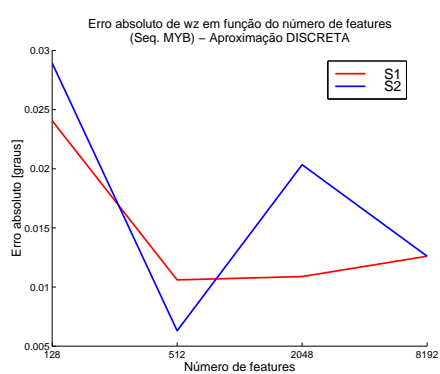
(c)  $t_Z$



(d)  $\Omega_X$



(e)  $\Omega_Y$



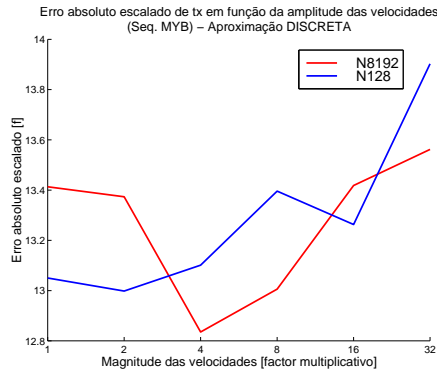
(f)  $\Omega_Z$

Com o aumento do número de pontos de interesse usados no algoritmo de estimação dos parâmetros do movimento, todos os parâmetros excepto  $t_X$  apresentam uma ligeira descida do valor do erro (relativo ou absoluto). O parâmetro  $t_X$  apresenta um aumento do erro.

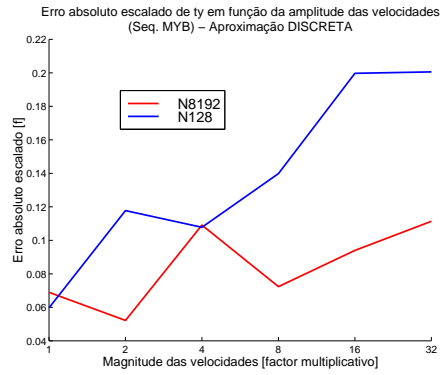
Relativamente aos valores do erro propriamente ditos, temos o mesmo cenário de outras estimações. O parâmetro  $t_X$  apresenta valores muito elevados (cerca de 13 distâncias focais), o parâmetro  $t_Y$  apresenta um valor reduzido (cerca de 10% da distância focal) e os parâmetros de rotação  $\Omega_X$  e  $\Omega_Z$  apresentam valores muito reduzidos de erro absoluto (décima de grau).

Quanto a  $t_Z$ , o seu erro relativo é elevado (da ordem das centenas de percentagem) e o erro de  $\Omega_Y$  ronda os 20-30%.

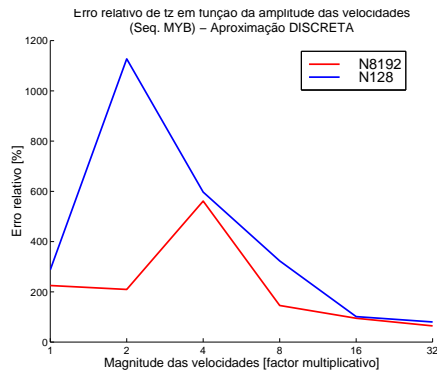
$\phi$	<b>Efeito da magnitude das velocidades</b>	Seq. sintética B DISC.
--------	--	---------------------------



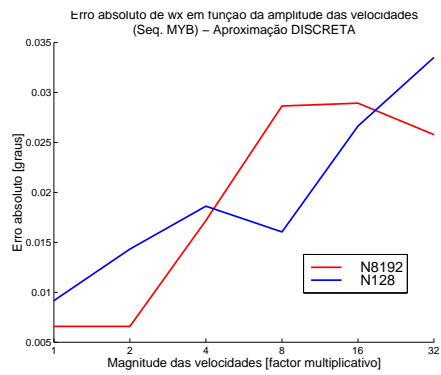
(a)  $t_x$



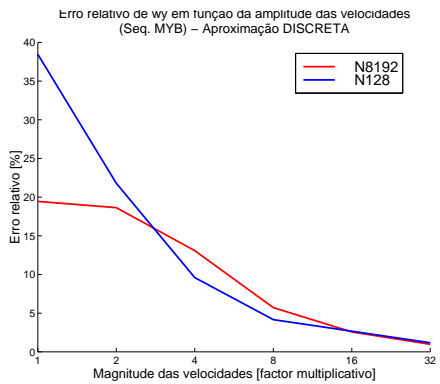
(b)  $t_y$



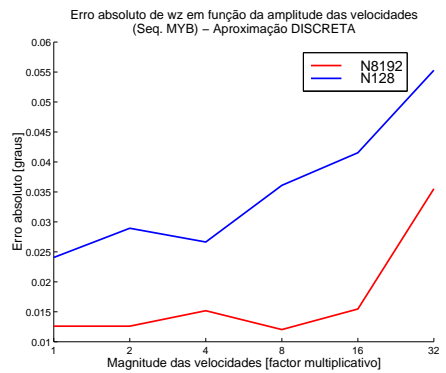
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$

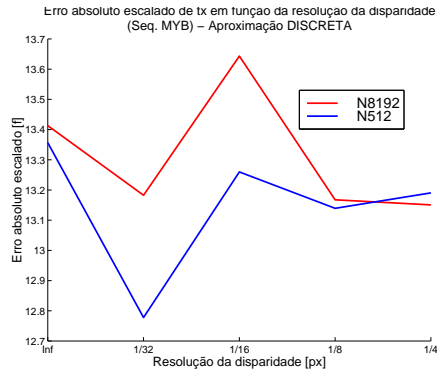


(f)  $\Omega_z$

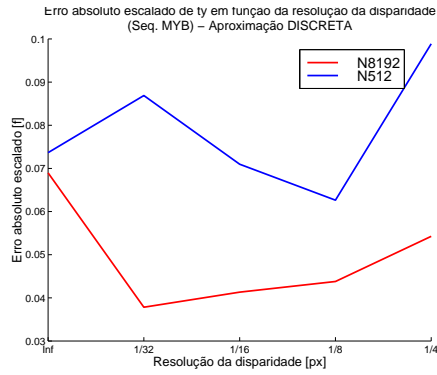
Neste painel, com exceção dos parâmetros que têm um valor diferente de zero e, portanto, para os quais se apresentam erros relativos, temos uma estagnação ou aumento do valor do erro com o aumento das velocidades (nesta sequência, com a velocidade de rotação *pan*). Nestes parâmetros ( $t_X$ ,  $t_Y$ ,  $\Omega_X$  e  $\Omega_Z$ ), a diferença entre 128 pontos e 8192 não é muito acentuada mas, com melhores resultados para a última situação.

Relativamente a  $t_Z$ , com o aumento da velocidade de rotação, o erro relativo deste parâmetro tende a reduzir-se, contudo de forma não monótona. Em relação a  $\Omega_Y$ , há uma evidente descida do valor do erro relativo com o aumento da amplitude da rotação, atingindo valores reduzidos, da ordem dos 2%, para rotações de 8°/imagem.

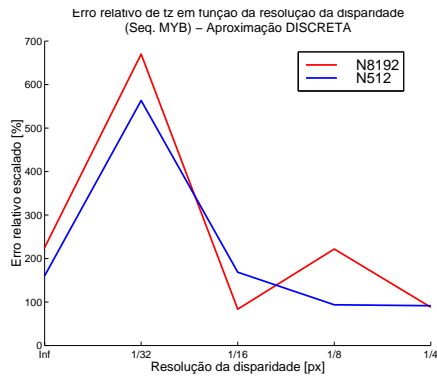
$\phi$	<b>Efeito da resolução da disparidade</b>	Seq. sintética B DISC.
--------	---	---------------------------



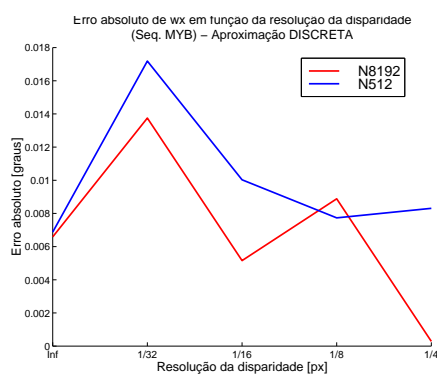
(a)  $t_X$



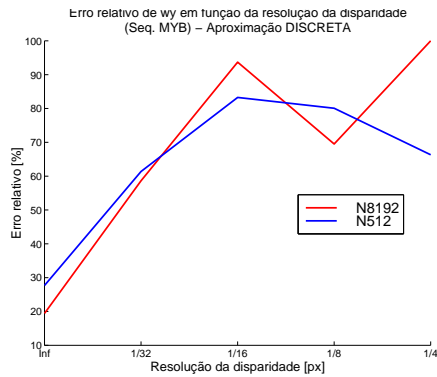
(b)  $t_Y$



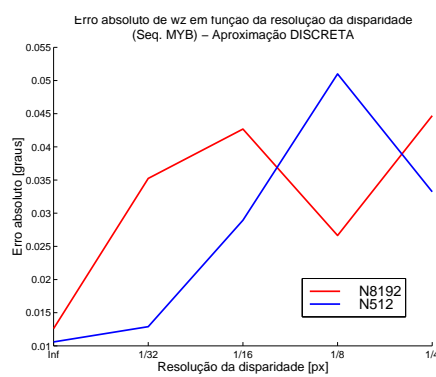
(c)  $t_Z$



(d)  $\Omega_X$



(e)  $\Omega_Y$

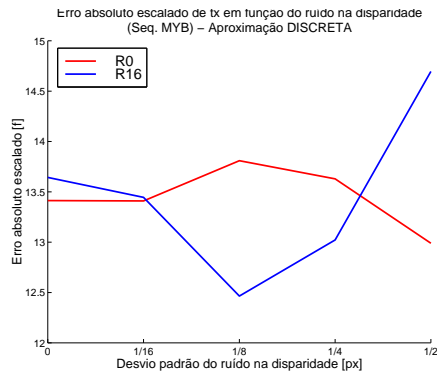


(f)  $\Omega_Z$

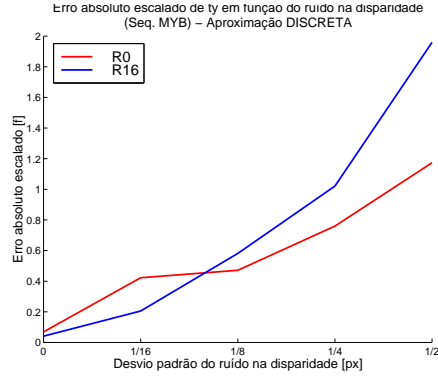
Os resultados neste painel são pouco coerentes entre si, isto é, para os parâmetros  $t_X$  e  $t_Z$ , os valores do erro não apresentam variações evidentes de subida ou descida; para os parâmetros  $t_Y$ ,  $\Omega_Y$  e  $\Omega_Z$ , o valor do erro cresce com a diminuição da resolução da disparidade e para o parâmetro  $\Omega_X$  o valor do erro decresce, eventualmente fruto de maior estabilidade numérica.

No entanto, para o parâmetro  $\Omega_Y$ , responsável pelo movimento de rotação principal, o erro cresce com a diminuição da resolução. Não se verificam diferenças acentuadas entre usar 512 ou 8192 pontos.

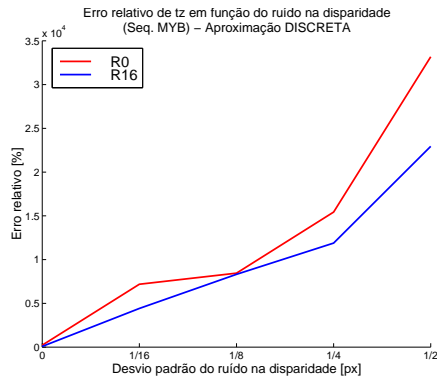
$\phi$	<b>Efeito do ruído aleatório da disparidade</b>	Seq. sintética B DISC.
--------	---	---------------------------



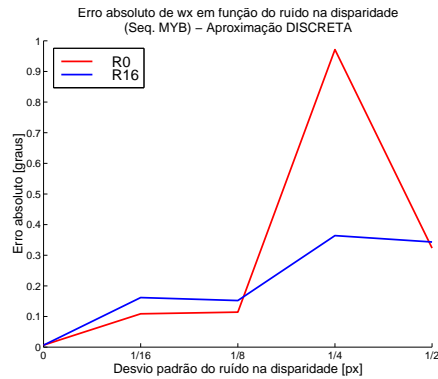
(a)  $t_x$



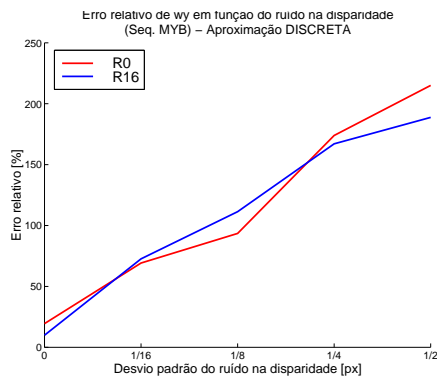
(b)  $t_y$



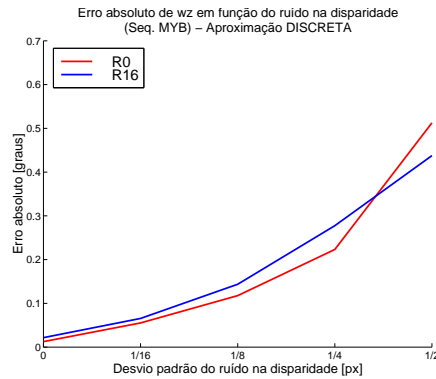
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$



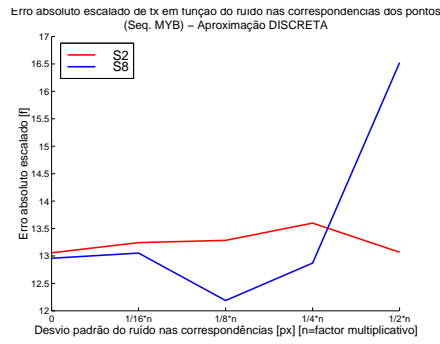
(f)  $\Omega_z$

Todos os parâmetros do movimento apresentam sensibilidade positiva (erro crescente) com o ruído aleatório adicionado ao mapa de disparidades. A variação é mais acentuada nos casos em que a resolução da própria disparidade é baixa.

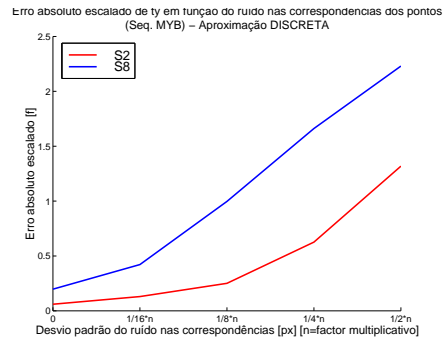
Os parâmetros  $t_Z$  e  $\Omega_Y$  apresentam valores genericamente muito elevados do erro relativo.



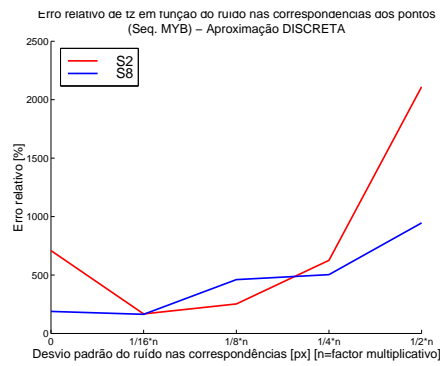
$\phi$	<b>Efeito do ruído aleatório nas correspondências dos pontos</b>	Seq. sintética B DISC.
--------	--	---------------------------



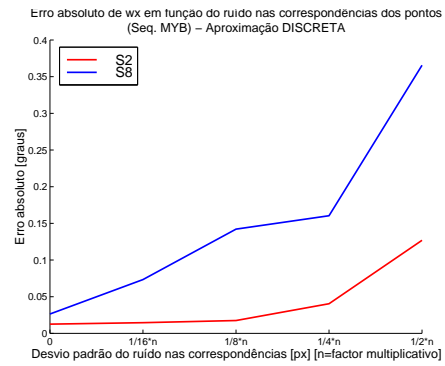
(a)  $t_x$



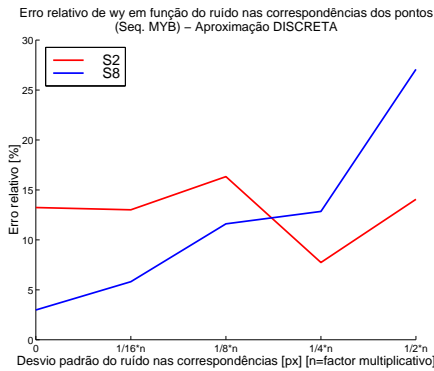
(b)  $t_y$



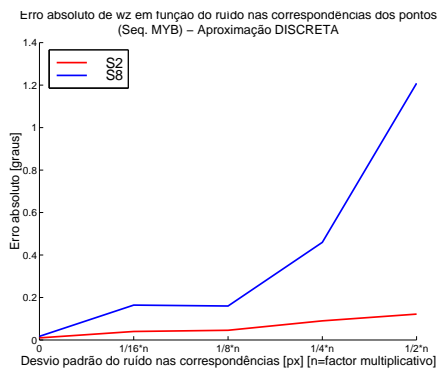
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$



(f)  $\Omega_z$

A variação do erro de estimação dos parâmetros de movimento para valores crescentes do desvio padrão do ruído aleatório adicionado às correspondências entre pontos apresenta um crescimento generalizado do erro absoluto de todos os parâmetros. Notamos que o crescimento do erro é mais acentuado para velocidades maiores.

Para o parâmetros  $\Omega_Y$  o erro situa-se entre os 5 e 25%.

# Apêndice B

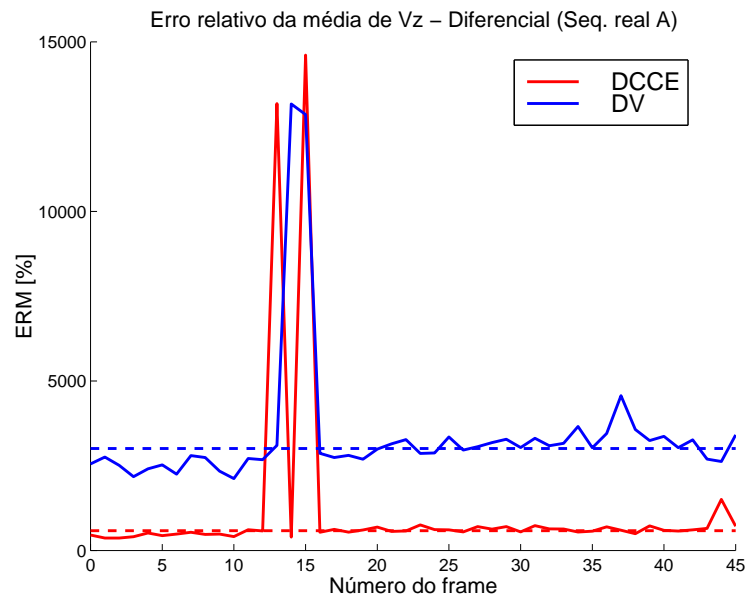
## Sequências Reais

Os parâmetros do movimento e valores verdadeiros de  $V_Z$  das sequências de imagens reais analisadas, e cujos resultados são aqui reportados, discriminam-se na tabela 9.1. São representados, a traço interrompido, os valores da mediana de estimação.

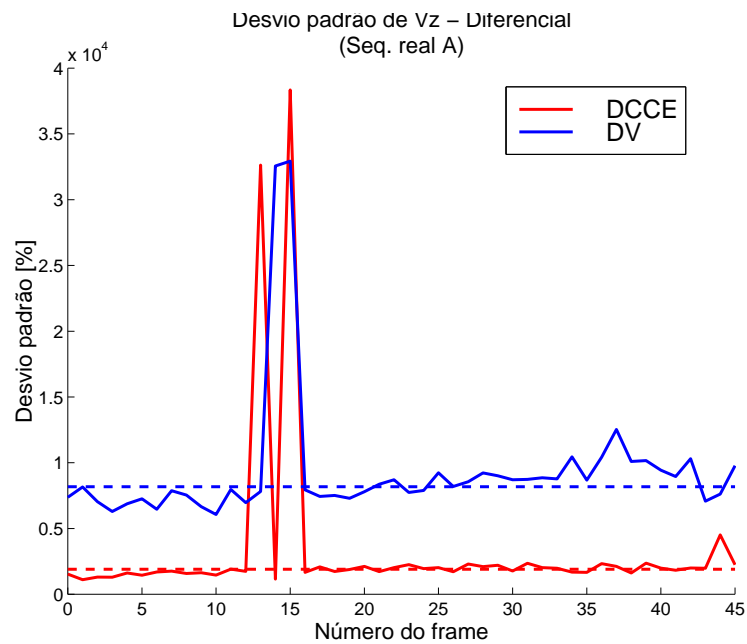
## B.1 Aproximação diferencial - $V_Z$

O resultado obtido para  $V_Z$ , para cada imagem, de cada sequência, é apresentado de seguida, para a aproximação diferencial.

$V_z$	Sequência real A	DIF.
-------	------------------	------

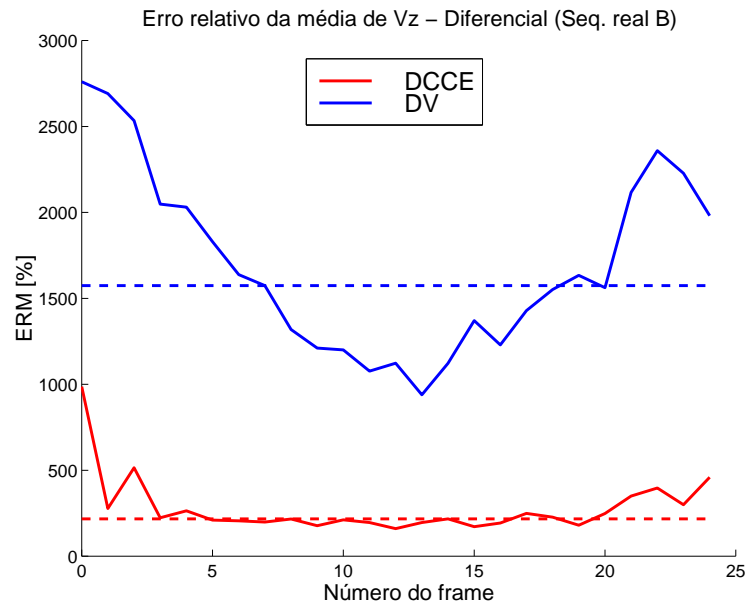


(a) ERM

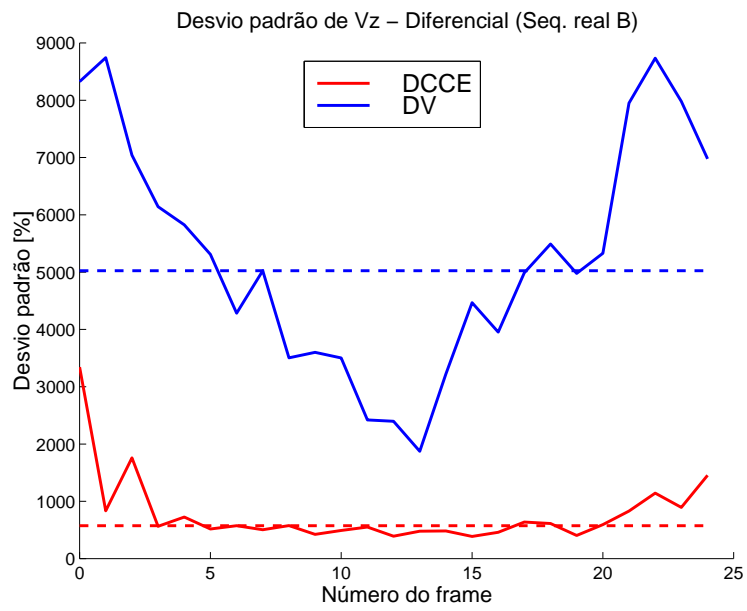


(b) DPM

$V_z$	Sequência real B	DIF.
-------	------------------	------

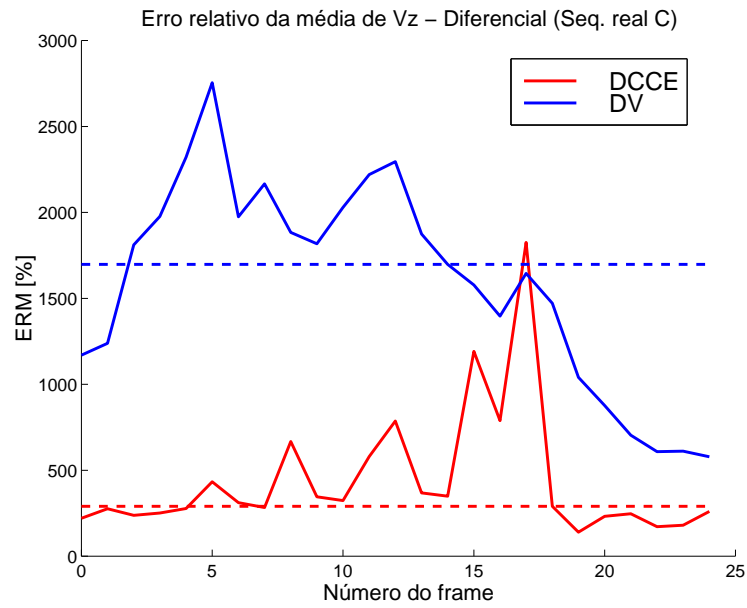


(a) ERM

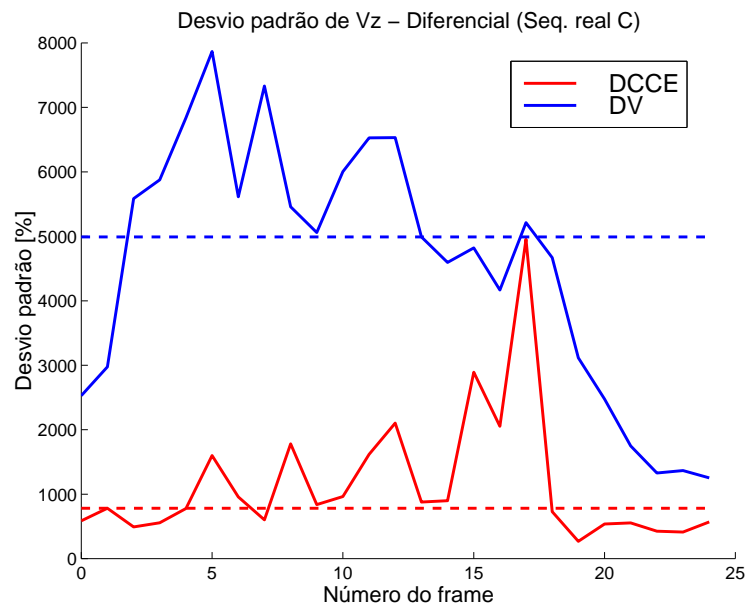


(b) DPM

$V_Z$	Sequência real C	DIF.
-------	------------------	------

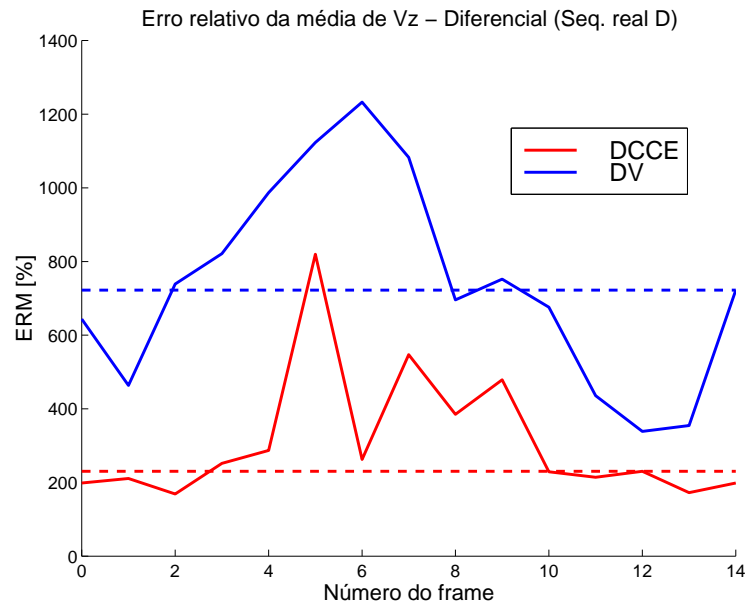


(a) ERM

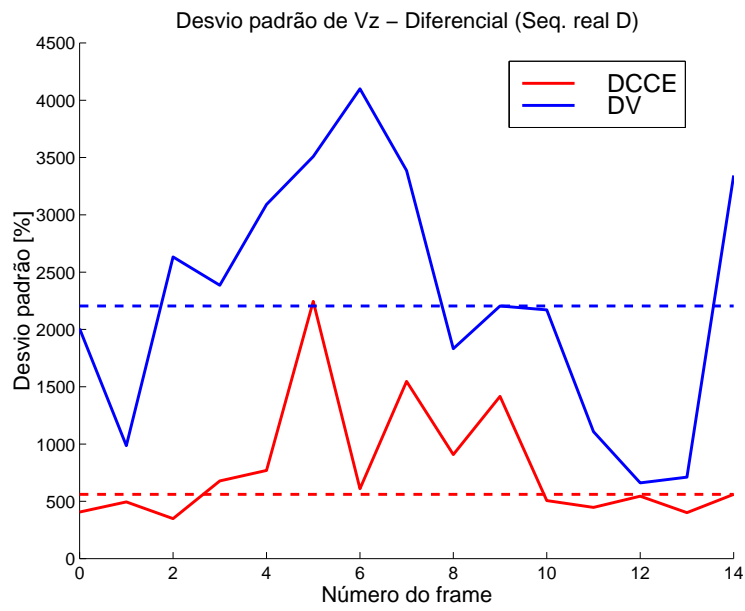


(b) DPM

$V_Z$	Sequência real D	DIF.
-------	------------------	------



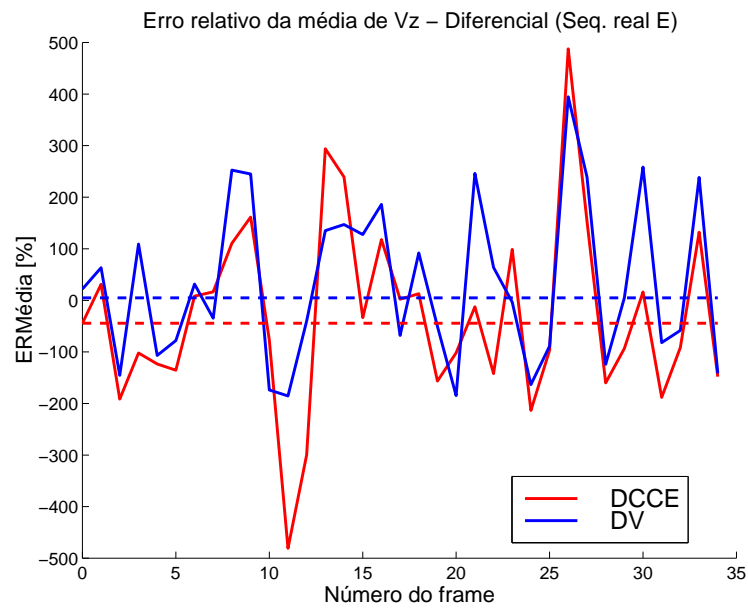
(a) ERM



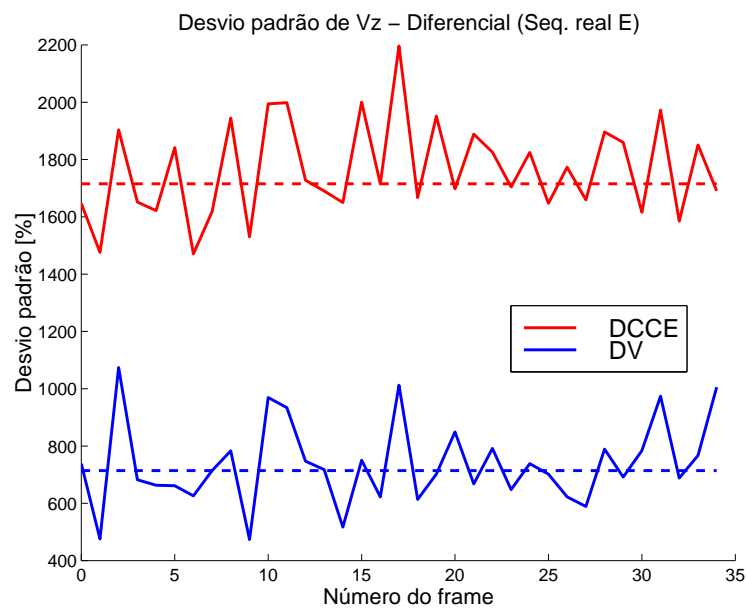
(b) DPM



$V_Z$	Sequência real E	DIF.
-------	------------------	------

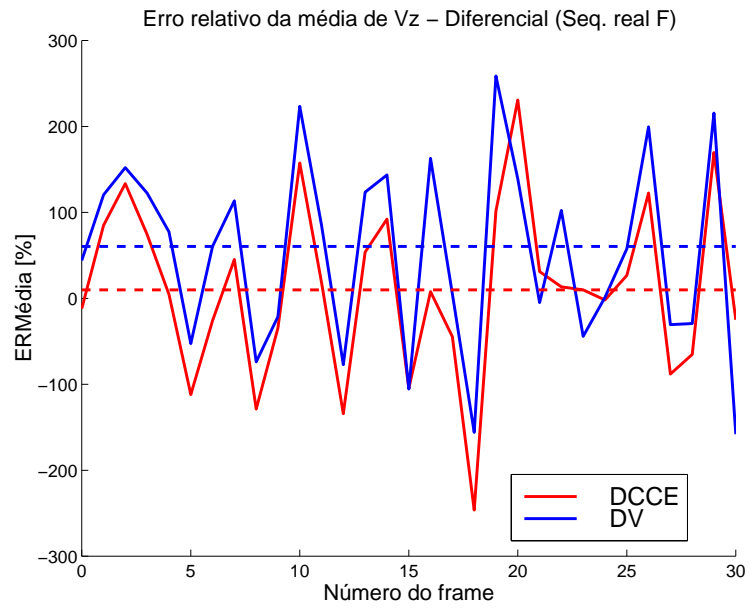


(a) ERMédia

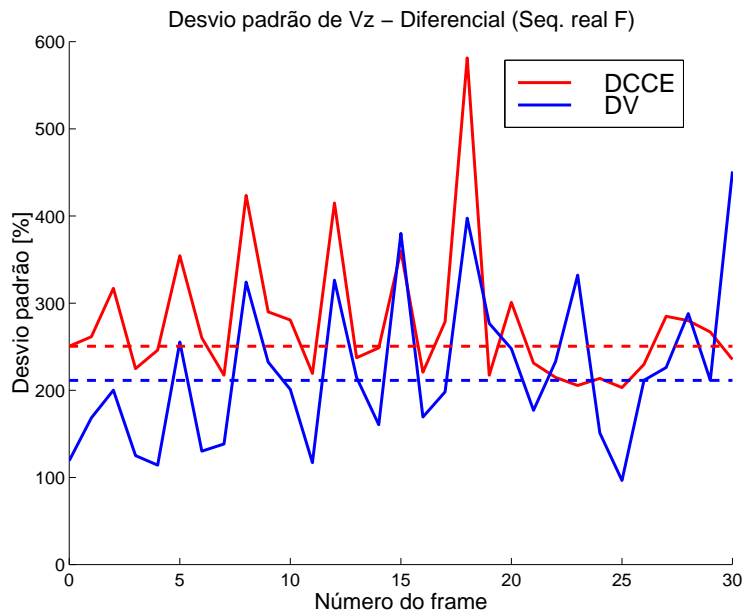


(b) DPM

$V_Z$	Sequência real F	DIF.
-------	------------------	------

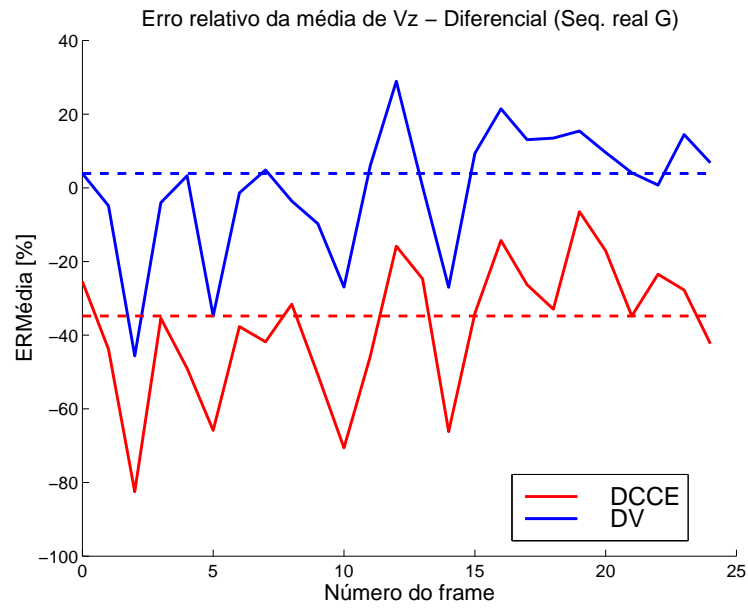


(a) ERMédia

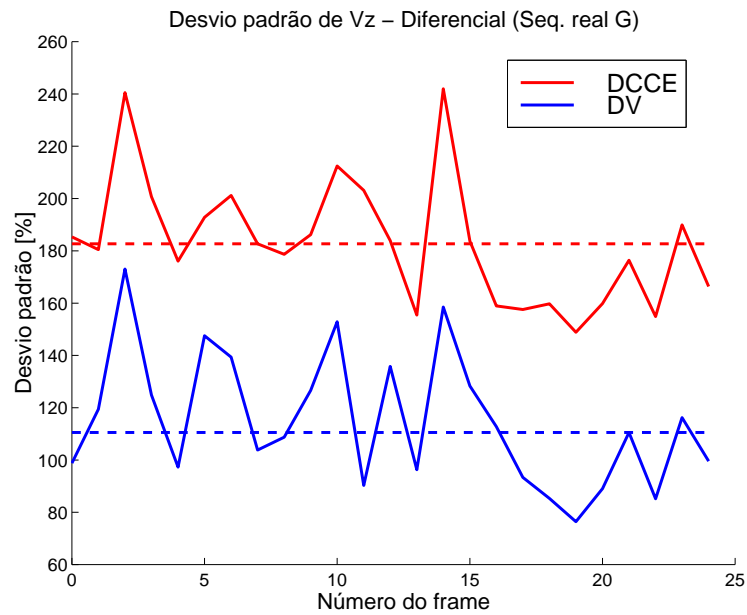


(b) DPM

$V_Z$	Sequência real G	DIF.
-------	------------------	------

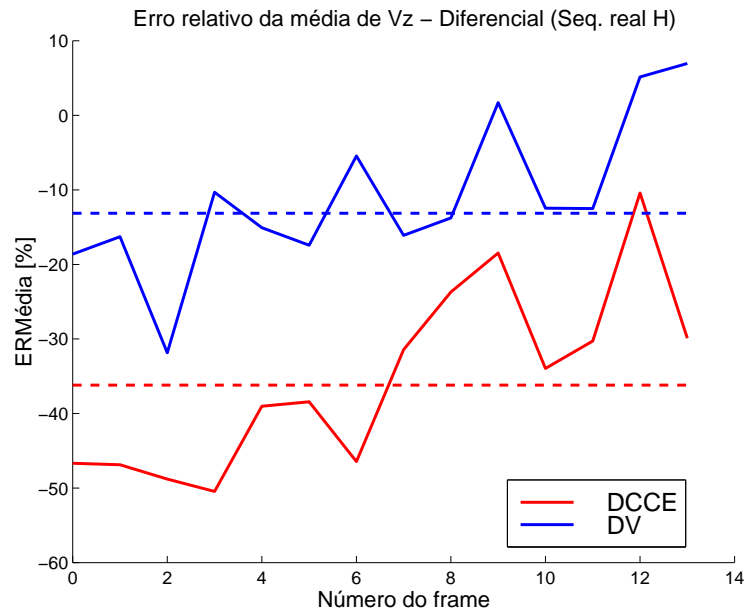


(a) ERMédia

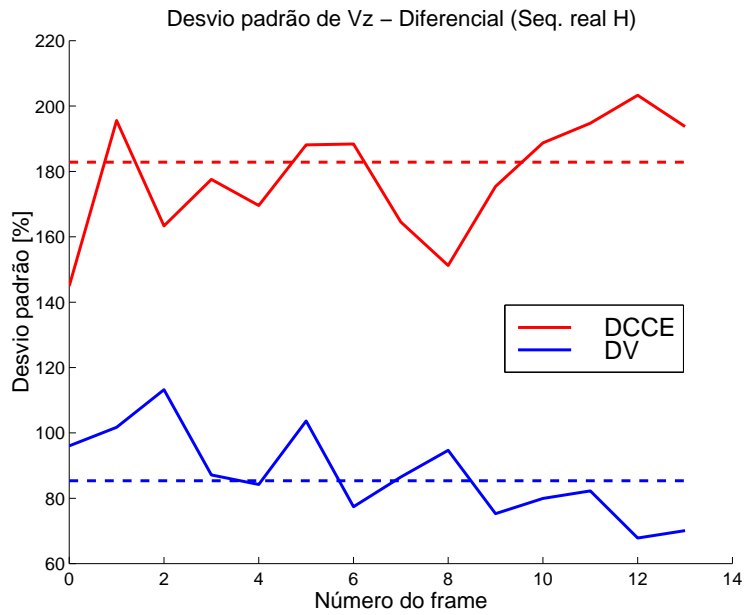


(b) DPM

$V_Z$	Sequência real H	DIF.
-------	------------------	------

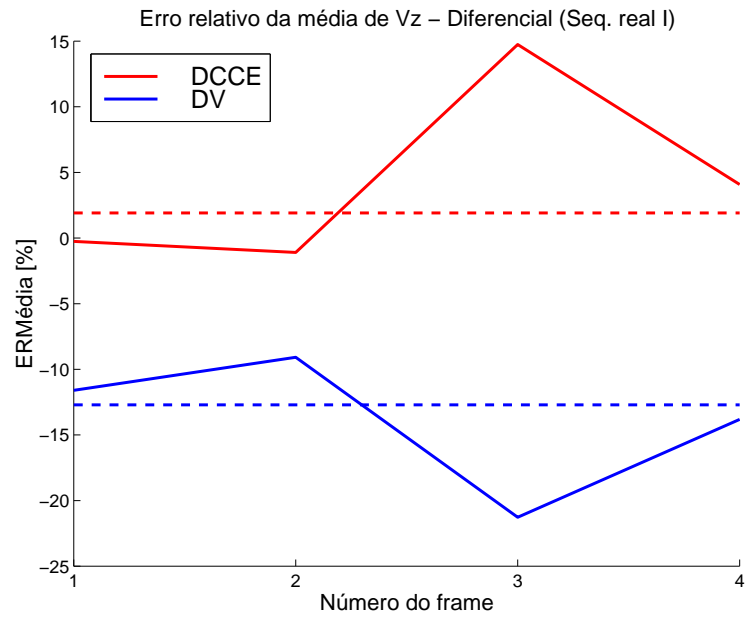


(a) ERMédia

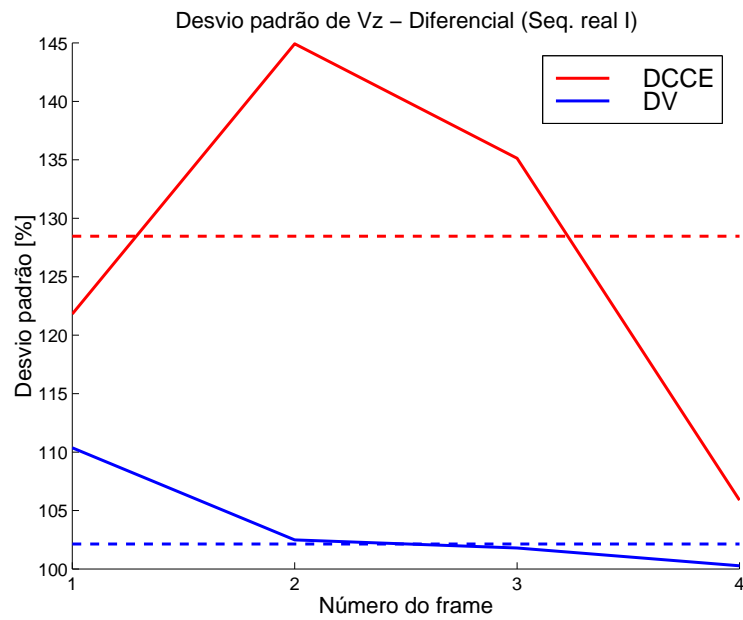


(b) DPM

$V_Z$	Sequência real I	DIF.
-------	------------------	------

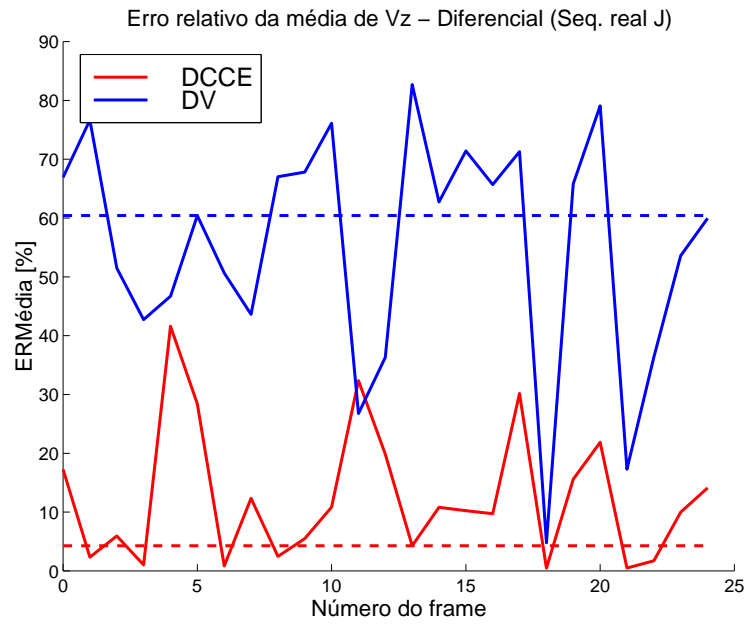


(a) ERMédia

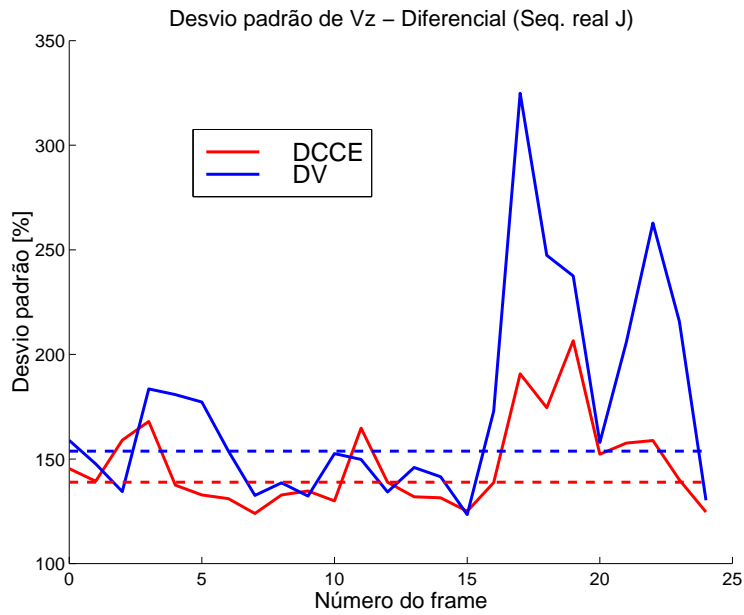


(b) DPM

$V_z$	Sequência real J	DIF.
-------	------------------	------

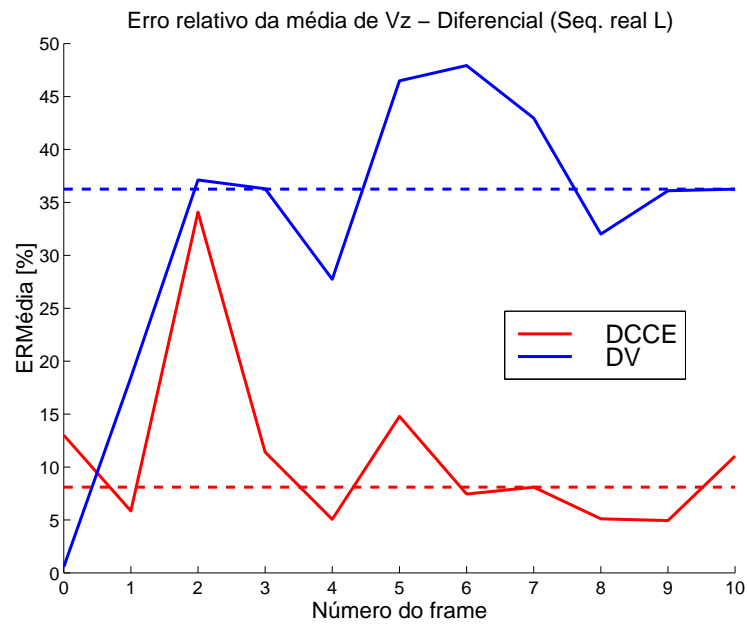


(a) ERMédia

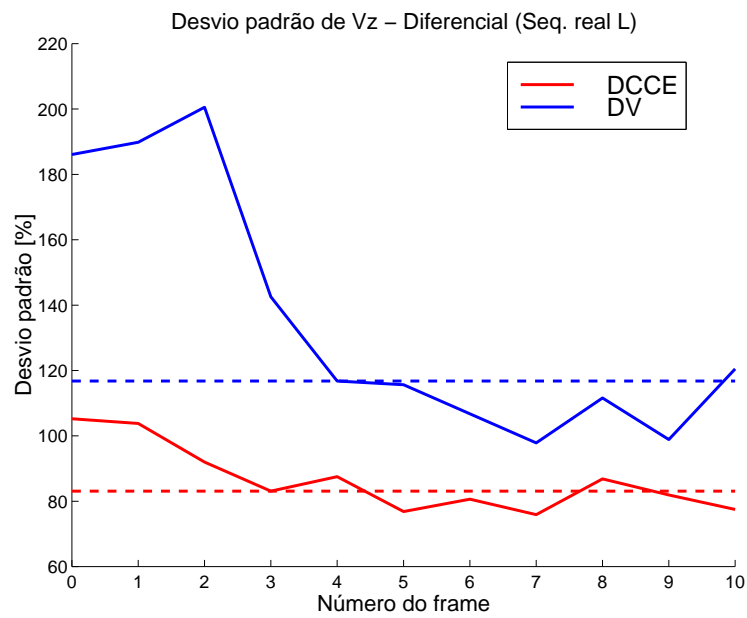


(b) DPM

$V_Z$	Sequência real L	DIF.
-------	------------------	------

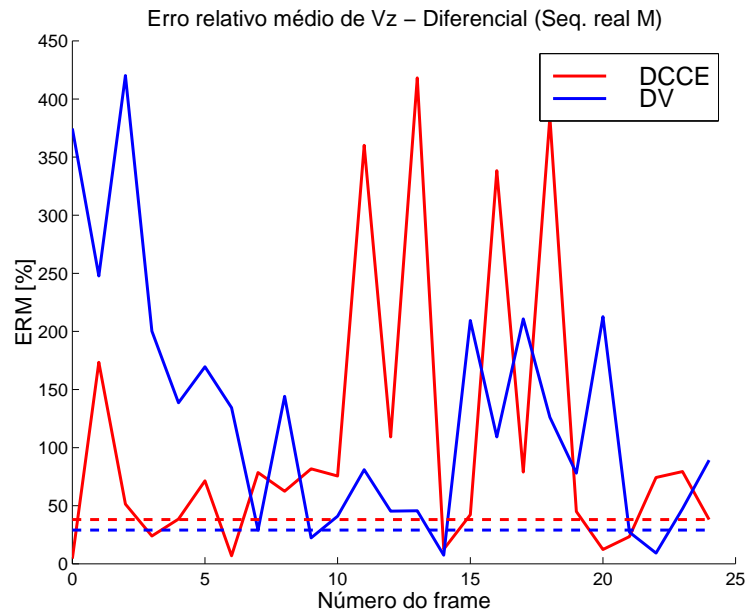


(a) ERMédia

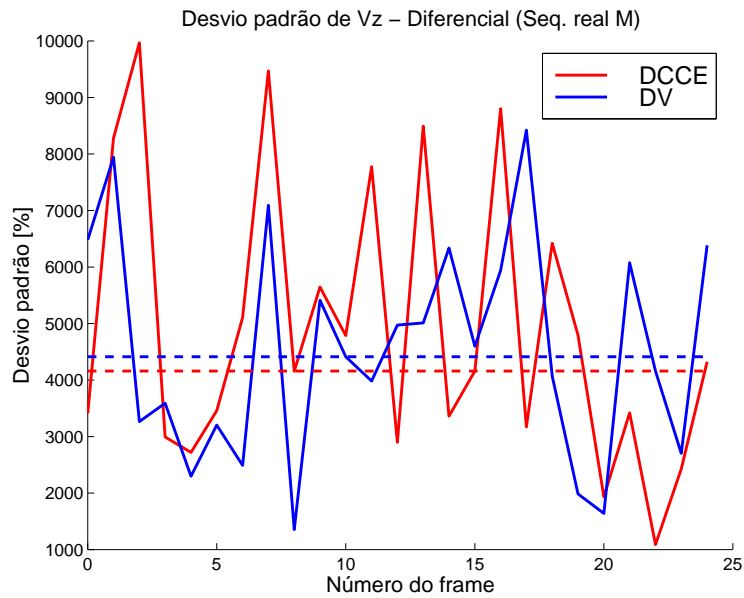


(b) DPM

$V_Z$	Sequência real M	DIF.
-------	------------------	------



(a) ERMédia



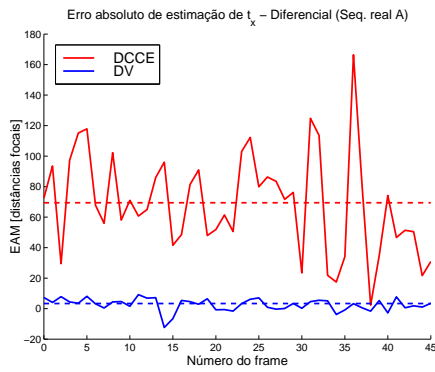
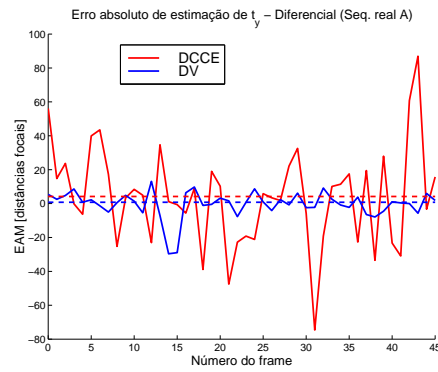
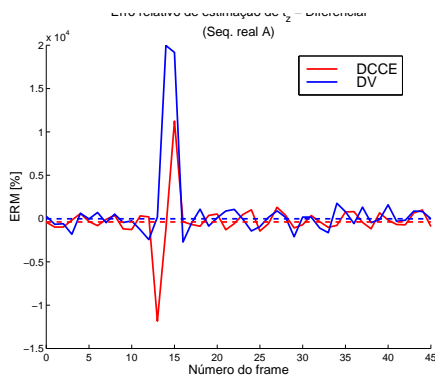
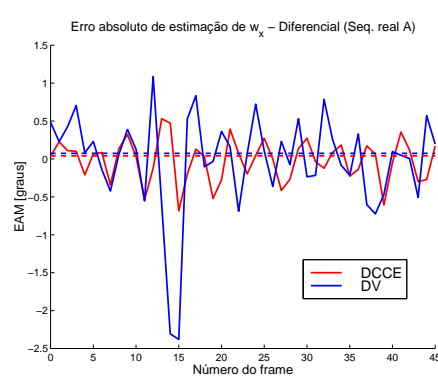
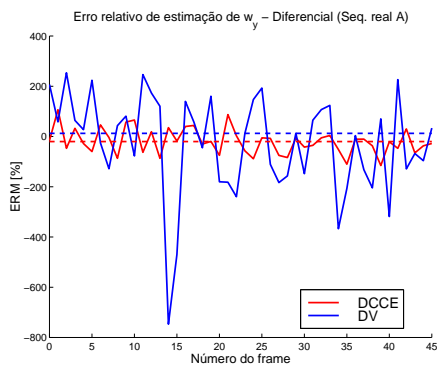
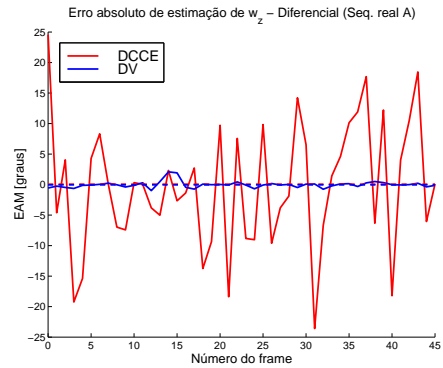
(b) DPM



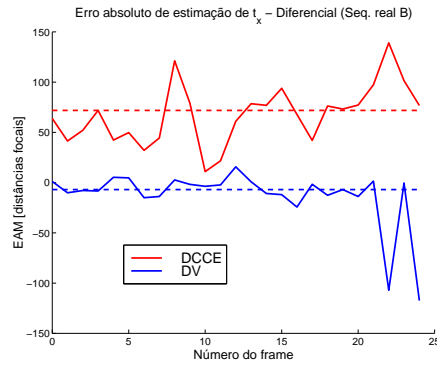
## B.2 Aproximação diferencial - $\vec{\phi}$

O resultado obtido para  $\vec{\phi}$ , para cada imagem, de cada sequência, é apresentado de seguida, para a aproximação diferencial.

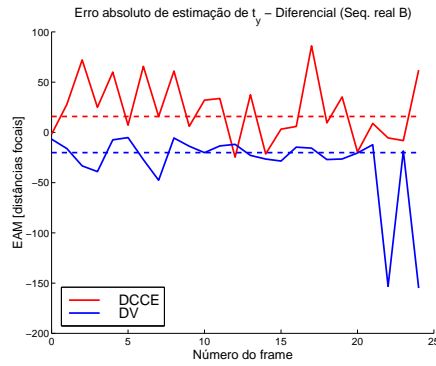
$\phi$	<b>Sequência real A</b>	DIF.
--------	-------------------------	------

(a)  $t_x$ (b)  $t_y$ (c)  $t_z$ (d)  $\Omega_x$ (e)  $\Omega_y$ (f)  $\Omega_z$

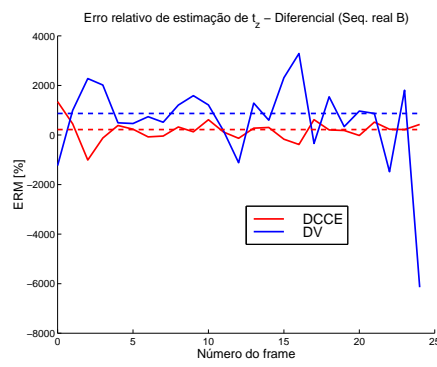
$\vec{\phi}$	Sequência real B	DIF.
--------------	------------------	------



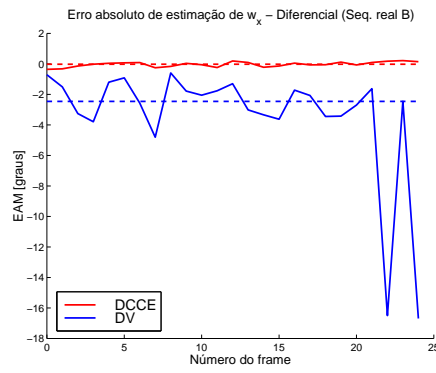
(a)  $t_x$



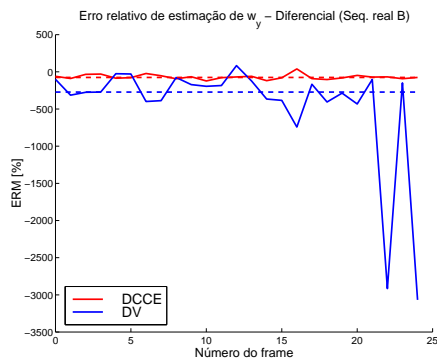
(b)  $t_y$



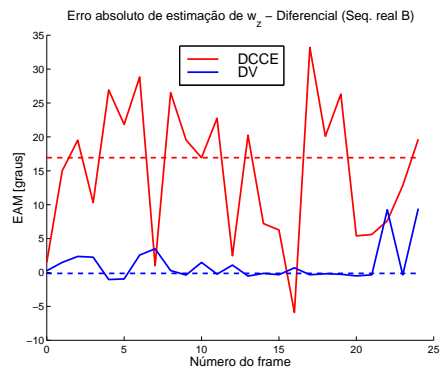
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$

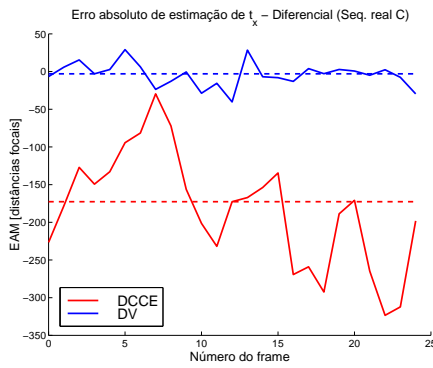
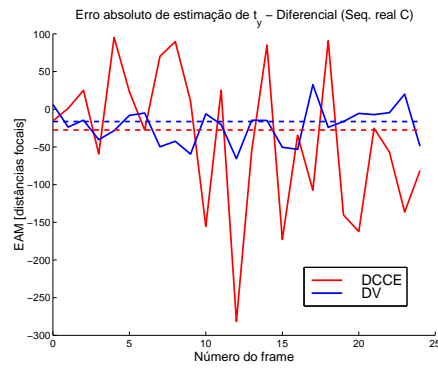
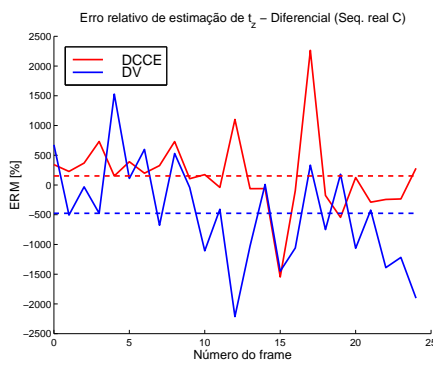
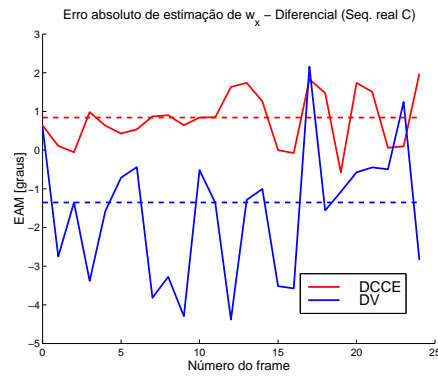
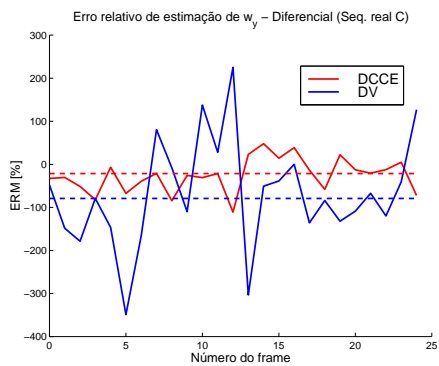
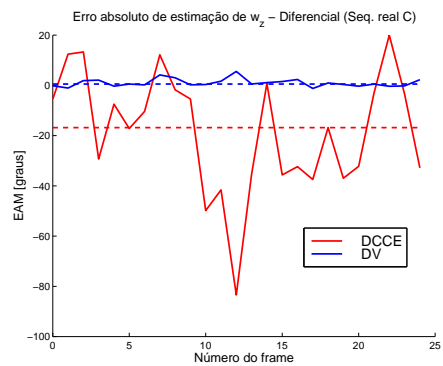


(e)  $\Omega_y$

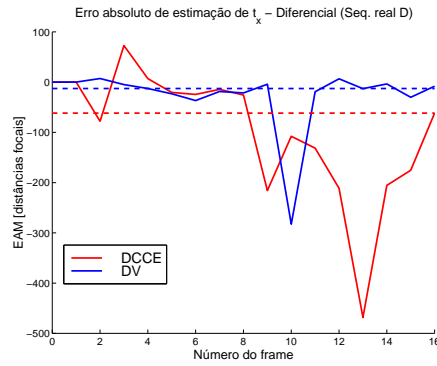


(f)  $\Omega_z$

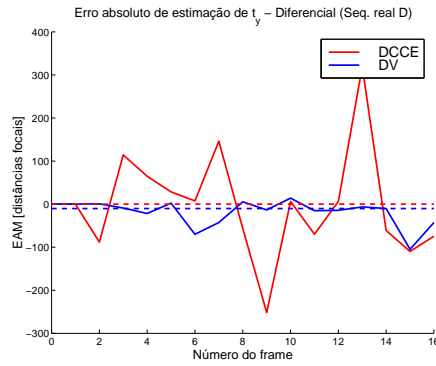
$\phi$	Sequência real C	DIF.
--------	------------------	------

(a)  $t_x$ (b)  $t_y$ (c)  $t_z$ (d)  $\Omega_x$ (e)  $\Omega_y$ (f)  $\Omega_z$

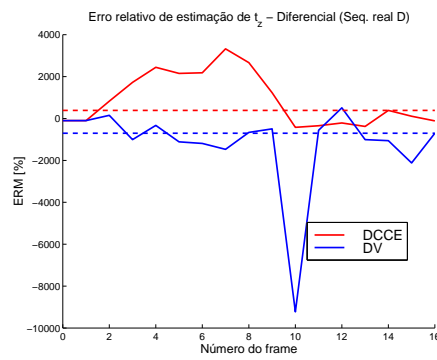
$\vec{\phi}$	<b>Sequência real D</b>	DIF.
--------------	-------------------------	------



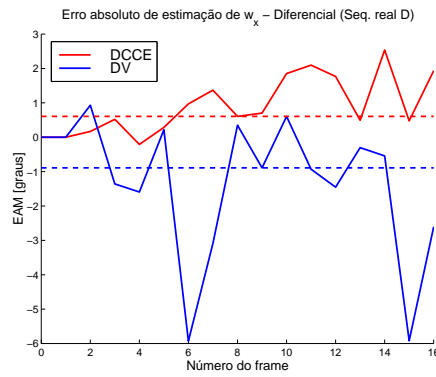
(a)  $t_x$



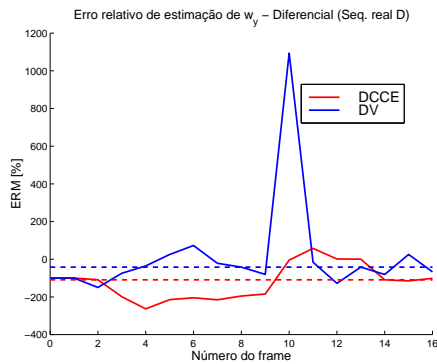
(b)  $t_y$



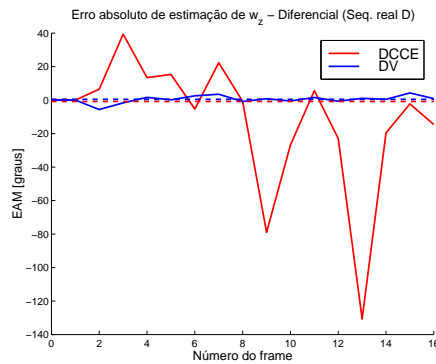
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$

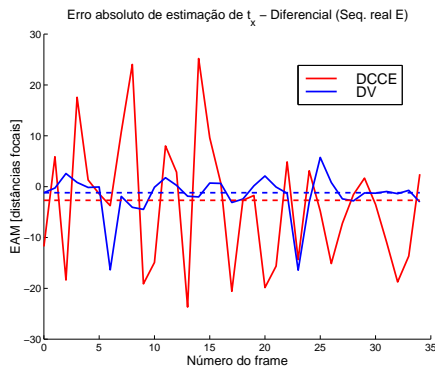
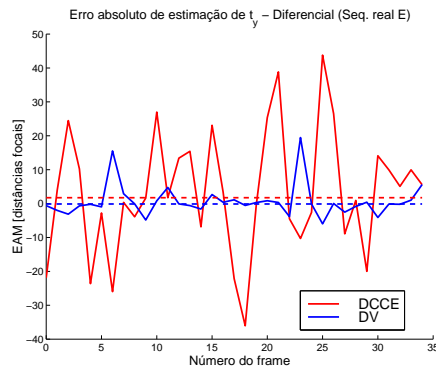
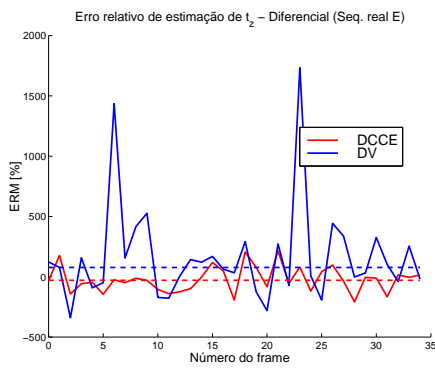
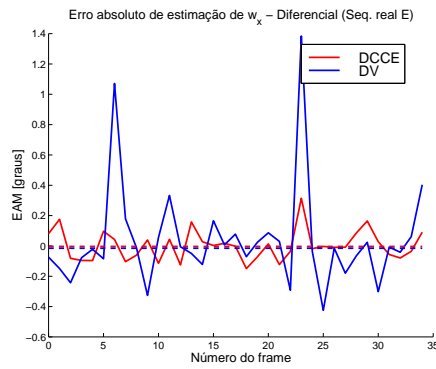
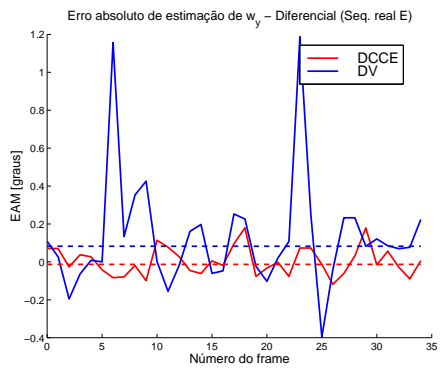
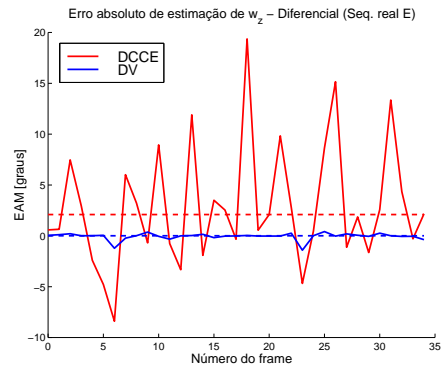


(e)  $\Omega_y$

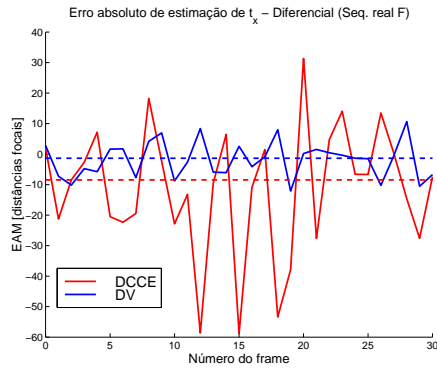


(f)  $\Omega_z$

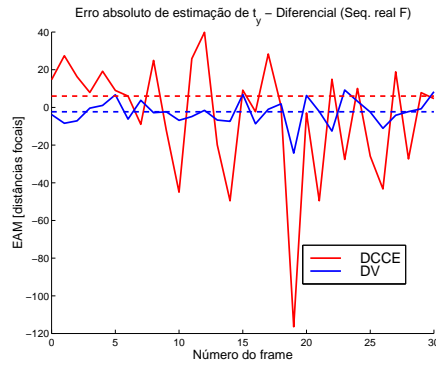
$\phi$	<b>Sequência real E</b>	DIF.
--------	-------------------------	------

(a)  $t_x$ (b)  $t_y$ (c)  $t_z$ (d)  $\Omega_x$ (e)  $\Omega_y$ (f)  $\Omega_z$

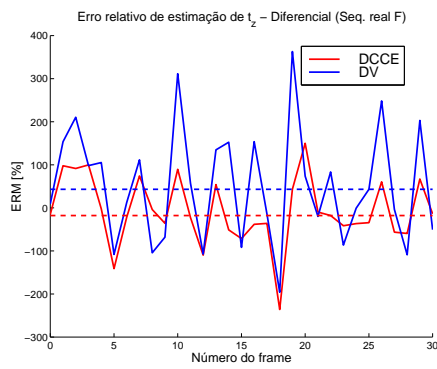
$\vec{\phi}$	<b>Sequência real F</b>	DIF.
--------------	-------------------------	------



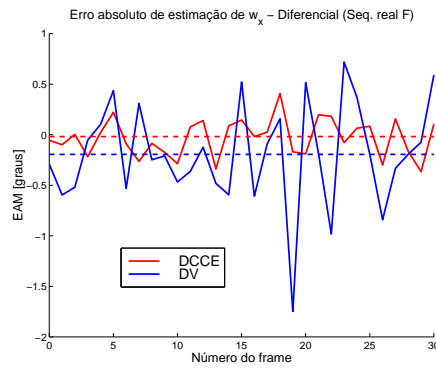
(a)  $t_x$



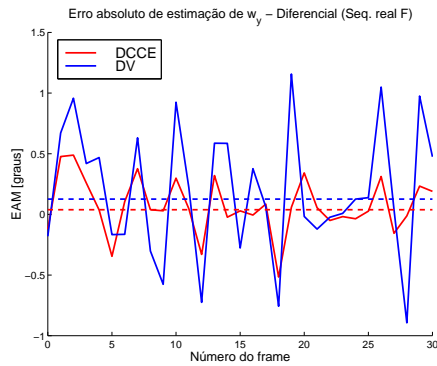
(b)  $t_y$



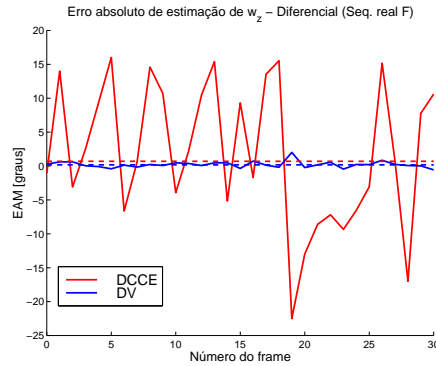
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$

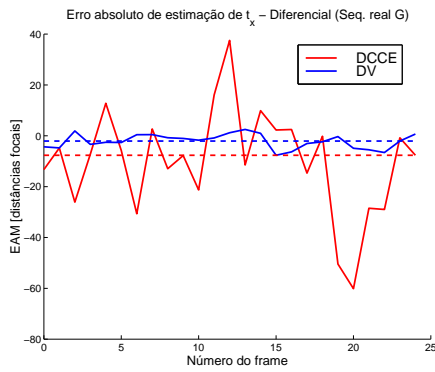
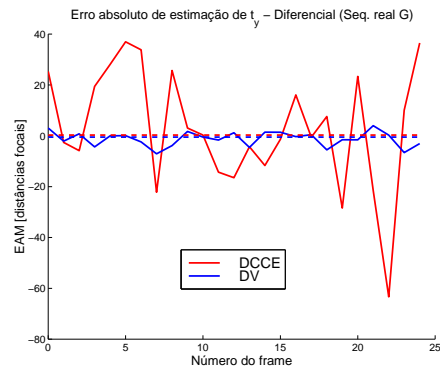
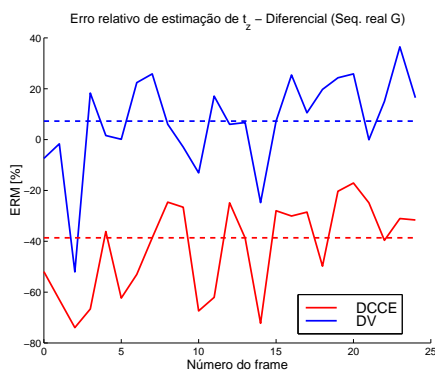
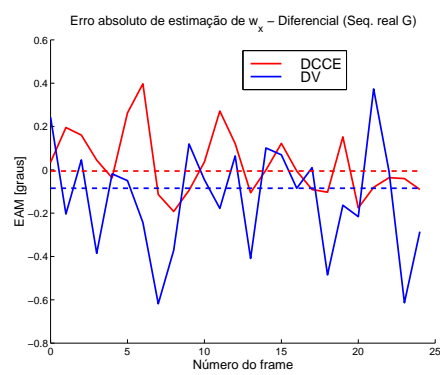
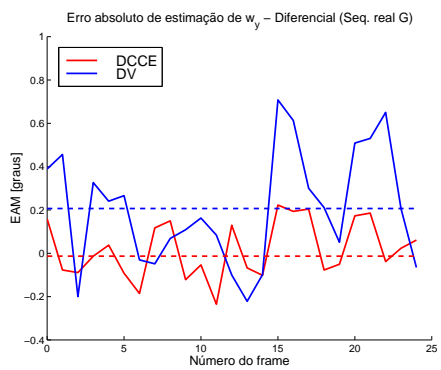
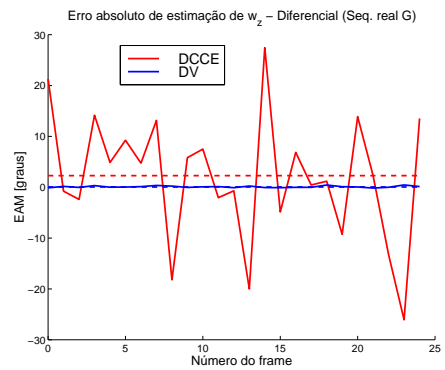


(e)  $\Omega_y$



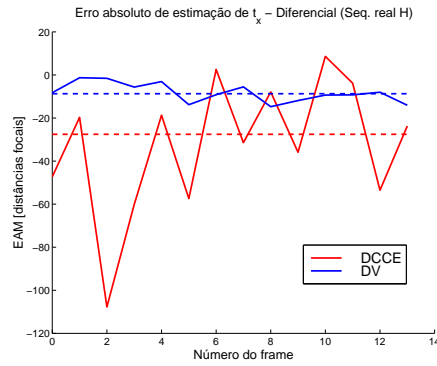
(f)  $\Omega_z$

$\phi$	<b>Sequência real G</b>	DIF.
--------	-------------------------	------

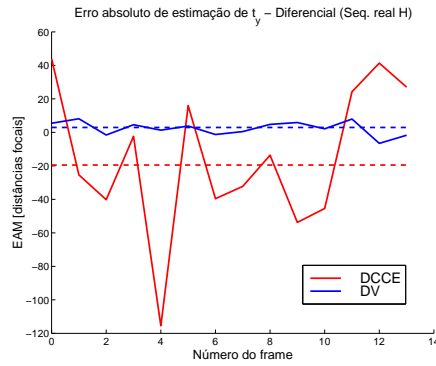
(a)  $t_x$ (b)  $t_y$ (c)  $t_z$ (d)  $\Omega_x$ (e)  $\Omega_y$ (f)  $\Omega_z$



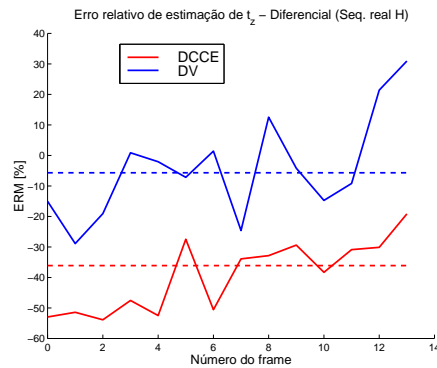
$\vec{\phi}$	Sequência real H	DIF.
--------------	------------------	------



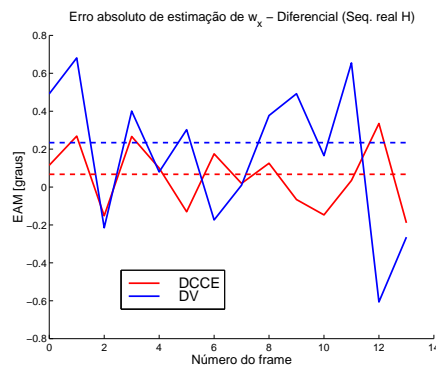
(a)  $t_x$



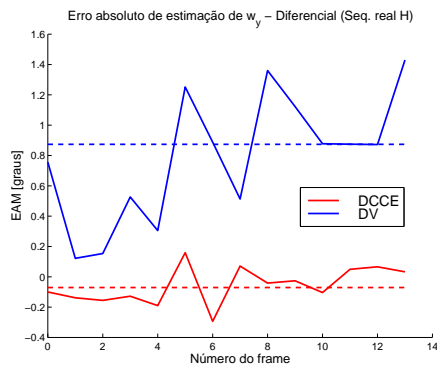
(b)  $t_y$



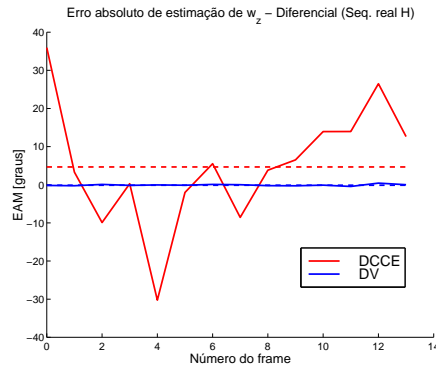
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$

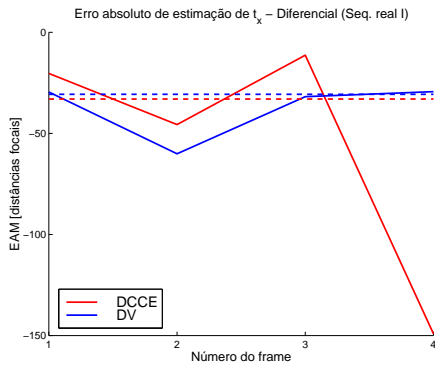


(e)  $\Omega_y$

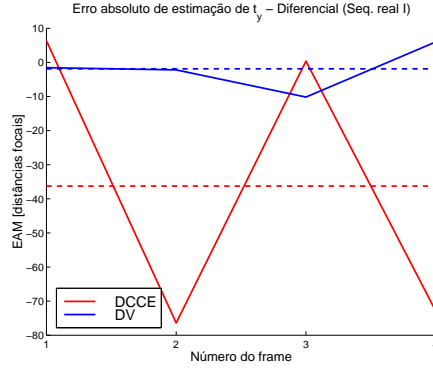


(f)  $\Omega_z$

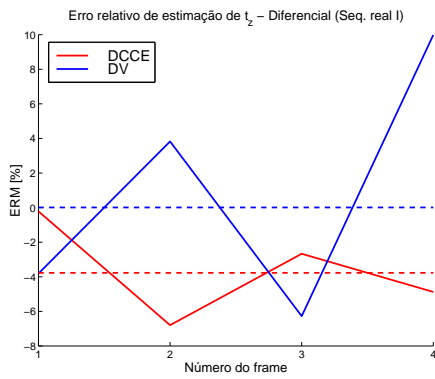
$\phi$	<b>Sequência real I</b>	DIF.
--------	-------------------------	------



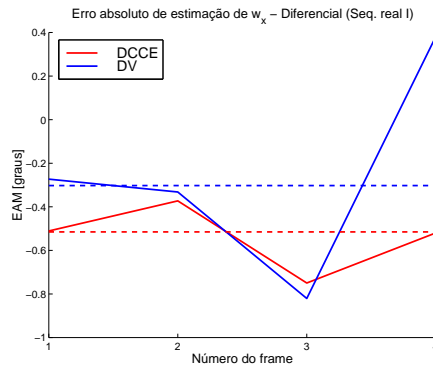
(a)  $t_x$



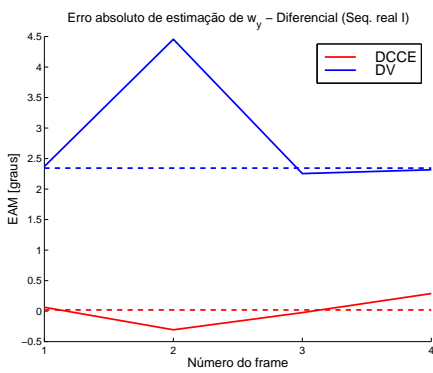
(b)  $t_y$



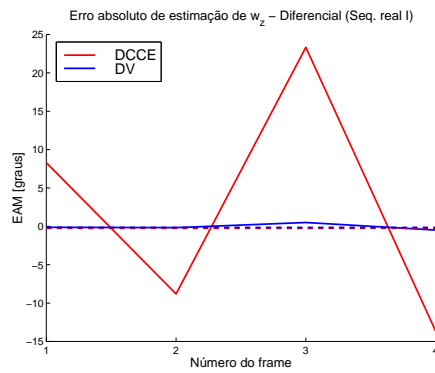
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$

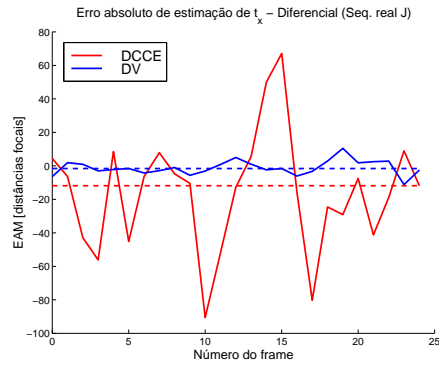


(e)  $\Omega_y$

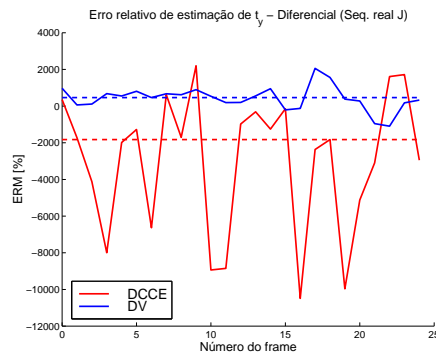


(f)  $\Omega_z$

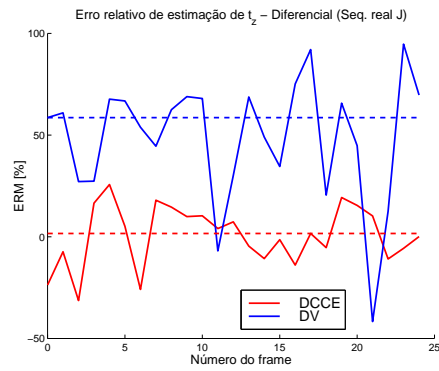
$\vec{\phi}$	Sequência real J	DIF.
--------------	------------------	------



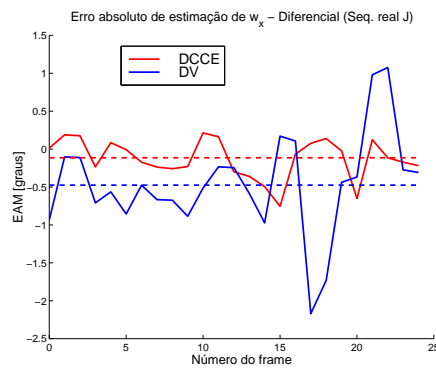
(a)  $t_x$



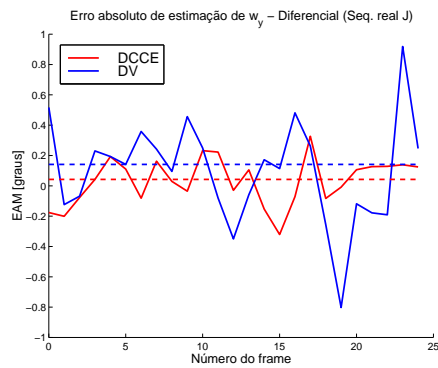
(b)  $t_y$



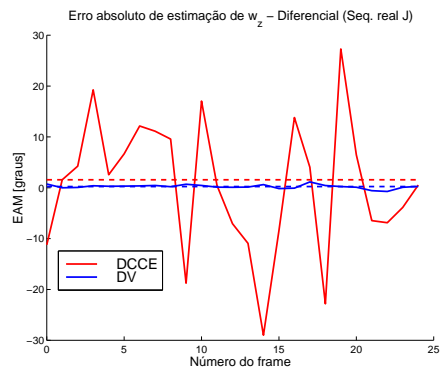
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$

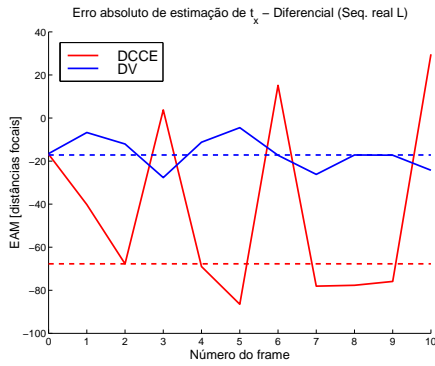


(e)  $\Omega_y$

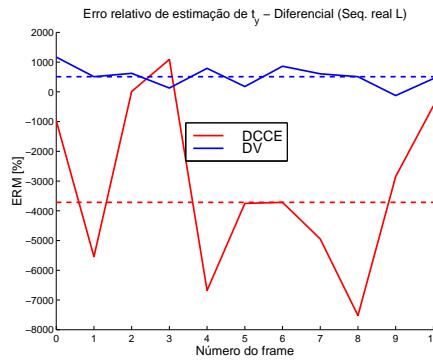


(f)  $\Omega_z$

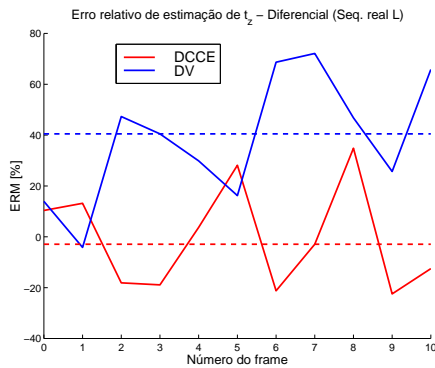
$\phi$	<b>Sequência real L</b>	DIF.
--------	-------------------------	------



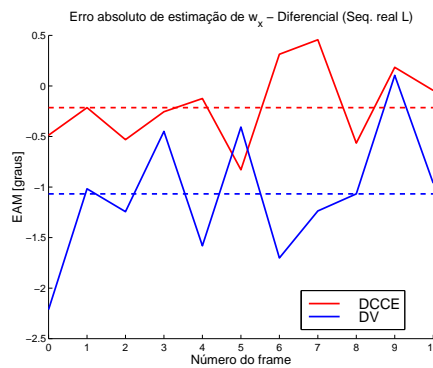
(a)  $t_x$



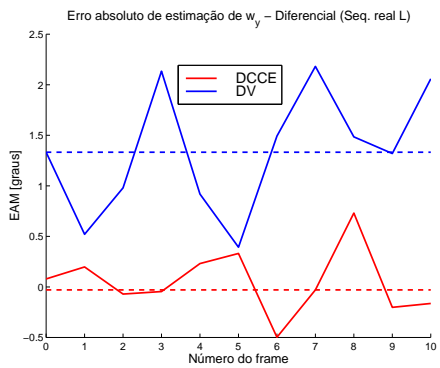
(b)  $t_y$



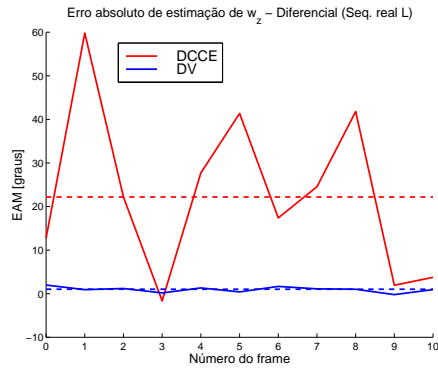
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$

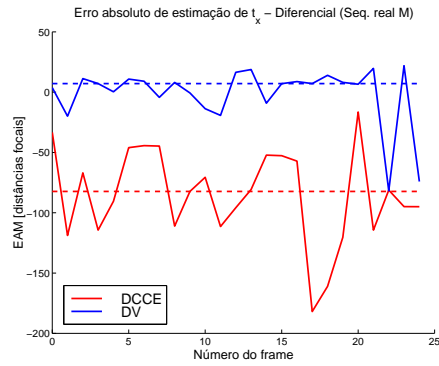


(e)  $\Omega_y$

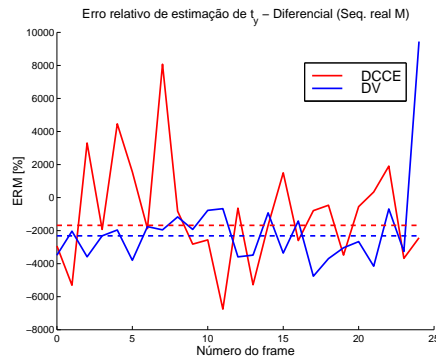


(f)  $\Omega_z$

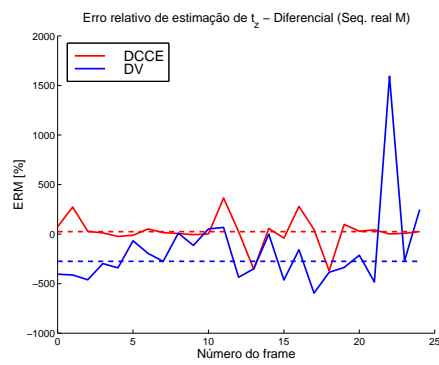
$\vec{\phi}$	Sequência real M	DIF.
--------------	------------------	------



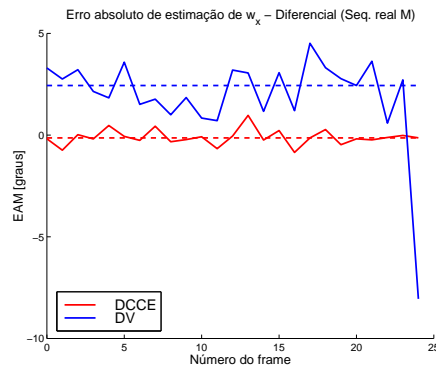
(a)  $t_x$



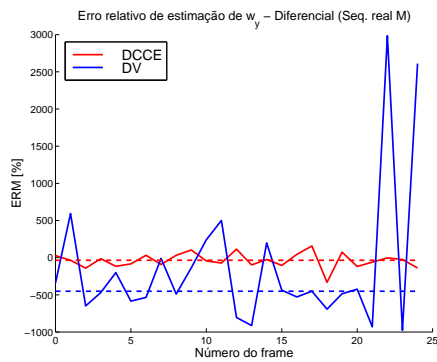
(b)  $t_y$



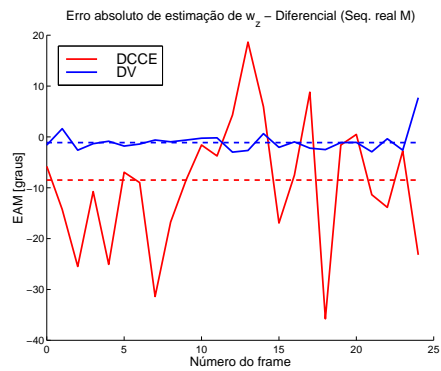
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$

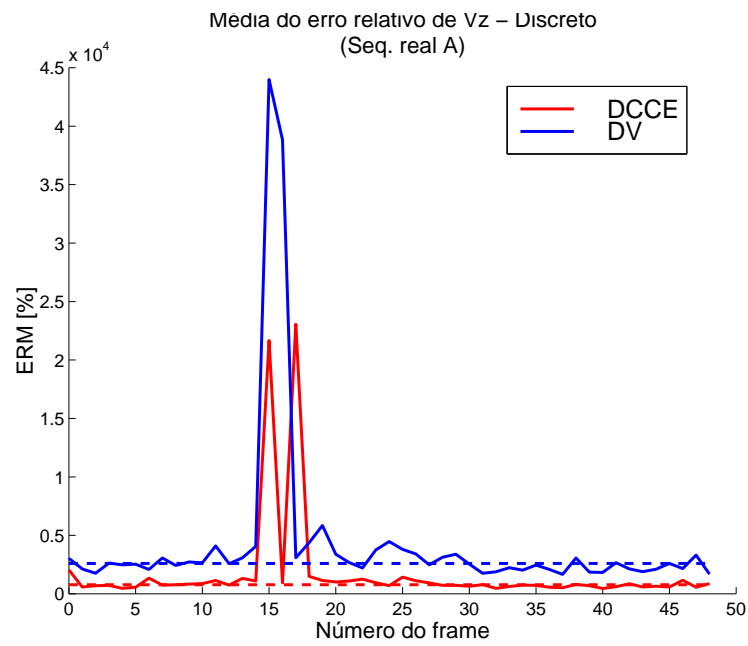


(f)  $\Omega_z$

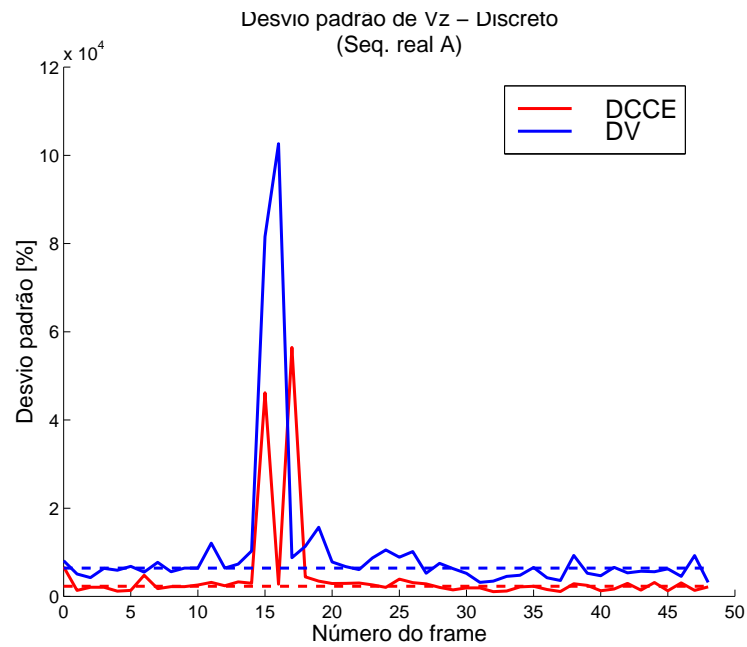
### B.3 Aproximação discreta - $V_Z$

O resultado obtido para  $V_Z$ , para cada imagem, de cada sequência, é apresentado de seguida, para a aproximação discreta.

$V_Z$	Sequência real A	DISC.
-------	------------------	-------

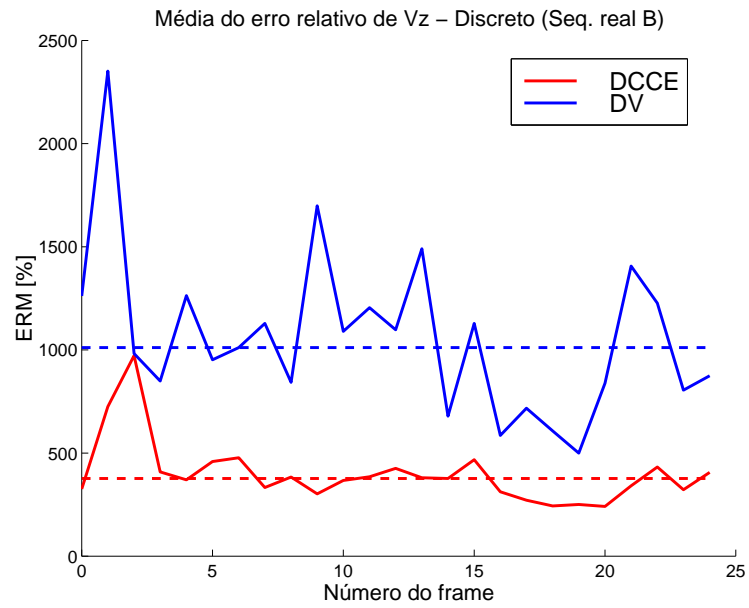


(a) ERM

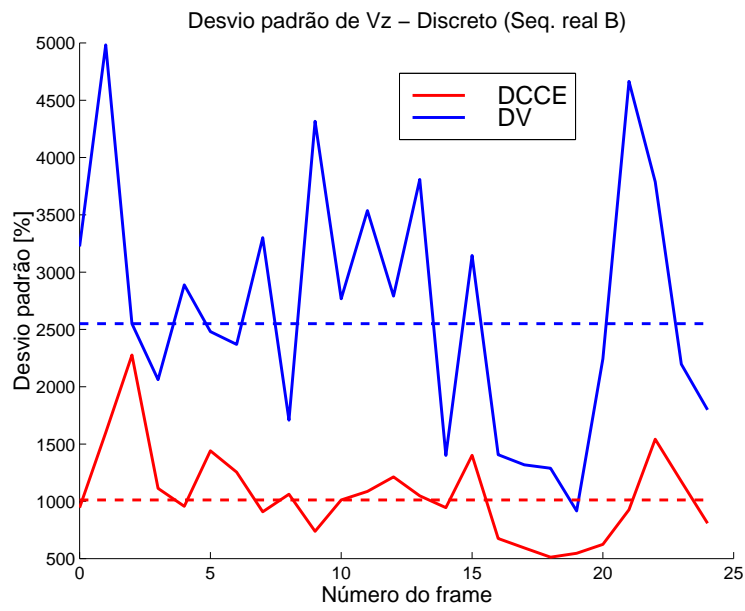


(b) DPM

$V_z$	Sequência real B	DISC.
-------	------------------	-------



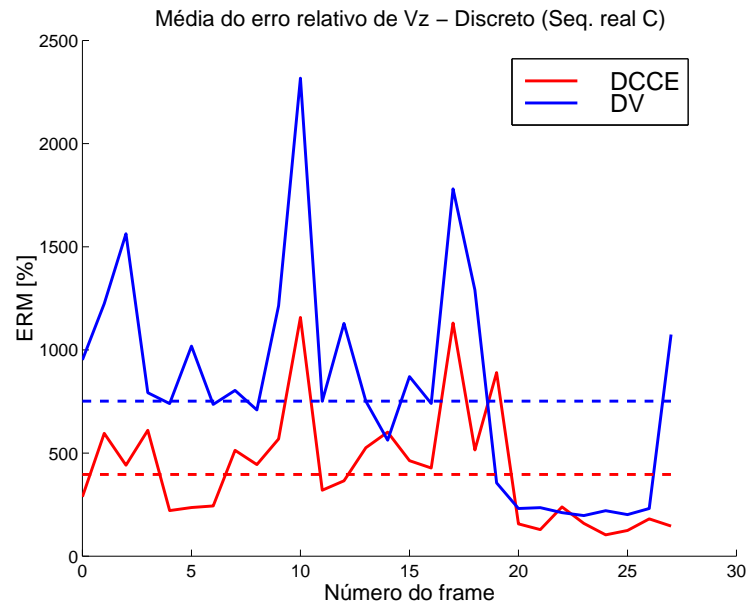
(a) ERM



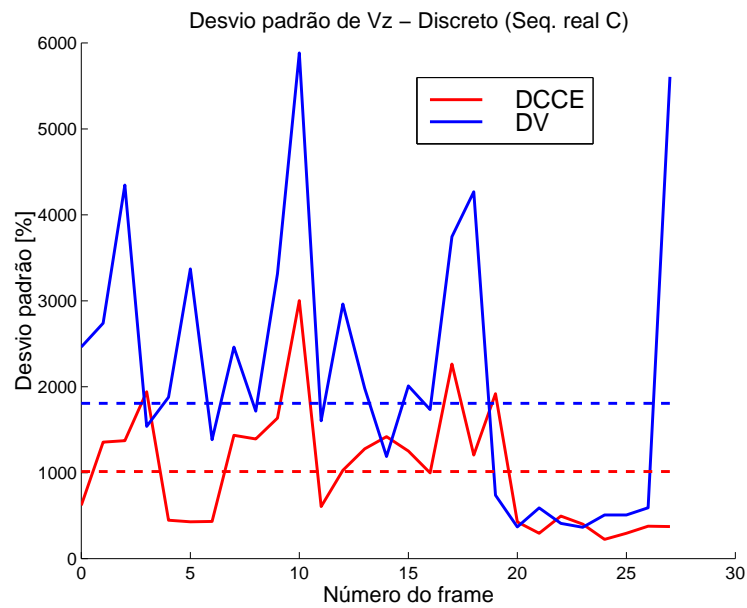
(b) DPM



$V_Z$	Sequência real C	DISC.
-------	------------------	-------

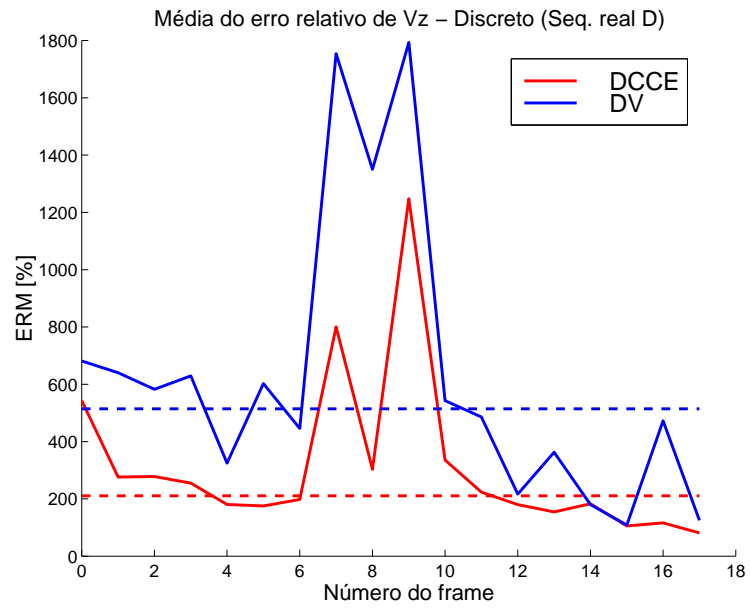


(a) ERM

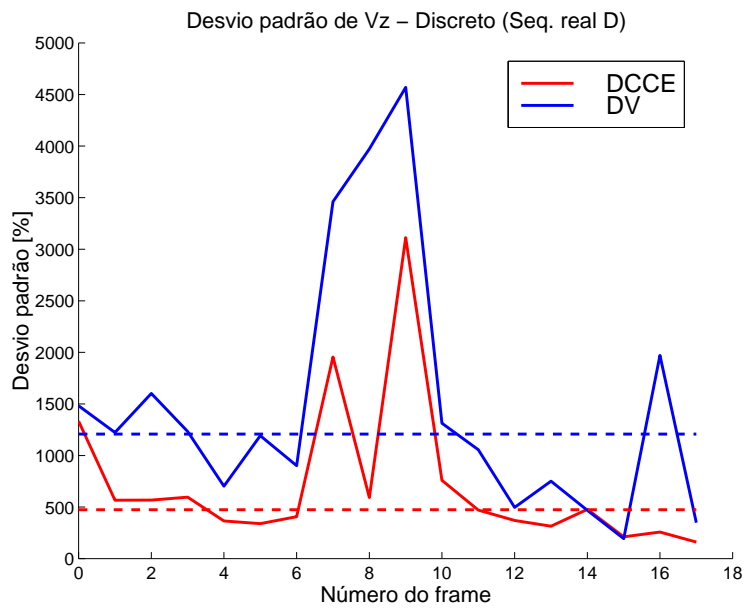


(b) DPM

$V_Z$	Sequência real D	DISC.
-------	------------------	-------

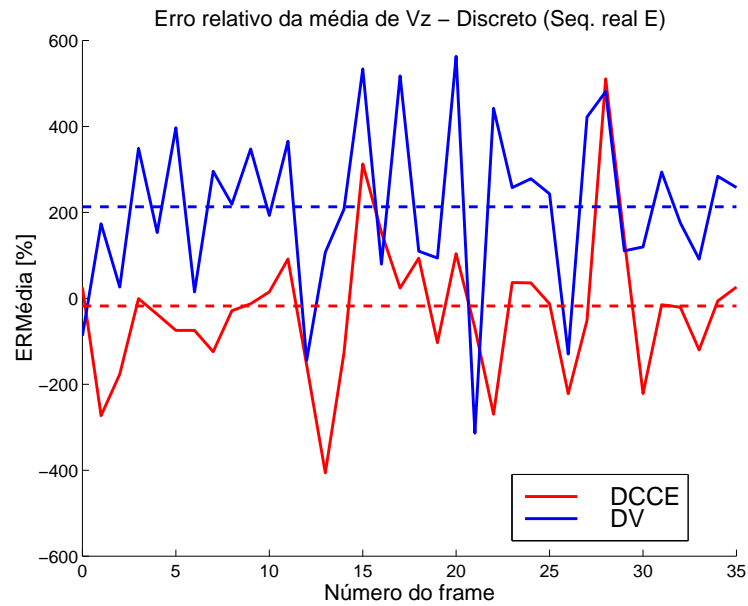


(a) ERM

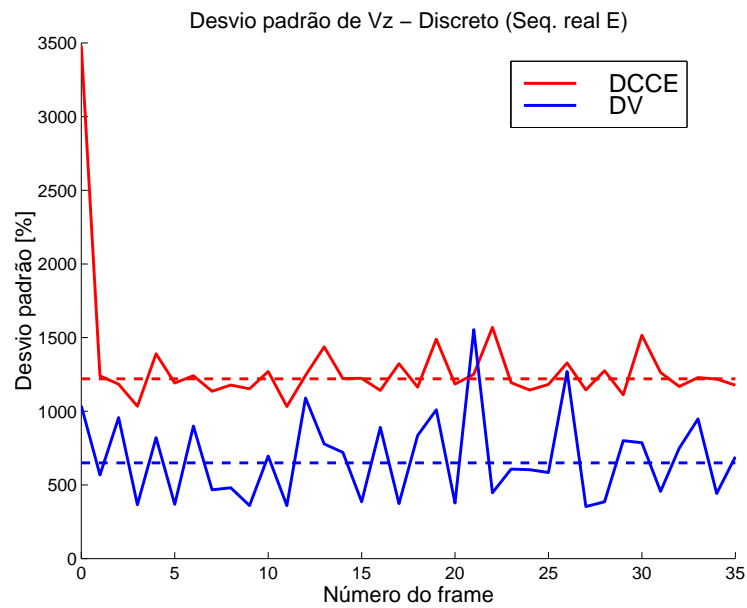


(b) DPM

$V_Z$	Sequência real E	DISC.
-------	------------------	-------

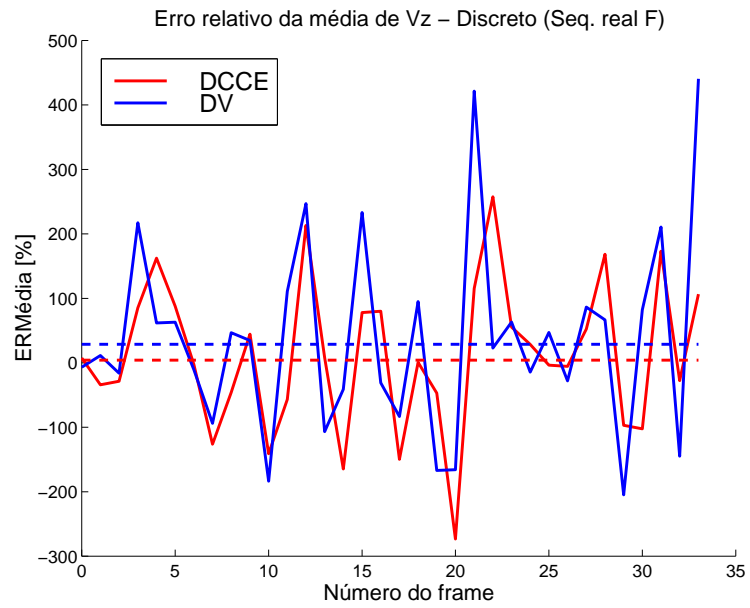


(a) ERMédia

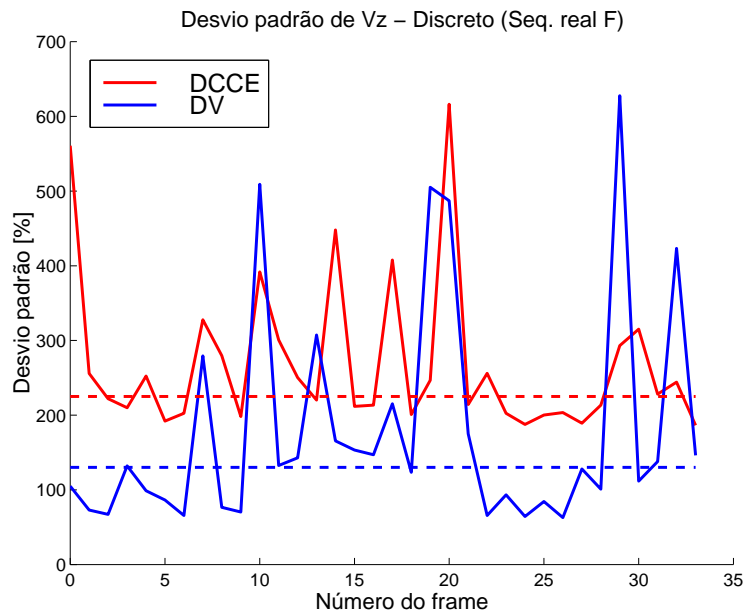


(b) DPM

$V_z$	Sequência real F	DISC.
-------	------------------	-------

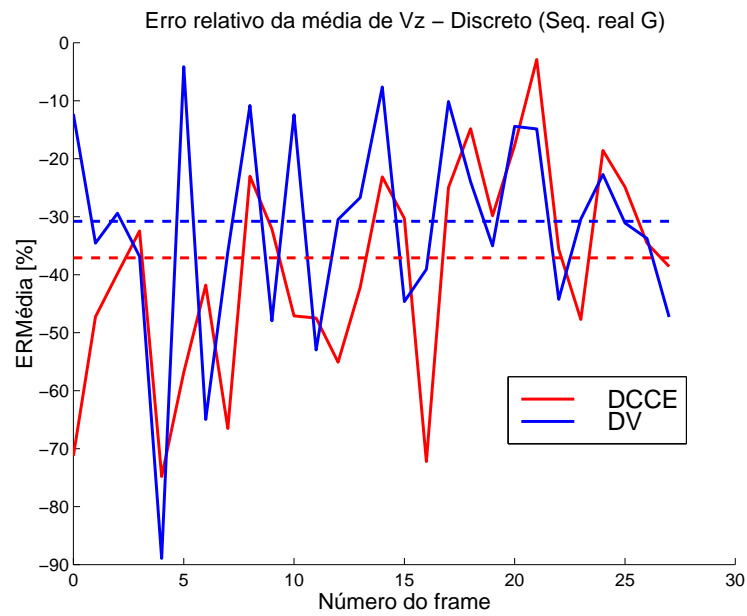


(a) ERMédia

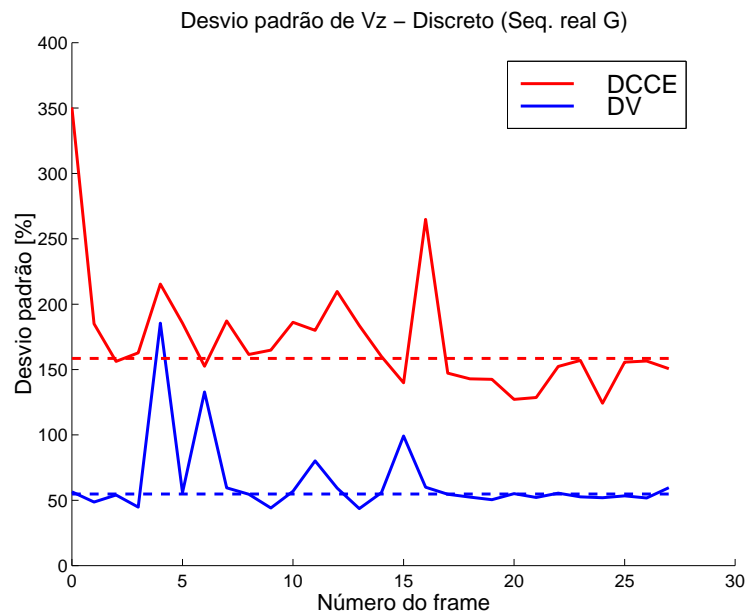


(b) DPM

$V_Z$	Sequência real G	DISC.
-------	------------------	-------

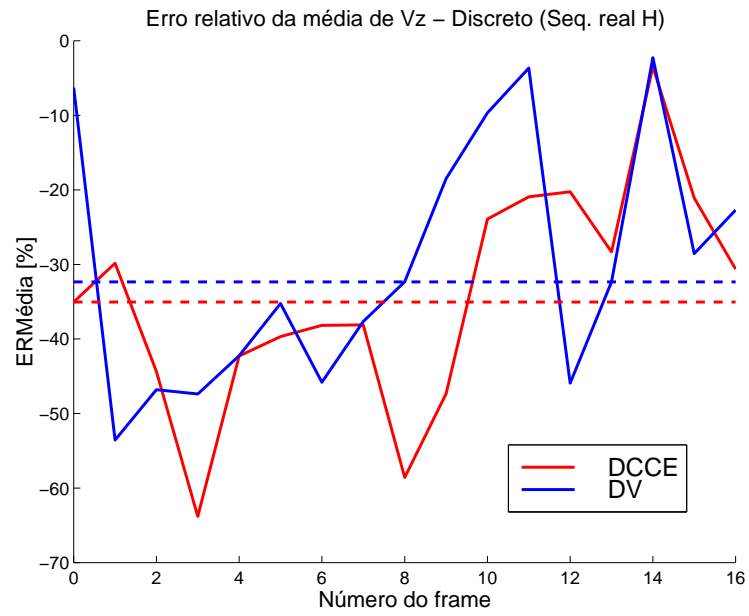


(a) ERMédia

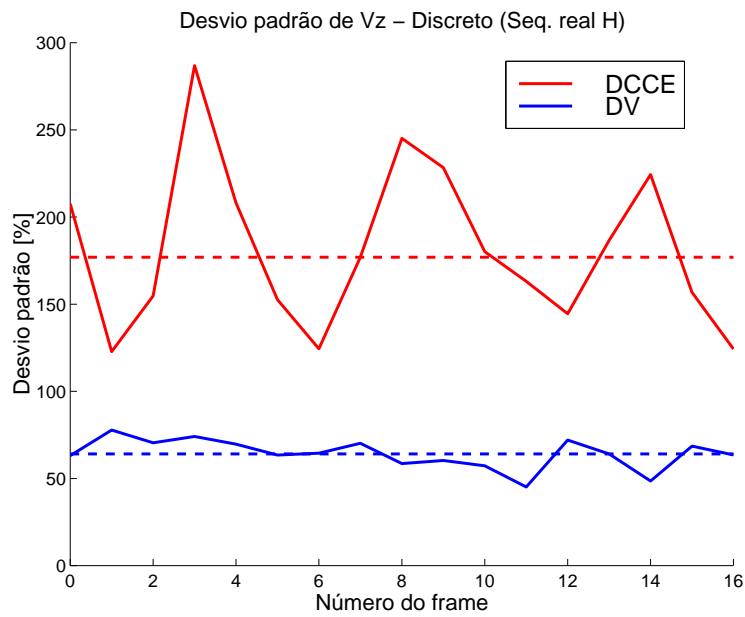


(b) DPM

$V_Z$	Sequência real H	DISC.
-------	------------------	-------

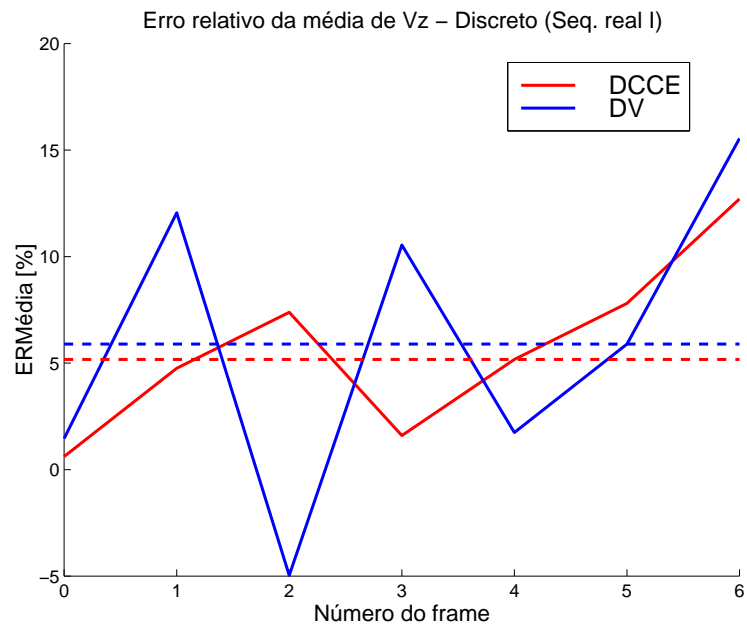


(a) ERMédia

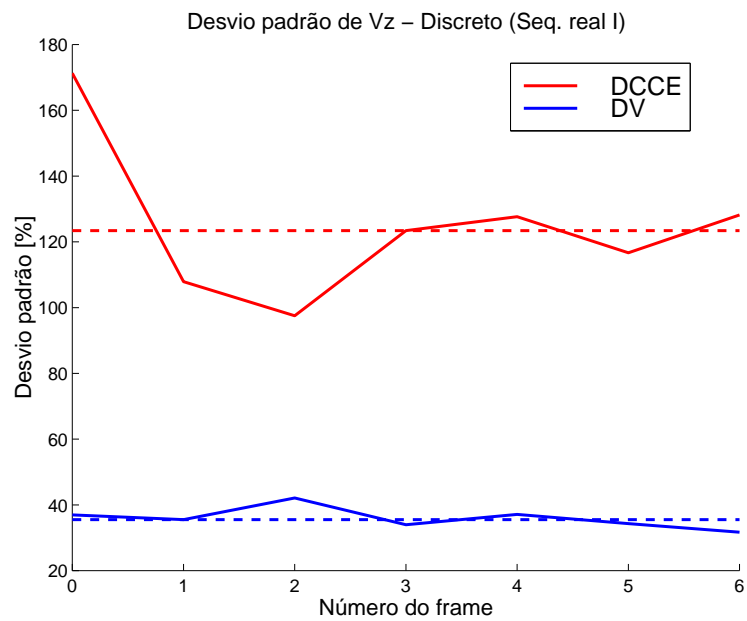


(b) DPM

$V_Z$	Sequência real I		DISC.
-------	------------------	--	-------

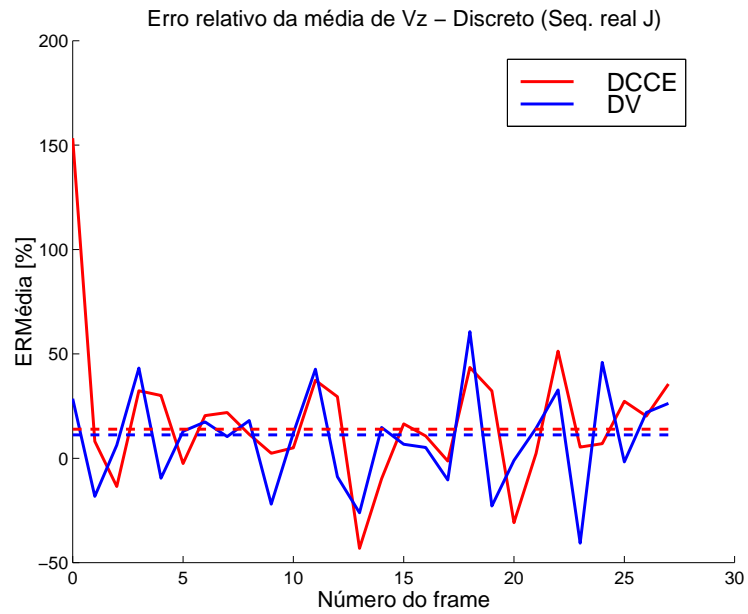


(a) ERMédia

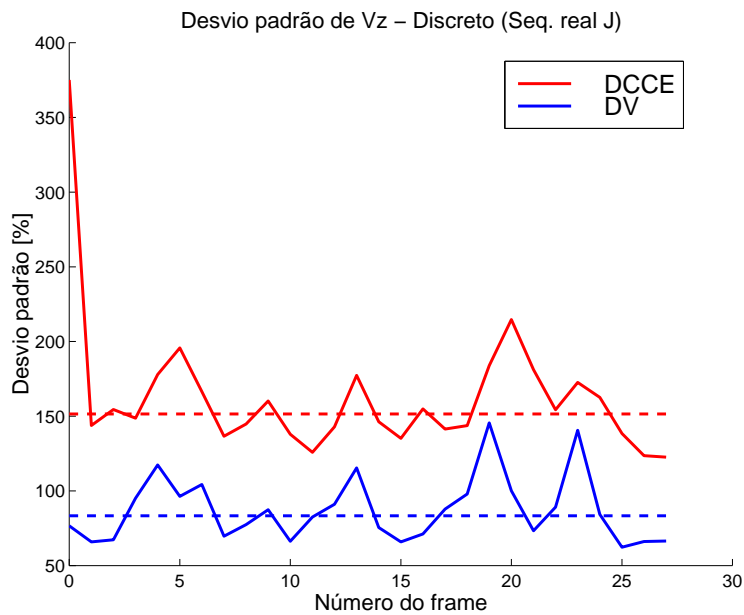


(b) DPM

$V_Z$	Sequência real J	DISC.
-------	------------------	-------



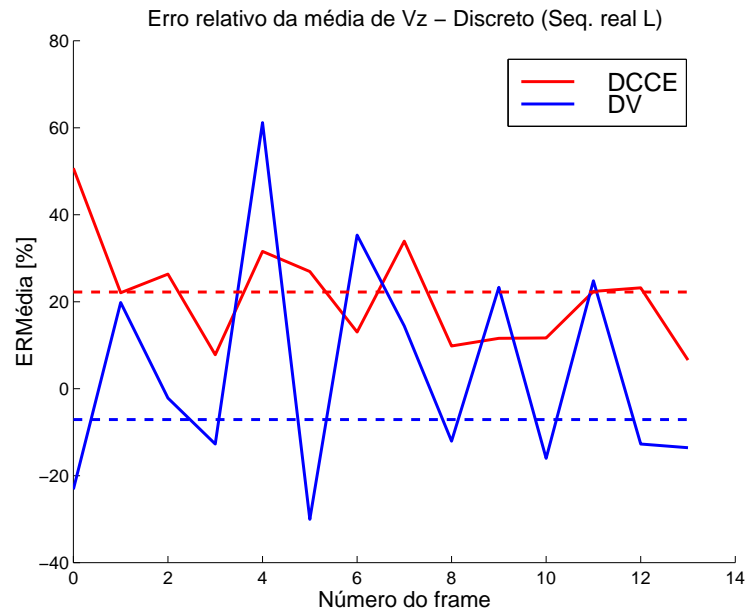
(a) ERMédia



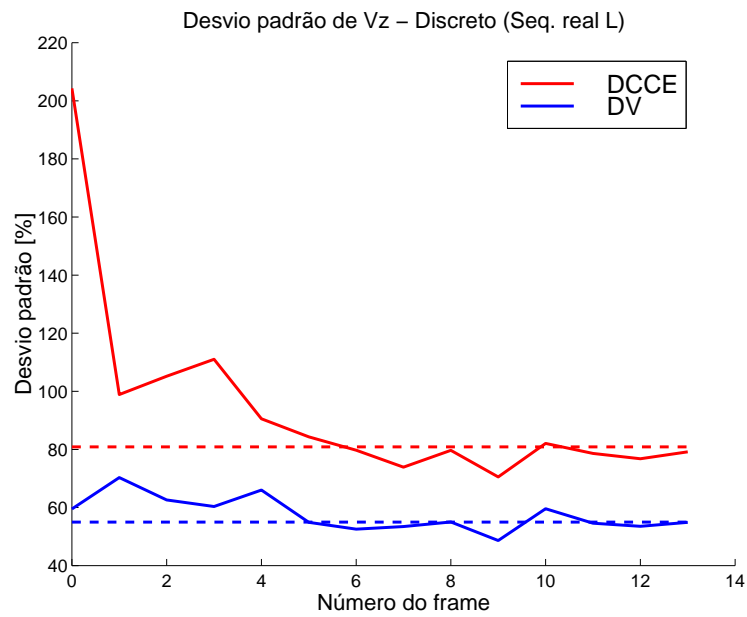
(b) DPM



$V_Z$	Sequência real L	DISC.
-------	------------------	-------

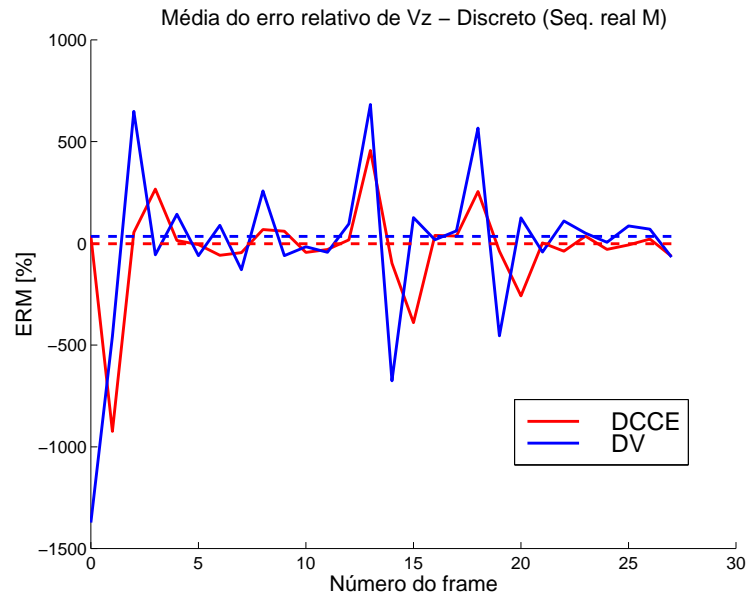


(a) ERMédia

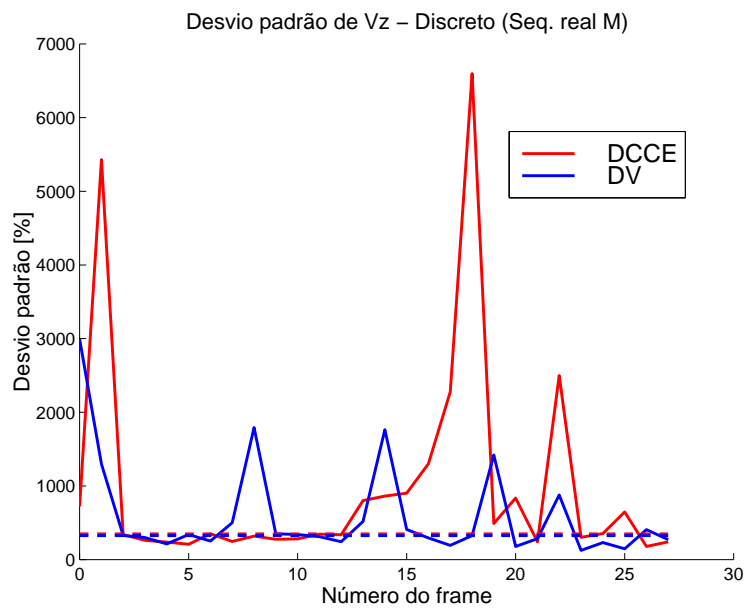


(b) DPM

$V_Z$	Sequência real M	DISC.
-------	------------------	-------



(a) ERM

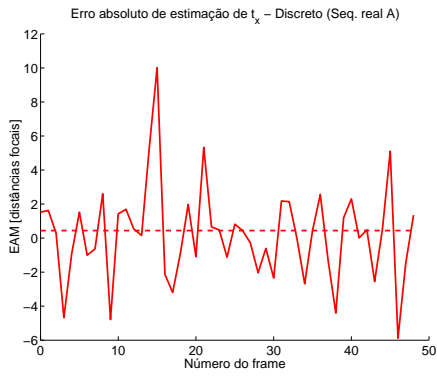
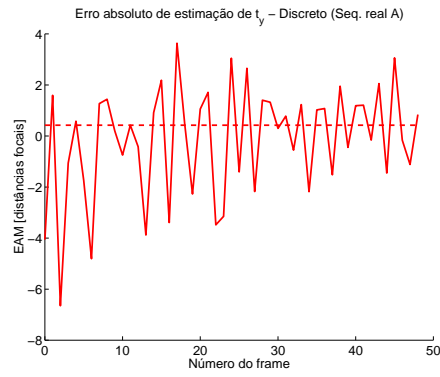
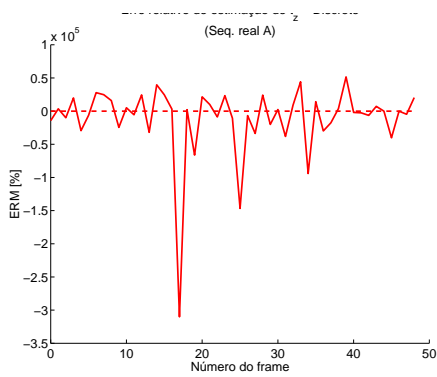
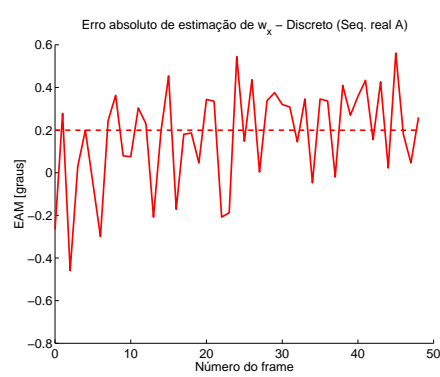
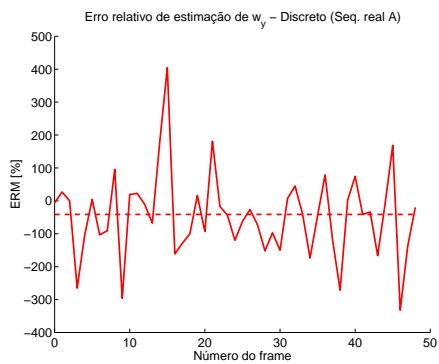
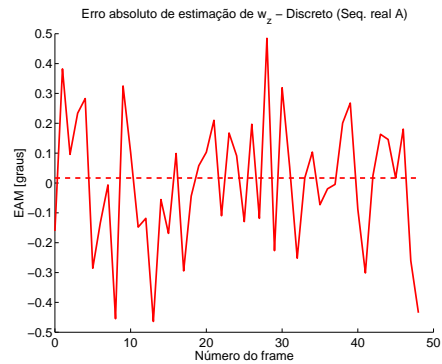


(b) DPM

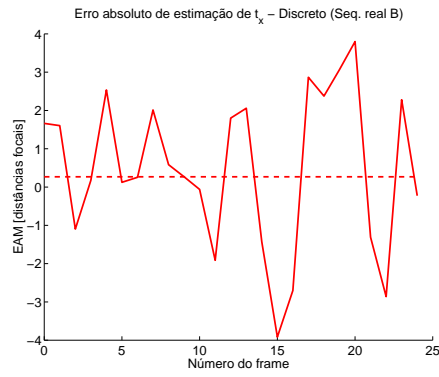
## B.4 Aproximação discreta - $\vec{\phi}$

O resultado obtido para  $\vec{\phi}$ , para cada imagem, de cada sequência, é apresentado de seguida, para a aproximação discreta.

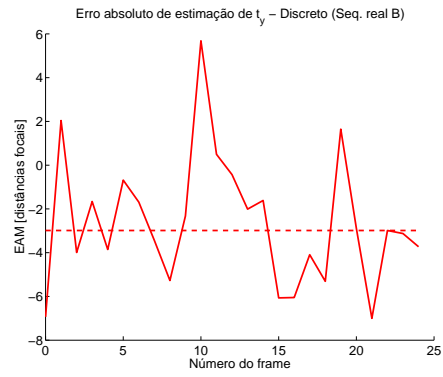
$\phi$	Sequência real A	DISC.
--------	------------------	-------

(a)  $t_X$ (b)  $t_Y$ (c)  $t_Z$ (d)  $\Omega_X$ (e)  $\Omega_Y$ (f)  $\Omega_Z$

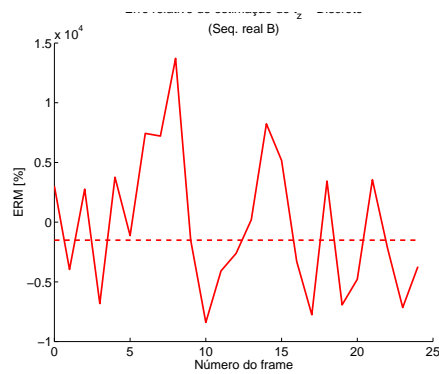
$\vec{\phi}$	<b>Sequência real B</b>	DISC.
--------------	-------------------------	-------



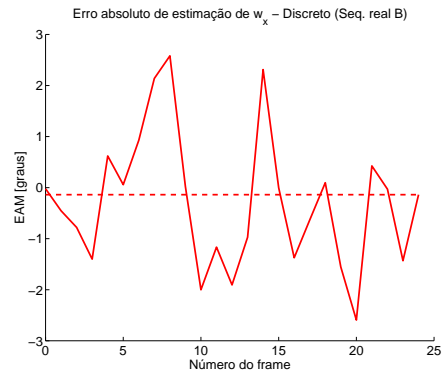
(a)  $t_X$



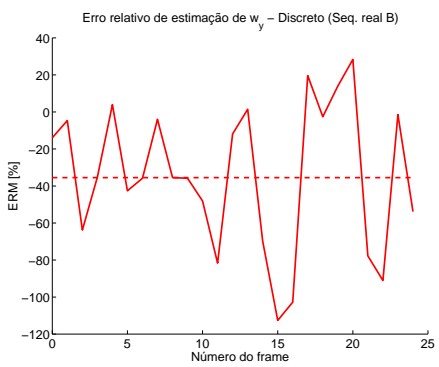
(b)  $t_Y$



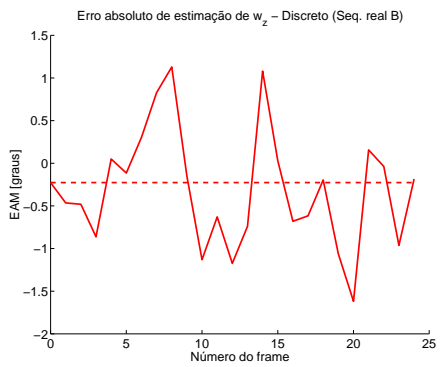
(c)  $t_Z$



(d)  $\Omega_X$

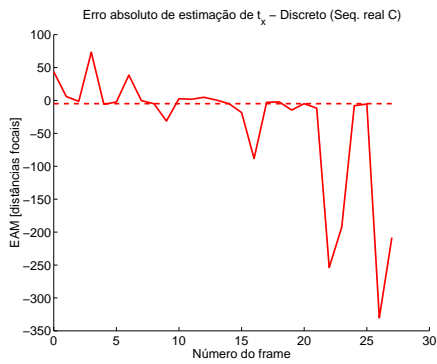
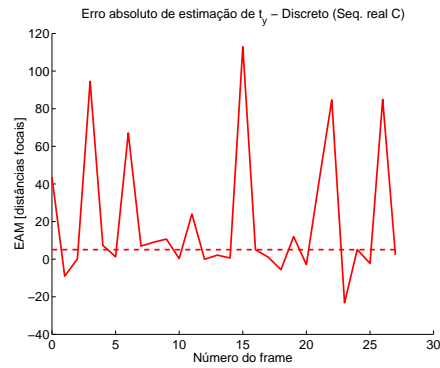
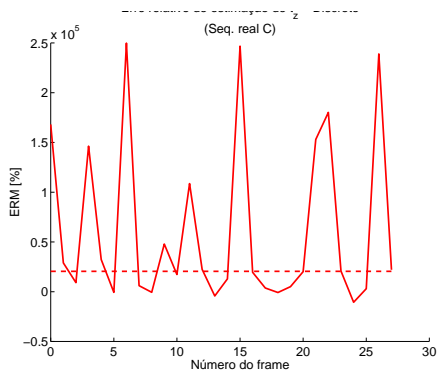
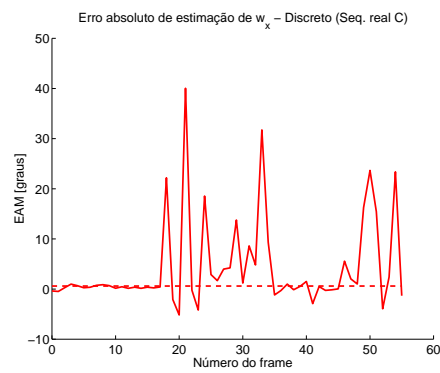
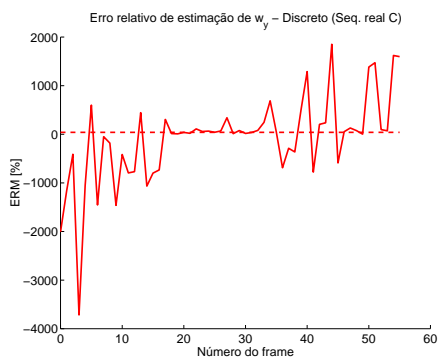
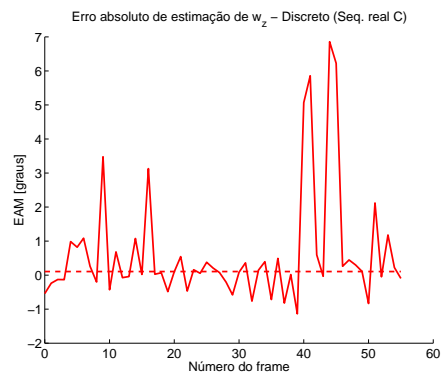


(e)  $\Omega_Y$

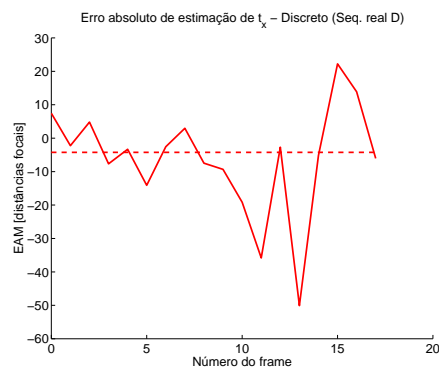


(f)  $\Omega_Z$

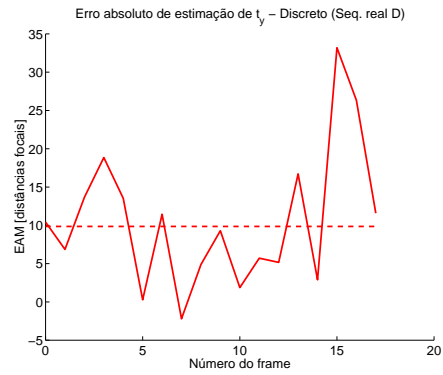
$\phi$	<b>Sequência real C</b>	DISC.
--------	-------------------------	-------

(a)  $t_x$ (b)  $t_y$ (c)  $t_z$ (d)  $\Omega_x$ (e)  $\Omega_y$ (f)  $\Omega_z$

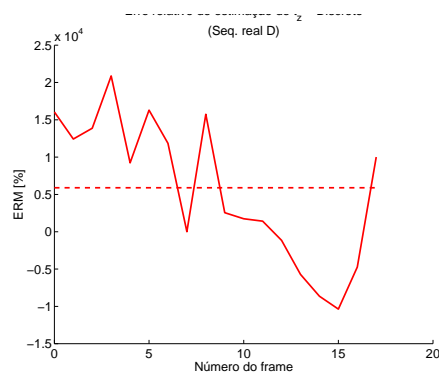
$\vec{\phi}$	<b>Sequência real D</b>	DISC.
--------------	-------------------------	-------



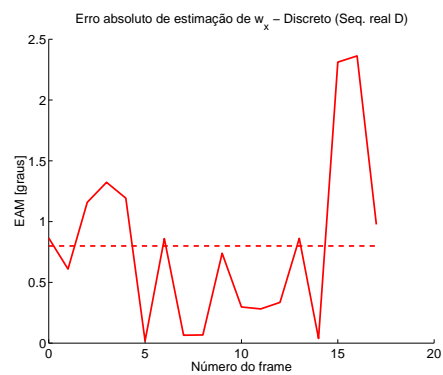
(a)  $t_X$



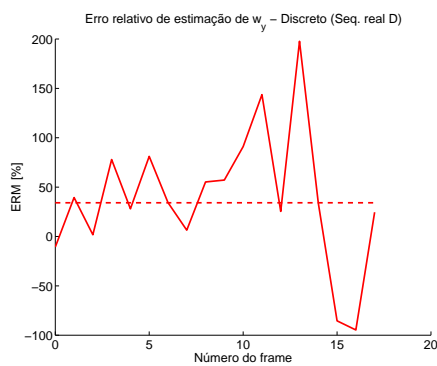
(b)  $t_Y$



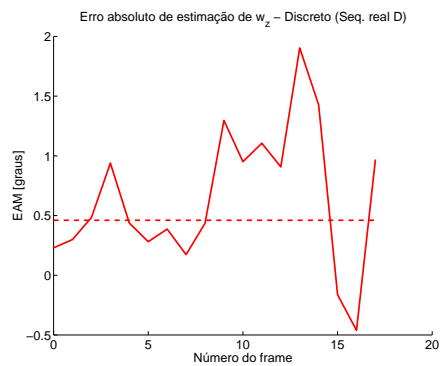
(c)  $t_Z$



(d)  $\Omega_X$

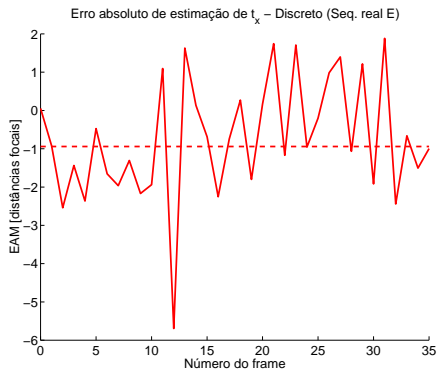
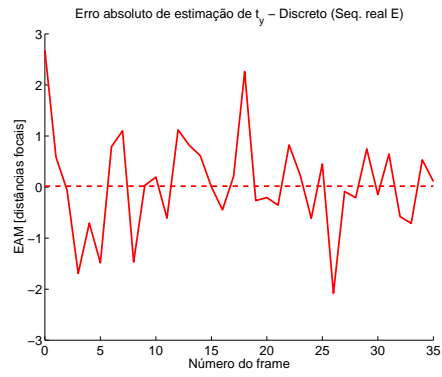
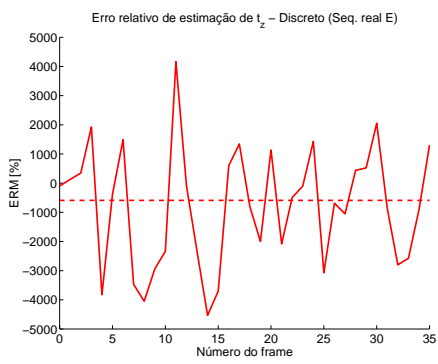
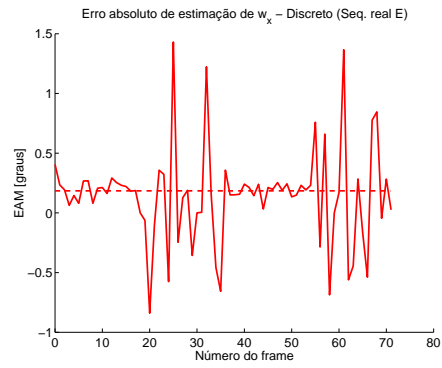
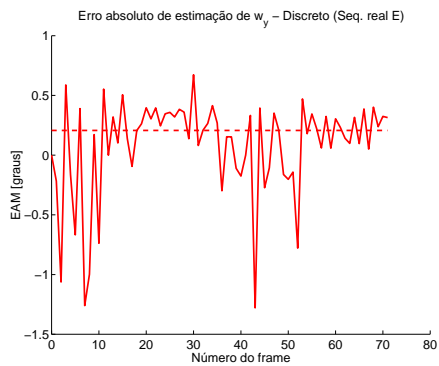
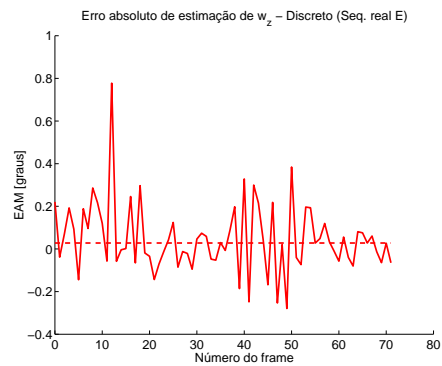


(e)  $\Omega_Y$



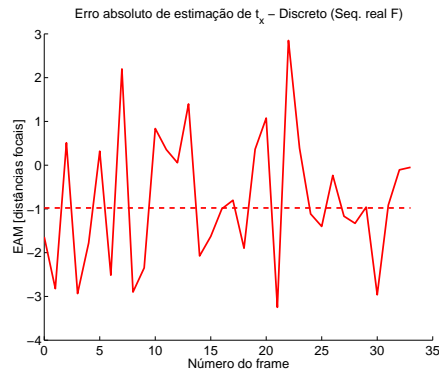
(f)  $\Omega_Z$

$\phi$	<b>Sequência real E</b>	DISC.
--------	-------------------------	-------

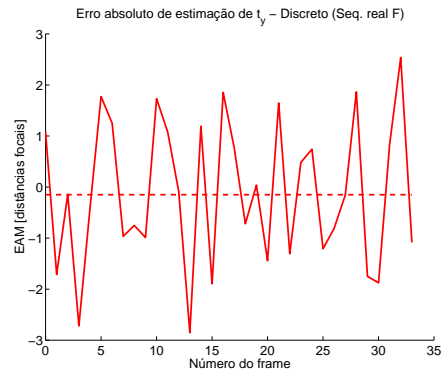
(a)  $t_X$ (b)  $t_Y$ (c)  $t_Z$ (d)  $\Omega_X$ (e)  $\Omega_Y$ (f)  $\Omega_Z$



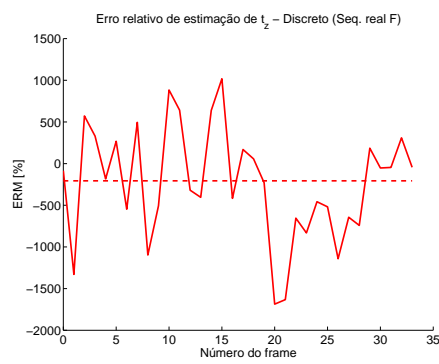
$\vec{\phi}$	<b>Sequência real F</b>	DISC.
--------------	-------------------------	-------



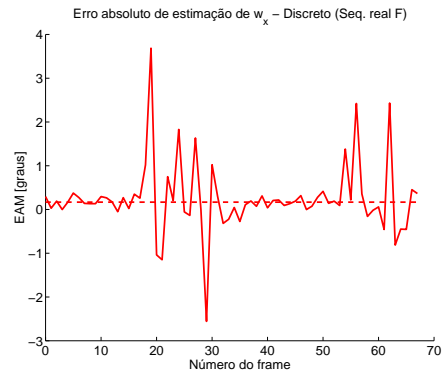
(a)  $t_X$



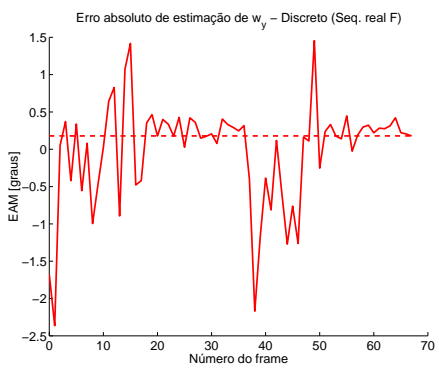
(b)  $t_Y$



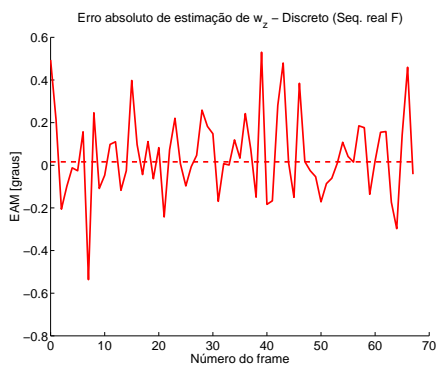
(c)  $t_Z$



(d)  $\Omega_X$

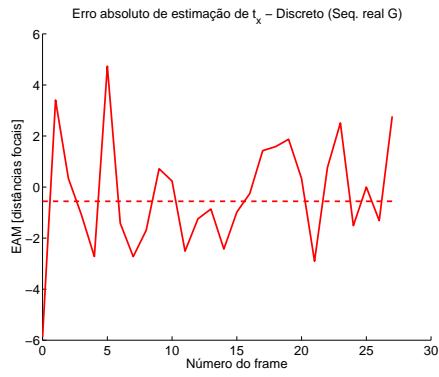
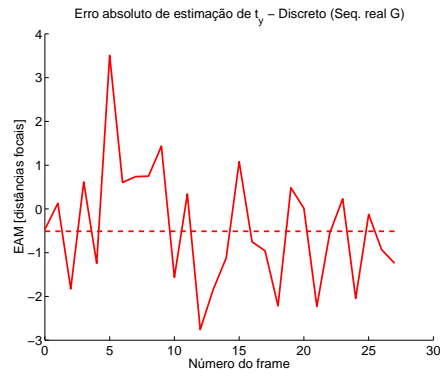
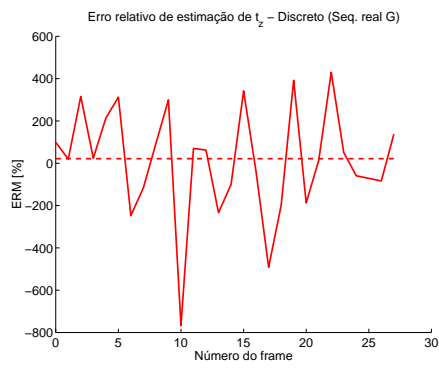
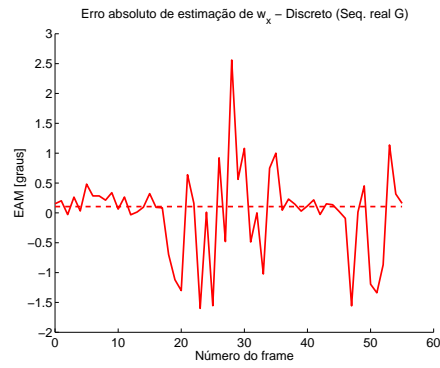
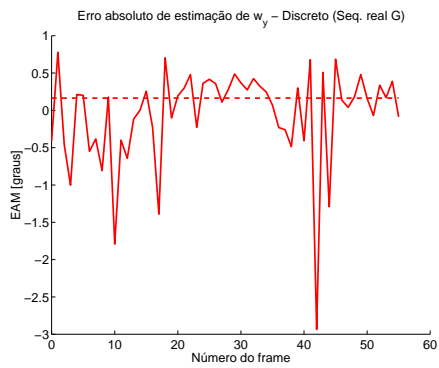
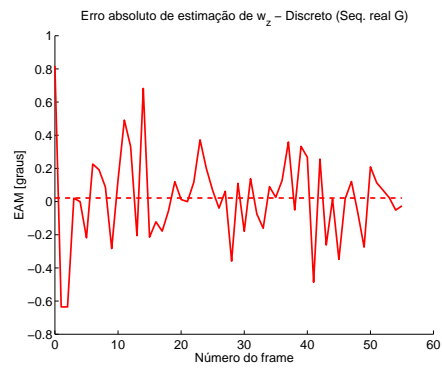


(e)  $\Omega_Y$

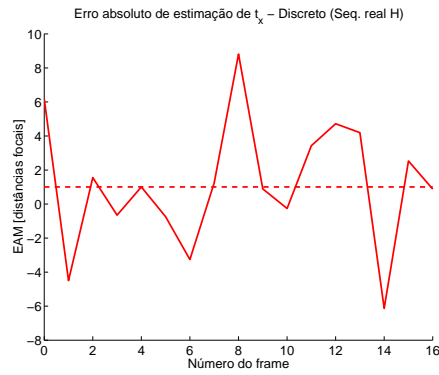


(f)  $\Omega_Z$

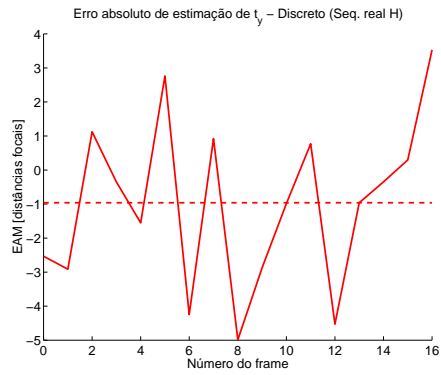
$\phi$	<b>Sequência real G</b>	DISC.
--------	-------------------------	-------

(a)  $t_X$ (b)  $t_Y$ (c)  $t_Z$ (d)  $\Omega_X$ (e)  $\Omega_Y$ (f)  $\Omega_Z$

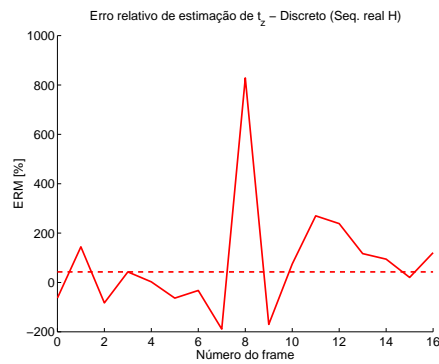
$\vec{\phi}$	<b>Sequência real H</b>	DISC.
--------------	-------------------------	-------



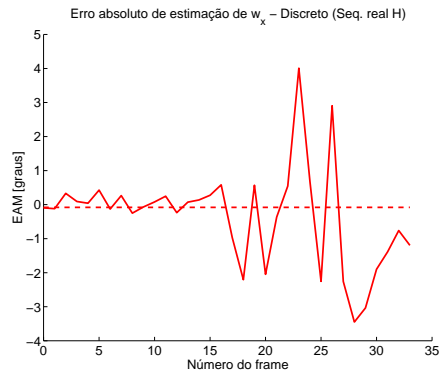
(a)  $t_x$



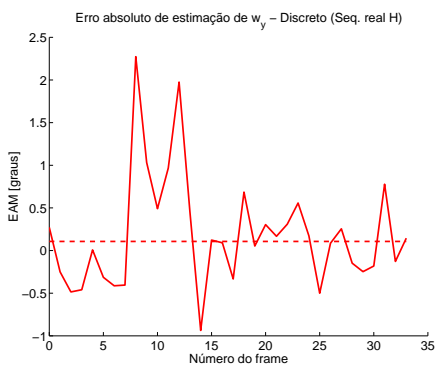
(b)  $t_y$



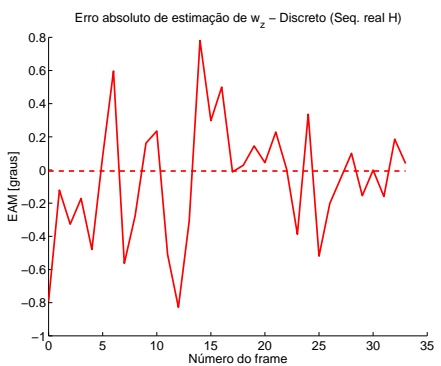
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$

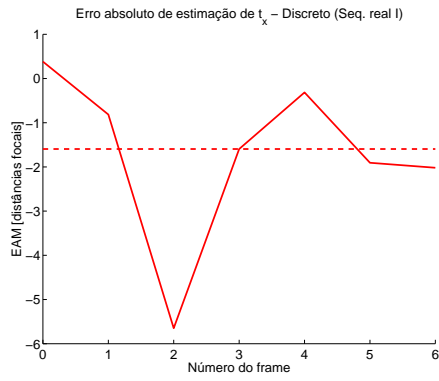
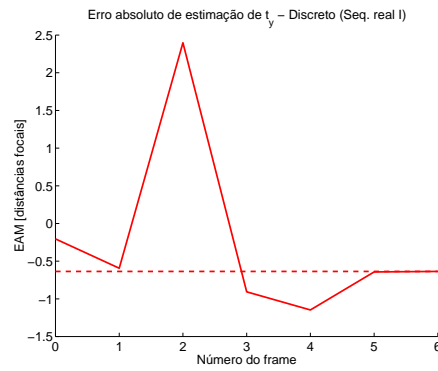
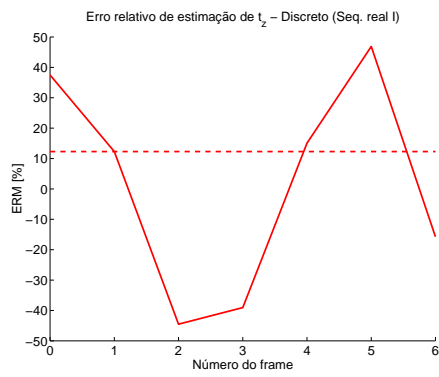
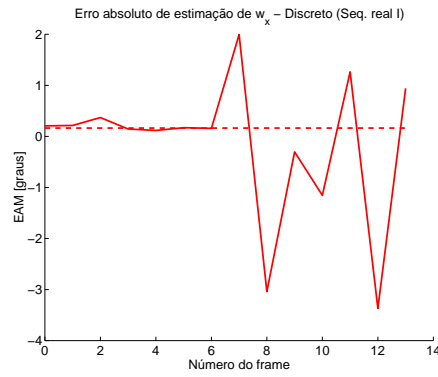
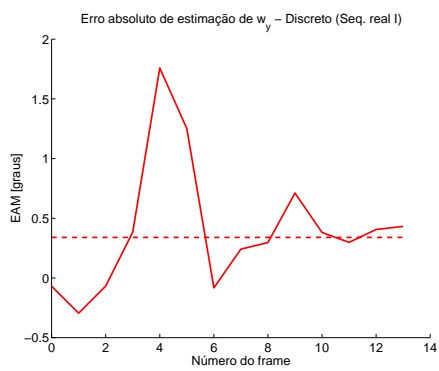
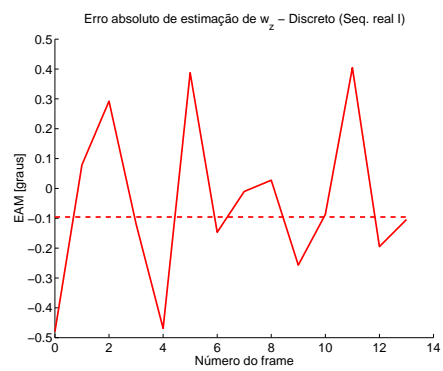


(e)  $\Omega_y$

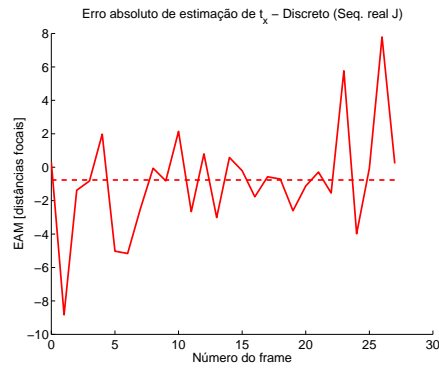


(f)  $\Omega_z$

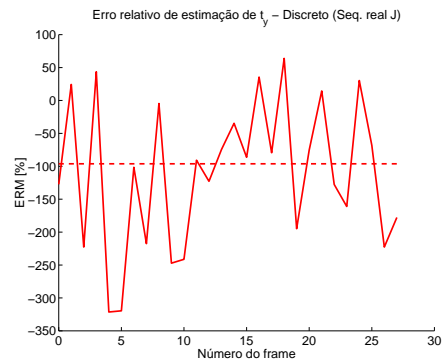
$\phi$	<b>Sequência real I</b>	DISC.
--------	-------------------------	-------

(a)  $t_x$ (b)  $t_y$ (c)  $t_z$ (d)  $\Omega_x$ (e)  $\Omega_y$ (f)  $\Omega_z$

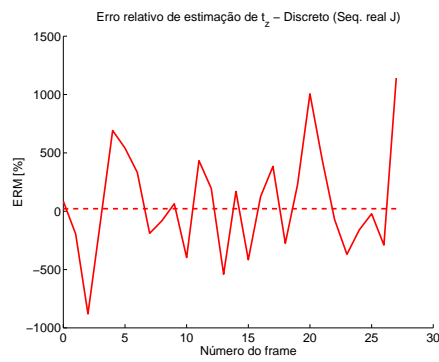
$\vec{\phi}$	<b>Sequência real J</b>	DISC.
--------------	-------------------------	-------



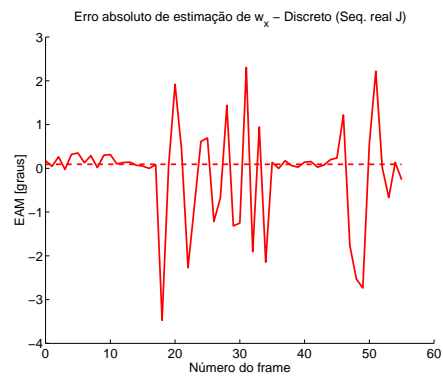
(a)  $t_X$



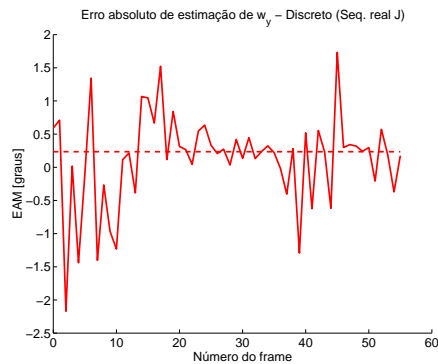
(b)  $t_Y$



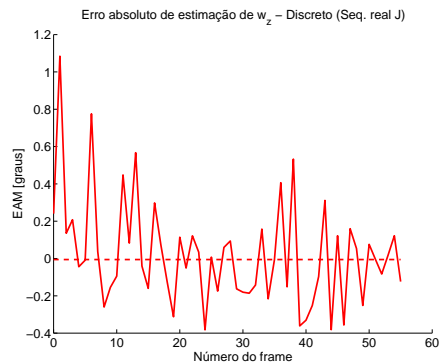
(c)  $t_Z$



(d)  $\Omega_X$

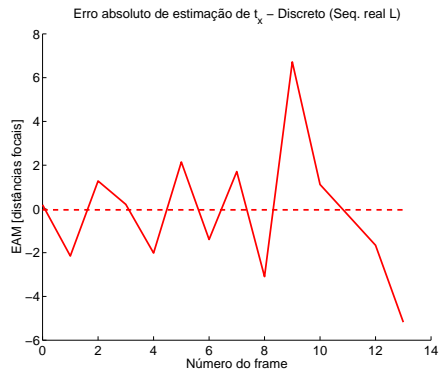
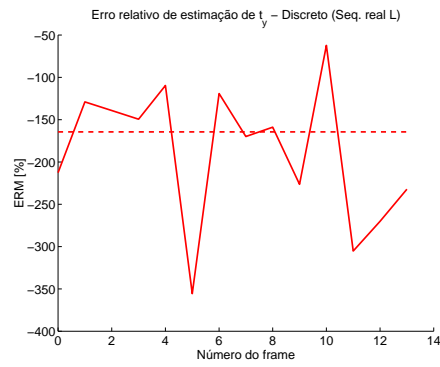
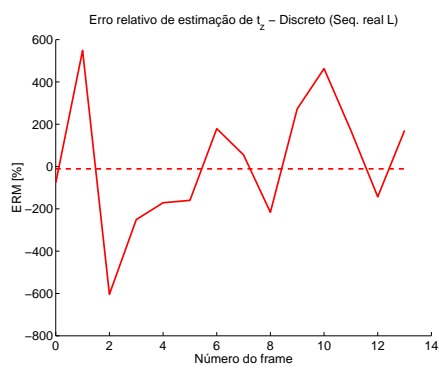
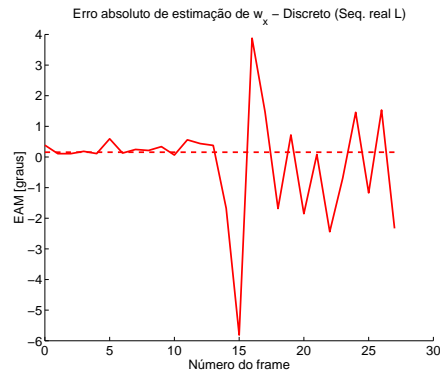
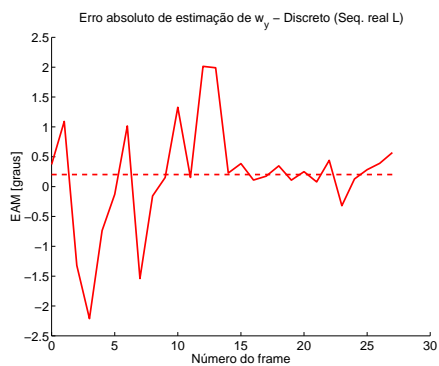
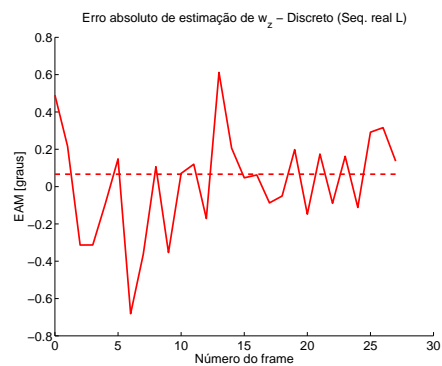


(e)  $\Omega_Y$

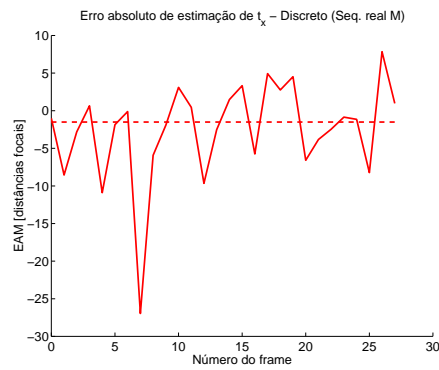


(f)  $\Omega_Z$

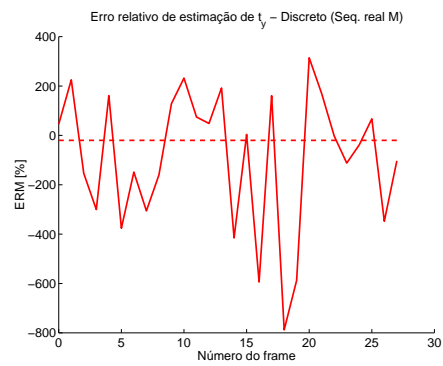
$\phi$	Sequência real L	DISC.
--------	------------------	-------

(a)  $t_X$ (b)  $t_Y$ (c)  $t_Z$ (d)  $\Omega_X$ (e)  $\Omega_Y$ (f)  $\Omega_Z$

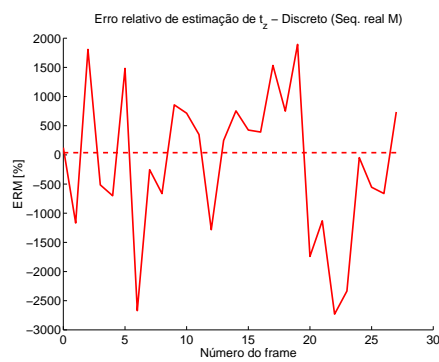
$\vec{\phi}$	Sequência real M	DISC.
--------------	------------------	-------



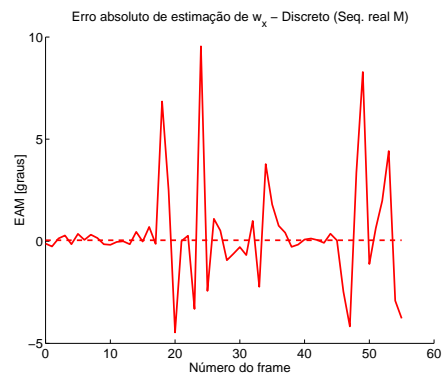
(a)  $t_x$



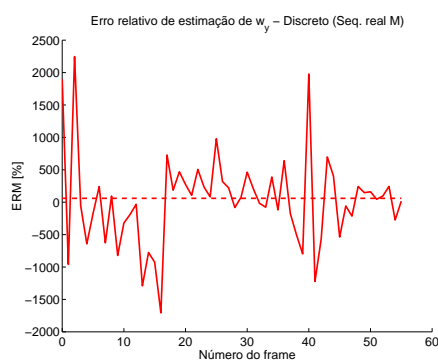
(b)  $t_y$



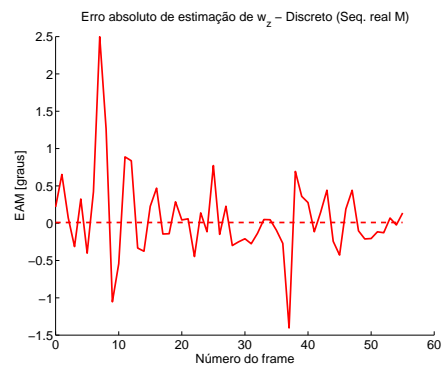
(c)  $t_z$



(d)  $\Omega_x$



(e)  $\Omega_y$



(f)  $\Omega_z$





# Bibliografia

- [1] G. Adiv. Determining three-dimensional motion and structure from optical flow generated by several moving objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-7(4):384–401, July 1985.
- [2] J. L. Barron and R. Eagleson. Motion and structure from long binocular sequences with observer rotation. In *Proc. of the International Conference on Image Processing*, pages 193–196, Oct. 1995.
- [3] J. L. Barron, D. J. Fleet, and S. S. Beauchemin. Performance of optical flow techniques. *IEEE International Journal of Computer Vision*, 12(1):43–77, 1994.
- [4] Alain Berthoz. *The Brain's Sense of Movement*. Harvard University Press, 1997.
- [5] D. Demirdjian and R. Horaud. Motion-egomotion discrimination and motion segmentation from image-pair streams. *Computer Vision and Image Understanding*, 78:53–68, 2000.
- [6] M. Harville, A. Rahimi, T. Darrell, G. Gordon, and J. Woodfill. 3d pose tracking with linear depth and brightness constraints. In *Proc. IEEE International Conference on Computer Vision*, Corfu, Greece, 1999.

- [7] D. Heeger and A. Jepson. Subspace methods for recovering rigid motion i: Algorithm and implementation. *International Journal of Computer Vision*, 7(2):95–117, 1992.
- [8] T. S. Huang and S. D. Blostein. Robust algorithm for motion estimation based on two sequential stereo image pairs. In *Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 518–523, San Francisco, 1985.
- [9] A. D. Jepson, J. L. Barron, and J. K. Tsotsos. Determining egomotion and environmental layout from noisy time-varying image velocity in binocular image sequences. *IJCAI*, pages 822–825, 1987.
- [10] K. Kanatani. Renormalization for motion analysis: Statistically optimal algorithm. *IEICE Transactions on Information and Systems*, (E77-D-11):1233–1239, 1994.
- [11] K. Kanatani and S. Takeda. 3d motion analysis of a planar surface by renormalization. *IEICE Transactions on Information and Systems*, (E78-D-8):1074–1079, 1995.
- [12] P. J. Kellman and M. K. Kaiser. Extracting object motion during observer motion: Combining constraints from optic flow and binocular disparity. *J. Opt. Soc. Amer.*, 12(3):623–625, 1995.
- [13] Y. C. Kim and J. K. Aggarwal. Determining object motion in a sequence of stereo images. *IEEE J. Robotics and Automation*, 3:599–614, Dec. 1987.
- [14] K. Konolige. Small Vision System - Development System.  
<http://www.ai.sri.com/konolige/svs/svs.htm>.

- [15] S. Lee and Y. Kay. A kalman filter approach for accurate 3-d motion estimation from a sequence of stereo images. In *CVGIP: Image Understanding*, volume 54, pages 244–258, Set. 1991.
- [16] L. Li and J. H. Duncan. 3d translational motion and structure from binocular image flows. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(7):657–667, 1993.
- [17] S. A. Matthies and L. Shafer. Error modeling in stereo navigation. *IEEE J. on Robotics and Automation*, 3(3):239–248, 1987.
- [18] E. De Micheli, V. Torre, and S. Uras. The accuracy of the computation of optical flow and the recovery of motion parameters. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(5):434–447, 1993.
- [19] A. Mitiche. On kineopsis and computation of structure and motion. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(1):109–112, 1986.
- [20] N. Molton and M. Brady. Practical structure and motion from stereo when motion is unconstrained. *International Journal of Computer Vision*, 39(1):5–23, 2000.
- [21] R. M. Murray, Z. Li, and S. S. Sastry. *A Mathematical Introduction to Robot Manipulation*. CRC Press, 1994.
- [22] Stephen E. Palmer. *Vision Science: Photons to Phenomenology*. MIT Press, 1999.
- [23] W. Richards. Structure from stereo and motion. *J. Opt. Soc. Amer.*, 2:343–349, Feb. 1985.

- [24] J. W. Roach and J. K. Aggarwal. Determining the movement of objects from a sequence of images. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2(6):544–562, 1980.
- [25] I. Rock. The basis of position-constancy during passive movement. *American Journal of Psychology*, 81(2):262–265, 1968.
- [26] P. J. Rousseeuw and A. M. Leroy. *Robust Regression and Outlier Detection*. John Wiley & Sons, 1987.
- [27] K. Shanmugan. *Digital and analog communication systems*. John Wiley & Sons, 1979.
- [28] J.-Y. Shieh, H. Huang, and R. Sudhakar. Motion estimation from a sequence of stereo images: A direct method. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 24(7):1044–1053, July 1994.
- [29] G. Stein and A. Shashua. Direct estimation of motion and extended scene structure from a moving stereo rig. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition CVPR'98*, pages 211–218, June 1998.
- [30] R. Sudhakar, H. Zhuang, P. Haliyur, and J. Shieh. Estimation of motion parameters using binocular camera configurations. In *Proc. SPIE Conference on Intell. Robots*, pages 24–32, Boston, Nov. 1991.
- [31] W. Wang and J. H. Duncan. Recovering the three-dimensional motion and structure of multiple moving objects from binocular image flows. *Computer Vision and Image Understanding*, 63:430–446, 1996.
- [32] A. M. Waxman and J. H. Duncan. Binocular image flows: Steps towards stereo - motion fusion. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(6):715–729, Nov. 1986.

- [33] A. M. Waxman and S. Sinha. Dynamic stereo: Passive ranging to moving objects from relative image flows. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8:406–412, July 1986.
- [34] J. Weng, P. Cohen, and N. Rebibo. Motion and structure estimation from stereo image sequences. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 8(3):362–382, 1992.
- [35] J. Weng, T. S. Huang, and N. Ahuja. 3-d motion estimation, understanding, and prediction from noisy image sequences. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 9:370–389, May 1987.
- [36] G. Xu, S. Tsuji, and M. Asada. A motion stereo method based on coarse to fine control strategy. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 9(2):332–336, 1987.
- [37] G. J. Young and R. Chellappa. 3-d motion estimation of using a sequence of noisy stereo images: Models, estimation and uniqueness results. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12:735–759, Mar. 1990.
- [38] Z. Zhang and O. Faugeras. Estimation of displacements from two 3d frames obtained from stereo. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(12):1141–1155, 1992.
- [39] Z. Zhang and O. Faugeras. Three-dimensional motion computation and object segmentation in a long sequence of stereo frames. *International Journal of Computer Vision*, 7(3):211–241, 1992.